Introducción temprana del álgebra, una oportunidad para mejorar el aprendizaje de las Matemáticas

M.A. José Adolfo Santos Solares*
Máster en Medición, Evaluación e Investigación Educativa

Agosto de 2009

Resumen

El álgebra en el nivel primario o la introducción temprana de esta materia en el aprendizaje del niño, es un tema muy importante porque estudios recientes han demostrado que ayuda a que el estudiante vaya elevando su nivel de abstracción a un ritmo moderado y de forma continúa. En este estudio, se analizan los ítems utilizados en la prueba de Matemáticas para sexto grado en el año 2007, de manera que se pueda determinar si los ítems que se consideran algebraicos explican mejor los resultados totales de esta prueba y compararlos con los ítems que no se consideran algebraicos. Se obtiene la calificación en los ítems algebraicos y los no algebraicos, se separan a los estudiantes en sus diversas características y se compara su promedio; además, se construye un modelo matemático de ecuación lineal para identificar cuál de los grupos de ítems influye más en el resultado final de la prueba.

* Subdirección de Análisis de Datos de Evaluación e Investigación. Dirección General de Evaluación e Investigación Educativa –DIGEDUCA-, Ministerio de Educación de Guatemala.

INTRODUCCIÓN

La introducción temprana del álgebra en el aprendizaje del niño, es un tema que ha generado debate entre expertos en Matemáticas y su enseñanza; algunos consideran que un niño no tiene el suficiente nivel de abstracción para entenderla y otros afirman que depende de la metodología o del contenido de lo que se enseña, por lo que se ha postergado su estudio hasta el nivel medio.

En la educación de Guatemala se busca mejorar la calidad de los aprendizajes, de manera que se aumente el rendimiento de los estudiantes de nivel primario en Matemáticas, disminuir la deserción, aumentar la continuidad de estudios en el nivel medio y eliminar la apatía que puedan tener los alumnos hacia las Matemáticas, debido a que se le atribuye mucha dificultad al momento de estudiarla.

Enseñar conceptos algebraicos en el nivel primario, no debería ser una carga adicional para el maestro ni para el estudiante, pero implica desarrollar un pensamiento crítico, de razón y análisis, eliminando la mecanización y memorización sin sentido.

Desarrollar pensamiento algebraico en el nivel primario generará en el estudiante una mejor comprensión de las Matemáticas, eliminará vacíos en el aprendizaje, aumentando las probabilidades de que continúe estudiando, que tenga éxito en su carrera profesional y por ende mejore la calidad de la educación en Matemáticas.

Es importante enseñar conceptos algebraicos en el nivel primario, que los niños puedan entender a esa edad. En mi experiencia con personas que me piden ayuda para entender el álgebra, me he preguntado ¿qué necesitan para aprenderla?, dándome cuenta que los problemas vienen desde su formación inicial en Matemáticas. Al indagar con los expertos en Matemáticas en Guatemala, he verificado tal importancia y confirmado la hipótesis.

El problema de las Matemáticas ha sido que al pasar de nivel primario a secundario, el estudiante siente un cambio muy abrupto, puesto que a veces se le enseña aritmética y geometría de forma mecánica, sin razonar ni entender los conceptos. Es necesario que adquiera un pensamiento que le ayude a eliminar esos problemas, y que sea consciente del proceso que realiza. Se requiere entender cómo se puede desarrollar un pensamiento algebraico en primaria, ya que le será indispensable en todos los niveles de estudio. Entonces, se plantea indagar cómo egresa el estudiante del nivel primario para ingresar al nivel medio, y por ello se analizará el rendimiento de las pruebas de Matemáticas realizadas a los estudiantes de sexto grado a nivel nacional.

Objetivo General

Determinar si los ítems que se consideran algebraicos en las pruebas de Matemáticas explican mejor los resultados totales, que los ítems que no se consideran algebraicos.

Objetivos Específicos

- Identificar contenidos algebraicos en el currículo nacional base
- Identificar los ítems de las pruebas de Matemáticas de sexto primaria de 2007 que pueden ser resueltos con procedimientos algebraicos.
- Separar la calificación de estos ítems algebraicos y los que no lo son.
- Comparar ambos grupos de ítems para identificar su influencia en el resultado.
- Comparar resultados de ambos grupos con factores asociados al rendimiento del estudiante.

Hipótesis

H_o: Los ítems que se consideran algebraicos son los más influyentes en los resultados de la prueba de Matemáticas.

H_a: Los ítems que no se consideran algebraicos son los más influyentes en los resultados de la prueba de Matemáticas.

MARCO CONCEPTUAL

Álgebra

En el libro de Swokowski, E. y Cole, J. (2006) se explica el origen de la palabra álgebra, la cual proviene de *ilm al-jabr w'al muqabala,* que es el título de un libro escrito en el siglo IX por el matemático árabe Al Juarismi. El título se ha traducido como la ciencia de la reposición y la reducción, lo que significa trasponer y combinar términos semejantes (de una ecuación). La traducción fonética de *al-jabr* en el latín popular, condujo al nombre de la rama de las Matemáticas que ahora se conoce como álgebra. En esta disciplina se usan símbolos o letras para denotar números arbitrarios. La gran cantidad de fórmulas que se usan en las ciencias y en la industria pone de manifiesto la naturaleza general del álgebra.

Según Peter, H. (1978) "el álgebra no es otra cosa más que la continuación lógica de la aritmética" y muchos de los métodos de la aritmética se usan en álgebra, aunque en forma modificada, desarrollada, o bien, original. Aunque el álgebra en realidad no es una materia difícil, se requiere tenacidad para aprender el significado de algunos vocablos nuevos. Uno de los aspectos más importantes del álgebra es el lenguaje que emplea, por lo que es conveniente que los estudiantes vayan adquiriendo esa tenacidad y el lenguaje lo más pronto posible.

Martin, E. Jr. (1972) explica que la aritmética se relaciona con las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división de números. El álgebra se ocupa del manejo de símbolos que representan números. Existen varias leyes o reglas básicas que rigen las operaciones algebraicas, el estudiante debe manejarse correctamente sin el uso consciente de dichas reglas, pues su cerebro debe ser adiestrado por ellas a través de su aprendizaje matemático previo. Sin embargo, necesita conocerlas por dos razones: primeramente debería estar en condiciones para justificar cada una de sus operaciones, y asegurarse de su legitimidad; en segundo lugar, necesita saber cuándo se está utilizando una regla determinada, y porque a menudo los textos se refieren a ellas nombrándolas.

Álgebra Temprana

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007) se refieren a la necesidad de introducir al niño desde sus primeros años a una matemática general. Es necesario que se comience con la aritmética, pero a la vez se enseñen conceptos que ayudaran al estudiante a entender mejor el álgebra cuando ésta sea enseñada formalmente, teniendo como propósito el no dejar vacíos en el aprendizaje de las Matemáticas que desmotiven al estudiante.

Un objetivo por el que se debe trabajar para el mejoramiento de la calidad del aprendizaje de las Matemáticas, es elevar los resultados de las evaluaciones realizadas en años anteriores y bajar la tasa de deserción. Los resultados de las evaluaciones de Matemáticas para sexto grado del año 2006, muestran que sólo la tercera parte de los evaluados alcanzaron el nivel satisfactorio (Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID, 2007). Por tal razón se necesita mejorar los aprendizajes matemáticos, proponiendo cambios en las formas tradicionales de docencia, para crear una base bien cimentada de Matemáticas en el nivel primario, que trascienda en mejorar la calidad de los niveles posteriores de escolaridad.

La inclusión temprana de temas algebraicos, puede ayudar a que el estudiante adquiera un mejor nivel de análisis y lógica, realice generalizaciones, utilice símbolos y relaciones en aritmética. Esto le ayudará para que en el futuro sea capaz de comprender la utilización del álgebra en su contexto, crear un sentido de las Matemáticas, y al llegar a secundaria no le afecte la falta de preparación pedagógica que pudieran tener sus catedráticos. En Guatemala es común ver a catedráticos de nivel medio en colegios y universidades, quienes no son maestros y probablemente no aplican muchas metodologías pedagógicas; por lo que introducir a los estudiantes desde temprana edad a los conceptos básicos de álgebra, ayudaría a evitar problemas de aprendizaje del álgebra en el nivel medio y superior.

Como indica Cajas, F. (2007) existen en el mundo comunidades de investigadores en educación matemática, que han propuesto nuevos estándares de alta calidad para los aprendizajes de los estudiantes, tal es el caso de las propuestas del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM), que ha generado en las últimas décadas investigación clave para transformar la educación matemática obligatoria en norte América, y que ha apoyado y desarrollado investigación educativa de primera línea alrededor de cómo y bajo qué condiciones los estudiantes aprenden las Matemáticas propuesta en los estándares educativos.

El NCTM ha recomendado que el álgebra se convierta en una hebra presente desde kinder (pre-primaria) hasta el grado 12 (último grado de nivel medio). El NCTM es un referente muy respetado a nivel mundial en el ramo de las Matemáticas. Además, en el *2003 RAND Mathematics Study Panel* (Sistema Evaluativo Estadounidense) ha recomendado la inclusión del álgebra como "…tema inicial para enfocar y coordinar la investigación y el desarrollo desde pre-primaria hasta el grado 12" (Carraher, D. y Schliemann, A. 2007).

La creación de una buena base algebraica en el estudiante desde sus primeros años de estudio, hará que sea más competitivo, no sólo en el ámbito nacional, sino a nivel internacional. Carraher, D. y Schliemann, A. (2007) señalan que en países como Estados Unidos, ya se han implementado en los estándares educativos nacionales la enseñanza del álgebra como puntos focales, en cada uno de los grados desde pre-primaria hasta el grado 12.

Al tema en cuestión se le ha llamado comúnmente Álgebra Temprana. Una descripción que es más aceptada ha sido dada por Howe, R. (2005) en el Foro de Investigación del Álgebra Temprana, que tuvo lugar en la 25 Conferencia Internacional para la Psicología y la Educación Matemática, dónde se discutió sobre el razonamiento algebraico en grados desde kinder hasta el doceavo, en la que expuso las implicaciones algebraicas de la siguiente forma:

1. Trabajar con variables, en particular aritmética con variables, y así la formación de expresiones polinomiales y racionales. Esto también incluye representación, o "modelado" de situaciones concretas con expresiones, y obtener ecuaciones. Esto es también frecuentemente extendido para incluir extracción de raíces. Además incluye manipulación de expresiones y ecuaciones, para simplificar, resolver e interpretar.

2. Estructura algebraica, primariamente como capturado en las reglas de aritmética (el campo de axiomas). Las reglas de aritmética encapsulan la legítima manipulación en polinomios o expresiones racionales. Si tomar las potencias racionales es permitido, ellas tienen que ser complementadas por las leyes de exponentes y la multiplicatividad de potencias fraccionarias. Estas reglas, junto con los principios para transformar ecuaciones (las técnicas originales, las cuales dieron origen al tema conocido por nosotros como álgebra), es resumir las bases para técnica algebraica y las ecuaciones entre ellas.

En los documentos presentados en el Foro mencionado, se observó un buen ejemplo de los múltiples puntos de vista sobre el álgebra temprana. Algunos pocos se opusieron argumentando que debería ser introducida después que los estudiantes hayan estudiado 6 años como mínimo (Linchevsky, 2001); pero la mayor parte estuvo a favor indicando que la notación algebraica merece un prominente lugar en la instrucción temprana (Carraher, Schliemann y Brizuela, 2000, 2005, 2007; citado por Carraher, D. y Schliemann, A. 2007:672).

Identificar el tema

Han habido desacuerdos en los términos utilizados para referirse a la introducción del niño al álgebra desde sus primeros años de estudio, porque algunos expertos matemáticos consideran que no se puede enseñar álgebra a los niños antes que lleguen al nivel medio de estudios, como lo indica Linchevsky, 2001 (citado por Carraher, D. y Schliemann, A. 2007:672). Algunos es apoyan en la teoría de Jean Piaget, quien expone que la capacidad de abstracción del niño está relacionada directamente a su edad, y que hasta después que el niño termine el nivel primario (12 años de edad) es el momento para que comience con la introducción del álgebra, por su requerimiento de abstracción; lo cual debe ser discutido para no tomarse de forma literal.

La mayoría de desacuerdos han sido por el nombre con que se aborda el tema, en algunos estudios realizados se refieren al álgebra formal que se imparte en secundaria como "*School Algebra*", al álgebra que se imparte en los dos primeros años de secundaria como “pre-algebra”, al álgebra que se imparte en el nivel pre-primario y primario como “*Early Algebra*” (álgebra temprana), y de forma similar se han referido a ella como “*Algebraic Thinking*” o pensamiento algebraico (Carraher, D. y Schliemann, A. 2007, pp. 669-676).

Diversos autores han equiparado álgebra con pensamiento algebraico desde hace muchos años (Bednarz y Javier, 1996; Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Bloedy-Vinner, 2001; Boyer y Merzbach, 1989; Harper, 1987; Kaput, 1995 y 1998, en prensa; Kieran 1996; Kirshner, 2001; Van Amerom, 2002 (Citados por Carraher, D. y Schliemann, A. 2007)). Cuando se ha tratado de categorizar la estructura ocasionalmente se exhiben inconsistencias y traslapes. Por ejemplo, una crisis de álgebra en generalización, resolución de problemas, modelado, y el proceso de razonamiento de fracciones mixtas no disjuntas (generalización y resolución de problemas), con un tema de Matemáticas (funciones) y otro (modelado), puede ser entendido también como un tema matemático o un conjunto de procesos de razón.

Esto puede reflejar el hecho que el análisis del pensamiento algebraico aún está en su infancia (Carraher, D. y Schliemann, A. 2007). El término “*Algebraic Reazoning*” es utilizado de la misma forma que el pensamiento algebraico. Un ejemplo es cuando el estudiante describe las reglas para generar un patrón, comprende expresiones y resuelve ecuaciones que involucran variables sencillas (Distrito escolar 1J de Pórtland, 5to.).

Desarrollar pensamiento algebraico

Algebraico es una forma de pensamiento, más que un conjunto de reglas para manipular símbolos, según Vance (1998) (citado por Kriegler, Shelley 2000:1); quien indica que a veces el álgebra es definida como aritmética generalizada o como un lenguaje para generalizar la aritmética.

El pensamiento algebraico es organizado en dos grandes componentes: las herramientas del desarrollo del pensamiento algebraico y el estudio de ideas fundamentales de álgebra. Las herramientas del pensamiento algebraico incluyen hábitos analíticos de la mente, especialmente en destrezas de solución de problemas y destrezas de representación. Las ideas fundamentales de álgebra representan un dominio en el cual las herramientas del pensamiento algebraico pueden desarrollarse (…esto es, ellos son la comida, el contenido, el tema que importa para estudio), (Kriegler, Shelley 2000:2).

Una de las incógnitas fundamentales en este tema es ¿Qué necesita el maestro para desarrollar el pensamiento algebraico en sus alumnos? Refiriéndonos a las sugerencias de Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006), quienes indican la importancia que los estudiantes construyan sus conocimientos matemáticos al resolver distintos tipos de tareas, para lo cual se necesita que los maestros reúnan al menos tres características:

- que motiven a los estudiantes a expresar lo que saben;
- que los alienten a estar dispuestos a investigar lo que desconocen por medio de la discusión, la experimentación y el intercambio de experiencias; y
- que permitan recuperar los procesos de pensamiento empleados en sus intentos de solución.

Además, es importante que los profesores ayuden a los alumnos a plantear conjeturas y apoyen a quienes lo necesitan, sin eliminar el reto que contiene la tarea. En este contexto se reconoce la importancia de que los estudiantes utilicen recursos y estrategias que les permitan pensar matemáticamente, en donde Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006) indican que aprender a pensar matemáticamente significa:

- desarrollar un punto de vista que valore el proceso de matematización y abstracción y tener la tendencia a aplicarlos; y
- desarrollar una competencia con las herramientas de trabajo y usarlas en la meca de entender y construir estructuras (desarrollar el sentido matemático).

Los modelos mentales adecuados son importantes para pensar matemáticamente. Según Otero, M. y Banks-Leite, L. (2006), una restricción importante para la generación de modelos mentales adecuados reside en que tenemos una capacidad de memoria restringida; por ende, los sistemas notacionales que acompañan a la aritmética y al álgebra, liberan al sistema cognitivo de sostener esas relaciones y constituyen un instrumento muy poderoso al servicio de la modelización.

Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006) se sustentan en la visión de promover el aprendizaje de las Matemáticas mediante el uso de tareas diseñadas bajo ciertos principios:

- que sean atractivas y fáciles de entender para los estudiantes;
- que contengan contenidos fundamentales del currículo; y
- que su desafío permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por los estudiantes en sus intentos de solución.

Lo anterior debería ir ligado a lo que se quiere enseñar, por lo que podría basarse en el proceso y la confirmación final que redondea la clasificación de los ítems de TIMSS (2003), para el cuarto y octavo grado. En ésta los expertos definieron tres dominios cognitivos a satisfacer para el aprendizaje de las Matemáticas:

- factores de conocimiento, procedimientos y conceptos;
- conocimientos de aplicación y entendimiento; y
- razonamiento.

Para resumir el proceso, se hace referencia a la descripción algebraica dada por Kaput, (1995 y 2000) (citado por Mullis, I.; Martin, M. y Foy, P. 2005), quienes indican que para aprender el álgebra se requiere combinar las herramientas y el pensamiento, y que ello puede ocurrir en cinco niveles:

1. generalización y formalización de patrones de razonamiento aritmético,
2. manipulación de formalismos guiada por sintaxis,
3. estructuras abstraídas de cálculos y relaciones,
4. funciones, relaciones y variación conjunta, y
5. modelado de lenguajes.

Tales niveles pueden comenzarse a trabajar desde la primaria, sin crear mayor complejidad, sino para sentar las bases del álgebra. De manera que los estudiantes vayan adquiriendo cierto tipo de razonamiento y lógica, que les servirá para comprender lo que les será enseñado con más profundidad en los niveles siguientes, y que pueda comenzar a desarrollar un pensamiento algebraico.

Continuidad de las Matemáticas

Molina, M. (2004) explica que para poder comprender correctamente los temas más evolucionados de las Matemáticas, es necesario poder hacer la conexión entre lo básico y lo avanzado, en donde el pensamiento relacional debe ser estimulado. Por otro lado, Uicab, R. y Oktac, A. (2006) indican que durante el aprendizaje escolar suele ocurrir que los estudiantes se apropian de los conceptos de manera aislada y no de manera estructurada. Esto hace que tengan dificultades cuando abordan situaciones completamente nuevas, cuya resolución no se puede realizar sólo recordando algún procedimiento enseñado por el profesor.

Uno de los problemas fundamentales se da cuando los docentes prefieren impartir clases en los grados bajos de primaria, indicando que no consideran conocer bien los temas de los grados como quinto y sexto del nivel primario. Entonces, es difícil crear la continuidad en Matemáticas si no se tiene un conocimiento profundo y avanzado de las Matemáticas, por lo menos sobre lo que el maestro ha recibido durante su formación profesional.

Según Martin Kindt, 1980 (citado por Molina, M. 2004) cuando se enseña álgebra, se ha observado que los estudiantes tienen una gran dificultad para entender los conceptos, y destaca tres grandes problemas:

- falta de atención a la generalización y razonamiento,
- un salto demasiado rápido al tratamiento formal del álgebra, y
- la falta de claridad en para qué, y para quién, es de utilidad el álgebra.

Estas críticas fueron el desencadenante de un proceso de reforma de la enseñanza del álgebra en los Países Bajos en los años ochenta. En nuestro país son comunes este tipo de críticas, entre quienes reciben a los estudiantes que egresan del nivel primario, por lo que también aquí debería realizarse una reforma, en cuanto a la forma en que se enseñan las Matemáticas y el álgebra.

Por lo tanto, se considera pertinente proponer el desarrollo del pensamiento algebraico desde el nivel primario.

Oportunidad de Aprendizaje

Uno de los aspectos más relevantes en la enseñanza de las Matemáticas, y en especial el álgebra, es el cómo enseñar los contenidos para que sean aprendidos por los estudiantes (en nuestro caso los que obliga el CNB). Esto conlleva a una serie de elementos necesarios para tener éxito en dar una buena calidad de educación, siendo esto lo que se pretende alcanzar. Tales elementos son conocidos como Oportunidades de Aprendizaje (OdA), que los estudiantes deben tener para poder alcanzar el logro esperado.

La Dra. Zenaida Aguirre-Muñoz (asesora sobre los estándares de oportunidad para Guatemala) señala la necesidad de la profundidad de los contenidos que se enseñan, indicando que el álgebra temprana podría dar profundidad a los temas matemáticos, como Oportunidad de Aprendizaje (OdA) que se debe dar a los estudiantes. En un estudio realizado por Cervini, R. (2001) en Argentina, confirma que los rendimientos escolares se relacionan fuertemente con la oportunidad de aprender (OdA ofrecidas al alumno), lo cual da lugar a considerar que en Guatemala es necesario identificarlas y proporcionarlas.

La falta de un esquema de visión del alumno le impedirá que pueda resolver problemas matemáticos, lo cual es indispensable en álgebra, y cuando se enfrente a problemas más avanzados. Otero, M. y Banks-Leite, L. (2006) en un estudio exploratorio realizado con estudiantes de enseñanza media, con el fin de analizar las estrategias utilizadas y los modelos mentales subyacentes, indican que cuando los estudiantes se enfrentan a una situación matemática problemática, tienen problemas, en la medida que no disponen de esquemas suficientes para resolverlos; los cuales podrían obtener desde el nivel primario.

Uno de los problemas del aprendizaje de las Matemáticas en la educación primaria, es que muchas veces, los estudiantes aprenden Matemáticas que aplican sólo en situaciones creadas por el docente y carecen de significado real para ellos. Entonces, se requiere que el estudiante no sólo pueda memorizar situaciones, sino también analizarlas y poder aplicar los conocimientos para resolver cualquier problema que se le presente, incluso llegar a un estado de metacognición, según la clasificación creada por Marzano, R. (2000).

Metacognición

El concepto de metacognición es muy complejo y de reciente estudio, que data de los años setenta, y casi nadie pone en duda la importancia de este concepto. Existe debate entre sus alcances, significado e interrelaciones entre los diversos tipos de conocimiento. Una definición de metacognición es dada por Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007), explicando que se refiere entre otras cosas, al activo monitoreo y consecuente regulación y orquestación de estos procesos, en relación a los objetos cognitivos o datos, en el cual ellos nacen, usualmente en el servicio de alguna meta concreta u objetivo.

Relativo al concepto de metacognición, se estudia la Auto-eficacia que es la creencia de poder conducir el progreso por una u otra vereda (William, D. 2007:1084), o sea que es el conocimiento de las posibilidades de logro y saber cómo puede llegar a él; en un momento dado el individuo puede saber si es capaz de hacer algo o no, y cómo lograrlo.

Schoenfeld, A. (1992) habla en su investigación sobre cómo se debe enseñar a resolver problemas, llegando al nivel de metacognición y darle sentido a las Matemáticas. De modo que en toda enseñanza de Matemáticas se debe hacer que el niño razone y piense lo que está haciendo, para qué lo está haciendo, cómo lo está haciendo y si sirve lo que está haciendo. Entonces, se debe enseñar a los estudiantes a ser reflexivos de los procesos que se están llevando a cabo en su aprendizaje.

Muchos han sido los esfuerzos por comprender y dar respuestas al sin número de problemas, tanto prácticos como teóricos, en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas durante los primeros años de escolarización. Al respecto Flórez (1994) (citado por Terán, M. y Pachano, L. 2005), plantea que el proceso de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas debe ser un proceso iterativo, constructivo, en el que las relaciones maestro-alumno-contenido creen condiciones para el encuentro entre el deseo de enseñar del docente y el deseo de aprender del alumno. Para ello nos dice Vigotsky, (1979) (citado por Terán, M. y Pachano, L. 2005), se requiere de un “docente mediador” que le asigne importancia a la disposición del estudiante para la adquisición de aprendizajes significativos y que logre, mediante actividades con significado social y cultural la relación aprendizaje-desarrollo, teniendo en cuenta el nivel alcanzado en etapas anteriores.

En síntesis es necesario que los contenidos en el nivel primario no sólo se enseñen de manera mecánica, sino que se enseñen los temas a profundidad; que se proporcione a los estudiantes la mayor cantidad de OdA’s posibles, no limitándolos a continuar en un régimen de enseñanza obsoleto, el cual se ha comprobado que debe mejorar, para que el estudiante no aborrezca las Matemáticas. El odio a las Matemáticas y el bajo rendimiento en ella no es conveniente, ya que se ha comprobado que las Matemáticas y en especial el álgebra, se relaciona directamente con el éxito profesional y laboral de las personas. Este es uno de los resultados de *Foundations for Success* (2008), la cual realizó un estudio encomendado expresamente por presidente de los Estados Unidos, para determinar la influencia de las Matemáticas en el estudiante.

Desarrollo Cognitivo

Según Jean Piaget, el desarrollo humano parte en función de los reflejos arcaicos, el niño nace con estos esquemas básicos que le sirven para entrar en relación con el medio. El Desarrollo Cognitivo es el esfuerzo del niño por comprender y actuar en su mundo. Por otra parte, también se centra en los procesos del pensamiento y en la conducta que refleja estos procesos. El desarrollo de las funciones que nos permite conocer, da lugar a los Procesos Cognitivos, para el cual hay cuatro factores: maduración y herencia, experiencia activa, interacción social y equilibrio.

Vygotski escribió obras en las que se encuentran presentes varios conceptos de especial relevancia que constituyen sus posiciones teóricas, tales como herramientas psicológicas, mediación e internalización, entre otras. Uno de los más importantes conceptos sobre el cual trabajó y al que dio un nombre es el conocido como zona de desarrollo próximo (ZDP), que se engloba dentro de su teoría sobre el aprendizaje como camino hacia el desarrollo.

En el marco de la teoría Vygotskiana los procesos de interiorización son creadores de la personalidad, de la conciencia individual y social. Son procesos fundamentales para el desarrollo de los procesos psicológicos superiores en el que participan los instrumentos de mediación, especialmente el lenguaje.

La ZDP de la que habla Vygotski, se refiere al espacio, brecha o diferencia entre las habilidades que ya posee el niño y lo que puede llegar a aprender a través de la guía o apoyo que le puede proporcionar un adulto o un par más competente. El concepto de la ZDP se basa en la relación entre habilidades actuales del niño y su potencial. Un primer nivel, el desempeño actual del niño es cuando puede trabajar y resolver tareas o problemas sin la ayuda de otro. Sería este nivel basal lo que comúnmente es evaluado en las escuelas.

El nivel de desarrollo potencial es el nivel de competencia que un niño puede alcanzar cuando se le es guiado y apoyado por otra persona. La diferencia o brecha entre esos dos niveles de competencia es lo que se llama ZDP. La idea de que un adulto significativo (o un par, como un compañero de clase) medie entre la tarea y el niño es lo que se llama andamiaje. Vygotski reconoce la explícita y profunda interconexión entre el lenguaje oral y el desarrollo de los conceptos mentales.

METODOLOGÍA

Se utilizaron los datos la prueba de Matemáticas realizada a estudiantes de sexto primaria en el año 2007, de las pruebas que realiza DIGEDUCA a nivel nacional en Guatemala. El total de estudiantes evaluados fue de 14,591 y se le asignaron ponderaciones o pesos a cada uno, llamados expansores de la muestra, de manera que se obtuvo una representación a nivel nacional.

Se seleccionaron los ítems que se considera que pueden ser resueltos con procedimientos algebraicos, y el resto en la prueba es el grupo de ítems que no se utilizan procedimientos algebraicos para ser resueltos (en su mayoría). Para cada grupo se suman las respuestas correctas de los ítems que lo integran y se divide entre la cantidad de estos, para obtener el porcentaje de respuestas correctas del grupo de ítems algebraicos y los que no lo son (teoría clásica).

Para determinar cuál grupo influye más en el resultado total de la prueba de Matemáticas, se determinó la relación que tiene la nota algebraica (porcentaje de respuestas correctas de los ítems algebraicos) y la nota total de la prueba. De la misma forma se correlacionan la nota no algebraica (porcentaje de respuestas correctas de los ítems no algebraicos). De estas correlaciones se puede indicar en qué porcentaje las variaciones de la nota algebraica y la no algebraica, explican las variaciones de los resultados totales en la prueba de Matemáticas.

La hipótesis de las relaciones entre las calificaciones se planteó de la siguiente forma:

$$H_0: R_1 - R_2 > 0$$

$$H_1: H_0 = \text{no es verdadero}$$

Donde R_1 es el coeficiente de correlación de la nota algebraica y la nota total de la prueba; y R_2 es el coeficiente de correlación de la nota no algebraica y la nota total de la prueba.

Con los valores de los factores obtenidos de coeficientes de regresión se determina la influencia de cada grupo, verificando si uno explica más que el otro la variabilidad del resultado de la prueba total de Matemáticas, indicando si se acepta la hipótesis nula o la alternativa.

Antes de analizar la influencia de cada grupo de ítems en los resultados de la prueba, se verificó si las relaciones son estadísticamente significativas, y la capacidad que tiene de explicar el rendimiento total en Matemáticas.

Con la información de las características de los estudiantes evaluados y del cuestionario de factores asociados al rendimiento, se realizaron pruebas de medias para los grupos que fueran de dos categorías o dicotómicas, de manera que se evaluaron las diferencias entre sus medias; además se hicieron correlaciones con las variables escalares y continuas.

Se compararon los promedios de calificación para cada grupo, de manera que se puedan obtener conclusiones sobre la forma en que los resultados de los ítems algebraicos afectan los resultados de la prueba en general, y las relaciones con las características de los estudiantes.

RESULTADOS

Al obtener el porcentaje e respuestas correctas de los ítems que pueden ser resueltos con métodos algebraicos, y el porcentaje de respuestas correctas de los ítems cuyas soluciones no requieren la utilización de métodos algebraicos; se observan las diferencias entre estos grupos.

Al hacer las comparaciones por género, se observó que los hombres tienen mejor rendimiento que las mujeres, con una diferencia significativa, tanto en los ítems algebraicos como en los no algebraicos. Aunque los hombres salen mejor que las mujeres en la calificación total, las mujeres obtienen mayor rendimiento en los ítems algebraicos que en los no algebraicos, a diferencia de los hombres quienes tienen menor promedio en los ítems algebraicos.

La tabla 1 muestra las comparaciones de promedios de calificación para los diferentes grupos, creados a partir de las respuestas dadas por los estudiantes al cuestionario de factores asociados adjunto a la prueba. En ella se muestran dos partes verticales que corresponden en la parte izquierda los promedios para los ítems algebraicos, y a la derecha los promedios para los ítems no algebraicos. Los grupos se van mostrando hacia abajo, siendo comparados de dos en dos con pruebas t de *student*, indicando si hay o no diferencias estadísticamente significativa entre los grupos.

Tabla 1. Comparaciones para grupos de ítems algebraicos y no algebraicos

NOTA DE ÁLGEBRA				NOTA NO ÁLGEBRA			
Valores a comparar	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**	**Valores a comparar**	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**
Género							
MASCULINO	28.82	0.000	SI	MASCULINO	29.34	0.000	SI
FEMENINO	27.06			FEMENINO	26.81		
¿Has repetido alguna vez sexto primaria?							
Una vez	25.86	0.003	SI	Una vez	26.41	0.001	SI
Nunca	28.16			Nunca	28.26		
¿Has repetido alguna vez sexto primaria?							
Dos veces	21.50	0.003	SI	Dos veces	24.33	0.017	SI
Nunca	28.16			Nunca	28.26		
¿Has repetido alguna vez sexto primaria?							
Tres veces	33.61	0.140	NO	Tres veces	27.44	0.766	NO
Nunca	28.16			Nunca	28.26		
¿Has repetido alguna vez sexto primaria?							
Más veces	24.24	0.225	NO	Más veces	25.37	0.231	NO
Nunca	28.16			Nunca	28.26		
¿Antes de entrar a primer grado fuiste a la escuela?							
Si	28.31	0.000	SI	Si	28.41	0.000	SI
No	27.21			No	27.41		
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? no nadie me ayuda							
SI	27.12	0.000	SI	SI	27.63	0.000	SI
NO	28.84			NO	28.61		
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí, en la escuela							
SI	28.22	0.385	NO	SI	28.77	0.004	SI
NO	27.90			NO	27.99		
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí, mis amigos							
SI	29.01	0.001	SI	SI	28.64	0.026	SI
NO	27.78			NO	28.01		
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí, un maestro particular							
SI	30.19	0.000	SI	SI	29.32	0.001	SI
NO	27.80			NO	28.02		
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí alguien de mi familia							
SI	30.18	0.000	SI	SI	29.30	0.000	SI
NO	26.71			NO	27.43		
¿Qué idiomas habla tu papá? Español							
SI	28.57	0.000	SI	SI	28.52	0.000	SI
NO	23.50			NO	25.08		

NOTA DE ÁLGEBRA				NOTA NO ÁLGEBRA			
Valores a comparar	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**	**Valores a comparar**	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**
¿Qué idiomas habla tu mamá? Español							
SI	28.71	0.000	SI	SI	28.57	0.000	SI
NO	23.25			NO	25.18		
¿Qué idiomas hablas con tu mamá? Español							
SI	28.81	0.000	SI	SI	28.60	0.000	SI
NO	23.10			NO	25.31		
¿Qué idiomas hablas con tu papá? Español							
SI	28.84	0.000	SI	SI	28.61	0.000	SI
NO	23.16			NO	25.36		
¿Tu papá sabe leer?							
SI	28.45	0.000	SI	SI	28.39	0.000	SI
NO	22.90			NO	25.30		
¿Tu mamá sabe leer?							
SI	29.28	0.000	SI	SI	28.87	0.000	SI
NO	23.88			NO	25.76		
¿Tu papá sabe escribir?							
SI	28.45	0.000	SI	SI	28.39	0.000	SI
NO	22.90			NO	25.22		
¿Tu mamá sabe escribir?							
SI	29.29	0.000	SI	SI	28.85	0.000	SI
NO	23.92			NO	25.75		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Mamá							
SI	28.02	0.065	NO	SI	28.16	0.031	SI
NO	27.22			NO	27.46		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Papá							
SI	28.00	0.397	NO	SI	28.13	0.524	NO
NO	27.74			NO	27.98		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Abuelo							
SI	27.13	0.008	SI	SI	27.41	0.003	SI
NO	28.08			NO	28.21		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Abuela							
SI	28.34	0.112	NO	SI	28.14	0.831	NO
NO	27.84			NO	28.09		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Hermanos o Hermanas							
SI	28.26	0.000	SI	SI	28.32	0.000	SI
NO	26.10			NO	26.83		
¿Quiénes viven contigo en misma casa? Otras personas como tíos o primos							
SI	28.81	0.004	SI	SI	28.68	0.009	SI
NO	27.78			NO	27.99		

NOTA DE ÁLGEBRA				NOTA NO ÁLGEBRA			
Valores a comparar	Media	Sig.	Hay diferencia significativa	Valores a comparar	Media	Sig.	Hay diferencia significativa
Además de estudiar ¿actualmente trabajas?							
SI	24.87	0.000	SI	SI	26.40	0.000	SI
NO	29.95			NO	29.24		
¿Crees que leer es?							
DIVERTIDO	27.86	0.000	SI	DIVERTIDO	28.05	0.000	SI
ABURRIDO	31.76			ABURRIDO	30.26		
¿Te gusta venir a la escuela?							
SI	27.99	0.153	NO	SI	28.13	0.463	NO
NO	29.88			NO	28.85		
¿Cómo crees que te fue en las pruebas que tomaste hoy?							
MAL	23.39	0.011	SI	MAL	24.50	0.007	SI
NO SE	27.62			NO SE	27.96		
¿Cómo crees que te fue en las pruebas que tomaste hoy?							
REGULAR	27.94	0.458	NO	REGULAR	27.81	0.650	NO
NO SE	27.62			NO SE	27.96		
¿Cómo crees que te fue en las pruebas que tomaste hoy?							
BIEN	29.26	0.000	SI	BIEN	29.07	0.000	SI
NO SE	27.62			NO SE	27.96		
¿Cómo crees que te fue en las pruebas que tomaste hoy?							
BIEN	29.26	0.001	SI	BIEN	29.07	0.001	SI
MAL	23.39			MAL	24.50		
Sector							
OFICIAL	26.44	0.000	SI	OFICIAL	27.28	0.000	SI
PRIVADO	33.73			PRIVADO	31.10		
Jornada							
MATUTINA	27.88	0.123	NO	MATUTINA	28.01	0.175	NO
VESPERTINA	25.18			VESPERTINA	26.24		
Jornada							
MATUTINA	27.88	0.000	SI	MATUTINA	28.01	0.000	SI
DOBLE	36.18			DOBLE	34.19		
Jornada							
VESPERTINA	25.18	0.000	SI	VESPERTINA	26.24	0.000	SI
DOBLE	36.18			DOBLE	34.19		
Plan							
DIARIO	27.95	0.000	SI	DIARIO	28.07	0.000	SI
NO INDICA	21.59			NO INDICA	25.87		

NOTA DE ÁLGEBRA				NOTA NO ÁLGEBRA			
Valores a comparar	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**	**Valores a comparar**	**Media**	**Sig.**	**Hay diferencia significativa**
Área							
URBANA	30.70	0.000	SI	URBANA	29.69	0.000	SI
RURAL	25.26			RURAL	26.49		
NIVEL DE DESEMPEÑO MATEMATICAS							
INSATISFACTORIO	6.16	0.000	SI	INSATISFACTORIO	6.99	0.000	SI
EXCELENTE	46.29			EXCELENTE	44.20		
NIVEL DE DESEMPEÑO MATEMATICAS							
INSATISFACTORIO	6.16	0.000	SI	INSATISFACTORIO	6.99	0.000	SI
SATISFACTORIO	30.99			SATISFACTORIO	31.23		
NIVEL DE DESEMPEÑO MATEMATICAS							
INSATISFACTORIO	6.16	0.000	SI	INSATISFACTORIO	6.99	0.000	SI
DEBE MEJORAR	18.27			DEBE MEJORAR	19.78		
NIVEL DE DESEMPEÑO LECTURA							
INSATISFACTORIO	19.40	0.000	SI	INSATISFACTORIO	21.94	0.000	SI
DEBE MEJORAR	24.80			DEBE MEJORAR	26.12		
NIVEL DE DESEMPEÑO LECTURA							
INSATISFACTORIO	19.40	0.000	SI	INSATISFACTORIO	21.94	0.000	SI
SATISFACTORIO	31.47			SATISFACTORIO	30.50		
NIVEL DE DESEMPEÑO LECTURA							
INSATISFACTORIO	19.40	0.000	SI	INSATISFACTORIO	21.94	0.000	SI
EXCELENTE	39.82			EXCELENTE	37.02		
Indica si la nota algebraica es mayor a la no algebraica							
ALGEBRA	36.23	0.000	SI	ALGEBRA	24.91	0.000	SI
NO ALGEBRA	19.23			NO ALGEBRA	30.71		

Para referirnos a los resultados obtenidos en los ítems algebraicos se les llamará Álgebra y al otro grupo No Álgebra. Se realizaron comparaciones con base a preguntas realizadas a los estudiantes evaluados, y además se generan algunas hipótesis en base a investigaciones realizadas con anterioridad.

Al hacer las comparaciones por género, se tiene que en general los hombres tienen mejor rendimiento; aunque las mujeres obtienen mejor rendimiento en álgebra a diferencia de los hombres quienes salen mejor en No Álgebra.

Quienes dijeron nunca haber repetido y los que repitieron una y dos veces obtienen mejor resultado en No Álgebra, pero quienes repitieron tres veces obtuvieron mejor promedio en Álgebra. Puede deberse a que quienes más han repetido es porque no pueden alienarse a los algoritmos enseñados por los maestros, y buscan otras estrategias para entender los procedimientos de solución matemática.

Si no le ayudan a estudiar tiene mejor rendimiento en No Álgebra; pero si le ayudan sus amigos, un maestro particular o alguien de su familia, entonces obtiene mejor resultado en Álgebra.

Si los padres hablan español, si él les habla en español y si sus padres saben leer o escribir, entonces el estudiante obtiene mejor resultado en Álgebra. Si en su casa viven su abuela, tíos o primos, obtiene mejor calificación en Álgebra. Si trabaja tiene mejor rendimiento en No Álgebra. Si cree que leer es aburrido obtiene mejor rendimiento en Álgebra. Si no le gusta ir a la escuela obtiene mejor calificación en Álgebra.

Si el estudiante cree que le fue regular o bien en la prueba que tomó, obtiene mejor resultado en Álgebra; pero si no sabe o cree que le fue mal tiene mejor nota en No Álgebra. Parece ser que si ellos creen que les fue bien en la prueba, tengan confianza en sus conocimientos y que realizan un análisis más profundo.

Quienes están estudiando en el sector privado obtiene mejor calificación en Álgebra. Solamente si están en jornada doble obtienen mejor resultado en Álgebra. Si están en el área urbana obtienen mejor resultado en Álgebra. Esto puede deberse a que en los tres casos pueden haber más recursos y tiempo, en donde puede traducirse en mayores oportunidades de aprendizaje.

Solo quienes obtienen el nivel de desempeño “Excelente” en Matemáticas tienen mejor nota en Álgebra. También se constató que sucede lo mismo con los que obtienen un nivel de desempeño “Excelente” en la prueba de Lectura.

Al realizar correlaciones, solamente si alguien le ayuda a estudiar y hacer las tareas, tiene mayor relación con la calificación de Álgebra que en la de No Álgebra.

Comparando los promedios de porcentaje de respuestas correctas de cada grupo y el del total de la prueba, se observa en la tabla 2 que los promedios son similares.

Tabla 2. Promedio de los grupos de ítems.

	NOTA_MATE	NOTA_ALGEBRA	NOTA_NO_ALGEBRA
Promedio	27.37	27.16	27.47
Desviación Estándar	10.63	14.96	11.23

Se observa mayor desviación estándar para el grupo de ítems algebraicos, con un menor promedio que el de la prueba total y el grupo de ítems no algebraicos, siendo esta diferencia muy pequeña.

Los promedios de porcentaje de respuestas correctas en los ítems algebraicos y no algebraicos son diferentes significativamente, siendo el promedio de los ítems algebraicos un poco menor al promedio de la nota total de la prueba.

En la tabla 3 se muestran las correlaciones entre la nota total de la prueba y los porcentajes de respuestas correctas de los ítems algebraicos y los no algebraicos.

Tabla 3. Correlaciones con la calificación de ítems algebraicos y no algebraicos

VARIABLE A RELACIONAR	NOTA_ALGEBRA			NOTA_NO_ALGEBRA		
	R	Sig.	Rel. Sign.	R	Sig.	Rel. Sign.
¿Cuántos años tienes?	-0.190	0.000	SI	-0.152	0.000	SI
¿Cuántos hermanos tienes?	-0.138	0.000	SI	-0.108	0.000	SI
¿Cuántas hermanas tienes?	-0.114	0.000	SI	-0.100	0.000	SI
¿Has repetido alguna vez sexto primaria?	-0.028	0.002	SI	-0.032	0.000	SI
¿Cuánto tiempo tardas en llegar de tu casa a la escuela?	0.051	0.000	SI	0.030	0.000	SI
¿Antes de entrar a primer grado fuiste a la escuela?	0.031	0.000	SI	0.038	0.000	SI
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? no nadie me ayuda	-0.058	0.000	SI	-0.044	0.000	SI
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí en la escuela	0.007	0.385	NO	0.024	0.004	SI
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí, mis amigos	0.028	0.001	SI	0.019	0.026	SI
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí, un maestro particular	0.038	0.000	SI	0.028	0.001	SI
¿Te ayuda a estudiar y hacer las tareas? Sí alguien de mi familia	0.112	0.000	SI	0.081	0.000	SI
Número de veces que repitió sexto primaria.	-0.014	0.112	NO	-0.028	0.001	SI
NOTA DE MATEMÁTICA	0.751	0.000	SI	0.916	0.000	SI
NOTA_ALGEBRA	1.000	0.000	SI	0.423	0.000	SI
NOTA_NO_ALGEBRA	0.423	0.000	SI	1.000	0.000	SI
NIVEL DE DESEMPEÑO MATEMATICAS	0.648	0.000	SI	0.776	0.000	SI
NIVEL DE DESEMPEÑO LECTURA	0.378	0.000	SI	0.364	0.000	SI
HABILIDAD MATEMATICAS	0.696	0.000	SI	0.830	0.000	SI
HABILIDAD LECTURA	0.397	0.000	SI	0.387	0.000	SI
TOTAL RESPUESTAS CORRECTAS LECTURA	0.668	0.000	SI	0.831	0.000	SI
TOTAL RESPUESTAS CORRECTAS MATEMATICAS	0.423	0.000	SI	0.408	0.000	SI

Al realizar correlaciones, solamente si alguien le ayuda a estudiar y hacer las tareas, tiene mayor relación con la calificación de Álgebra que en la de No Álgebra.

En las correlaciones de la nota total de la prueba con la algebraica y la no algebraica, se observa que es más alto el coeficiente de correlación de los ítems no algebraicos (0.916) que los algebraicos (0.751), siendo ambas positivas, altas y significativas. Esto rechaza la hipótesis de que la correlación de los ítems algebraicos es mayor a los no algebraicos.

Influencia en el resultado final de la prueba

Para determinar cual grupo de ítems tiene mayor influencia en los resultados de la prueba de Matemáticas, se obtuvo la ecuación de la recta de ajuste de regresión, por el método de mínimos cuadrados. Esta recta es la identidad de la nota total con sus dos componentes y no un modelo, aunque más adelante se mencione como tal. Es una identidad que muestra cual componente de la prueba tiene mayor influencia en los resultados finales (variable dependiente), comparando los coeficientes de las variables independientes que son los resultados de los ítems algebraicos y no algebraicos.

Al obtener la ecuación de la recta se obtiene el valor de R^2, el cual indica cuanto el modelo matemático puede explicar los resultados obtenidos en la prueba de Matemáticas. En la tabla 4 se puede observar el resumen del modelo de regresión creado con los dos grupos de ítems, el cual explica en 100% los resultados de la prueba de Matemáticas.

Tabla 4. Resumen del modelo de Matemáticas.

Modelo	R	R^2	Error típico de la estimación
Ambos grupos	1.000	1.000	.17851

Para saber si los resultados obtenidos son estadísticamente significativos, en la tabla 5 se puede ver que el valor de la significancia es 0.000 ($p<.01$), lo cual implica que la información obtenida es lo suficientemente confiable en el modelo construido. Como las variables independientes son parte de la misma calificación de la prueba en total, es lógico tener que el conjunto de variables utilizadas en el modelo expliquen el 100% de los resultados obtenidos en Matemáticas.

Tabla 5. ANOVA para Matemáticas.

	Suma de cuadrados	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Regresión	25253024.442	2	12626512.221	396258540.484	.000
Residual	7122.601	223529	.032		
Total	25260147.043	223531			

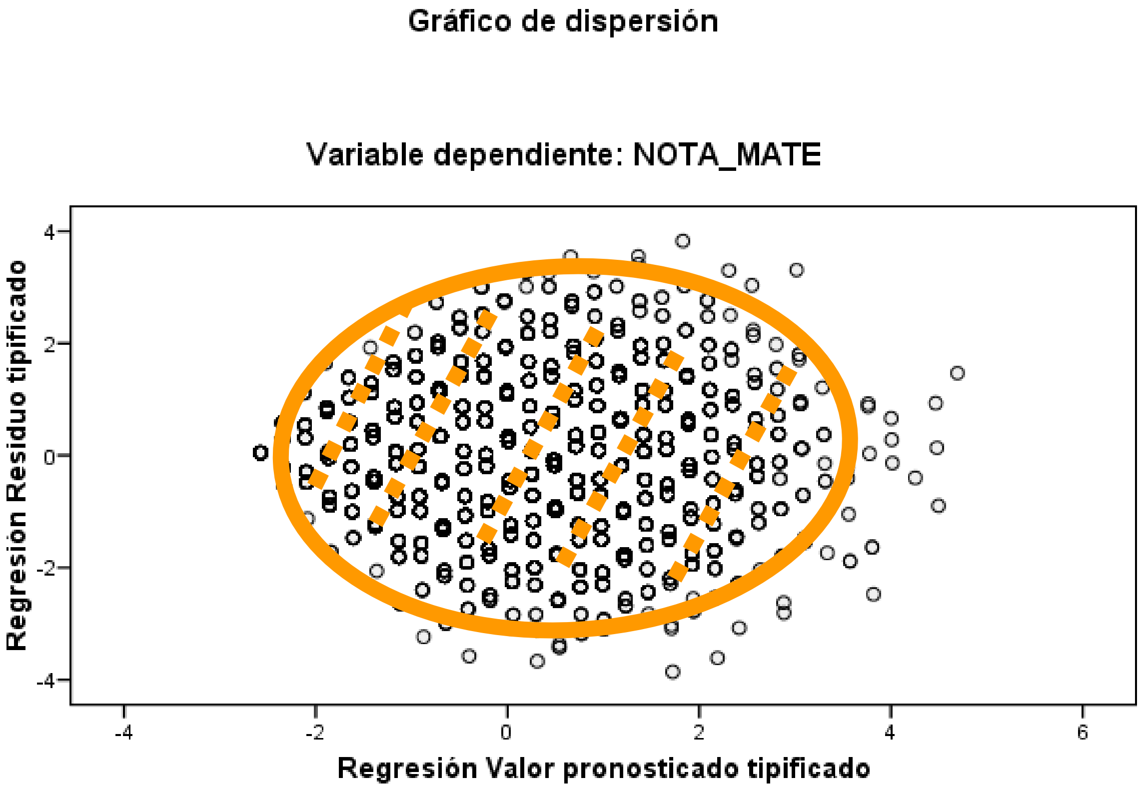
El hecho de que la significancia sea menor a 0.05, indica que existe relación lineal significativa entre la variable dependiente y el conjunto de variables predictoras utilizadas. Por lo tanto, se procede a verificar si el modelo de Matemáticas cumple con los supuestos para que pueda ser utilizado e interpretado adecuadamente.

Supuestos de Regresión Múltiple

- ***Linealidad***

El supuesto de linealidad se puede comprobar dibujando una elipse imaginaria sobre la nube de puntos de la gráfica de residuos (ver figura 1), si la elipse dibujada abarca casi la totalidad de los datos, o si es posible observar cierta tendencia en la nube de puntos, entonces se puede deducir que existe linealidad. Con el empleo de una elipse imaginaria conteniendo la totalidad de datos no es posible comprobar el supuesto de linealidad pero se asume que hay tendencia lineal.

Figura 1. Comprobación del supuesto de linealidad y homogeneidad de varianzas para el modelo de Matemáticas.



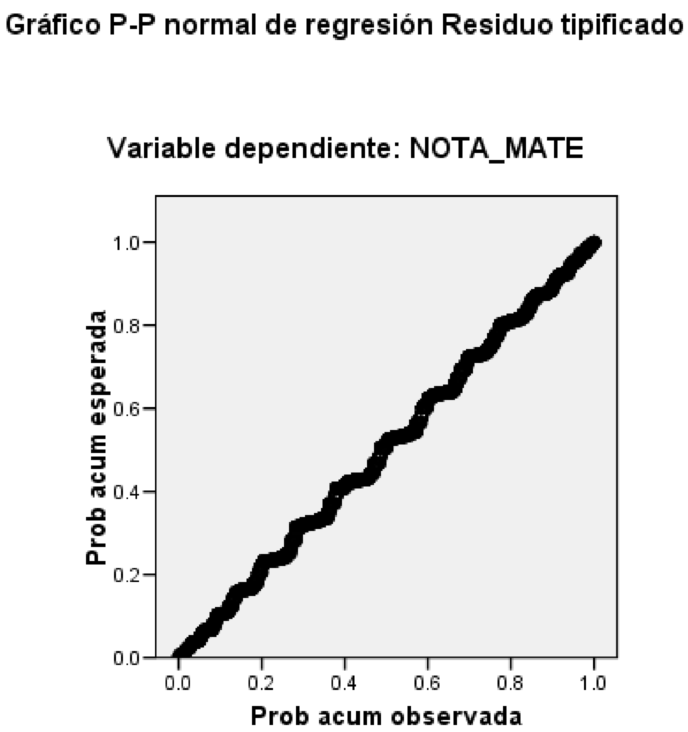
❖ *Homogeneidad de varianzas*

Respecto a la homogeneidad de varianzas, para cada valor de la variable independiente (o combinación de las variables independientes), la varianza de los residuos es constante. El supuesto de homogeneidad de varianzas se puede comprobar con el empleo de la figura 1, en la cual el uso de las cinco líneas rectas, también imaginarias, se asume que la varianza permanece constante a lo largo de la distribución, por lo que hay homogeneidad.

❖ *Normalidad*

En la gráfica de probabilidad normal de la figura 2 se puede observar que en el eje horizontal está representada la probabilidad acumulada que corresponde a cada residuo tipificado; y en el eje vertical se representa la probabilidad acumulada teórica que corresponde a cada puntuación típica en una curva normal con media igual a cero y desviación típica uno. Visualmente, se asume que el modelo cumple con el supuesto de normalidad porque la cantidad de variables analizadas forman una curva que aproximadamente se alinea sobre la diagonal bajo ellos. Debido a la gran cantidad de datos, se observa una línea gruesa en vez de puntos.

Figura 2. Gráfica de probabilidad normal de los residuos para el modelo de Matemáticas.



❖ ***Supuesto de no outliers***

El análisis se realizó en función del valor dado por la distancia de Cook y los valores de influencia de Leverage. Si el valor de la distancia de Cook es mayor a 1, se tienen posibles outliers, lo que sería motivo de revisión; si es menor que 1, no es necesario preocuparse. En la tabla 6 se observa que el valor máximo correspondiente a la distancia de Cook es menor a 1, por lo que se asume que no existen problemas de potenciales outliers.

Tabla 6. Estadísticos sobre los residuos.

	Mínimo	Máximo	Media	Desviación típ.	N
Valor pronosticado	-.0086	77.2378	27.3747	10.62889	223532
Valor pronosticado tip.	-2.576	4.691	.000	1.000	223532
Error típico del valor pronosticado	.000	.002	.001	.000	223532
Valor pronosticado corregido	-.0086	77.2377	27.3747	10.62889	223532
Residuo bruto	-.68892	.68263	.00000	.17851	223532
Residuo tip.	-3.859	3.824	.000	1.000	223532
Residuo estud.	-3.860	3.824	.000	1.000	223532
Residuo eliminado	-.68897	.68269	.00000	.17851	223532
Residuo eliminado estud.	-3.860	3.824	.000	1.000	223532
Dist. de Mahalanobis	.051	23.516	2.000	1.983	223532
Distancia de Cook	.000	.000	.000	.000	223532
Valor de influencia centrado	.000	.000	.000	.000	223532

Los valores de influencia pueden ser observados calculando el valor de máxima influencia y comparándolos con los valores de Leverage. La ecuación para encontrar este valor es la siguiente: 3(p+1)/N; donde p es el número de predictores, y N el tamaño de la muestra. Si el valor de influencia de Leverage es mayor al valor calculado, entonces se tienen posibles outliers.

Aplicando la fórmula para el modelo creado, se obtiene el siguiente valor:

$$3(14+1)/22070 = 0.00204$$

Al observar la columna de los valores de influencia de Leverage que fueron solicitados al hacer el análisis de regresión; en la base de datos se observa que los casos mayores a 0.00204 son el 0.08% de los datos, siendo una cantidad muy baja, por lo que se decide que su influencia es despreciable en el modelo y los datos no son excluidos.

Por otro lado, según algunos estadísticos indican que por regla general para orientar las decisiones, los valores de influencia centrados menores que 0.2 se consideran poco problemáticos, los valores comprendidos entre 0.2 y 0.5 se consideran arriesgados, y los valores mayores que 0.5 deberían evitarse. En este caso, el máximo valor de influencia centrado es 0.02, siendo éste inferior a 0.2 por lo que se asume que no hay problemas de potenciales outliers y se mantienen los datos originales.

- ***Supuesto de no colinealidad***

Para realizar el diagnóstico de colinealidad, se emplea la matriz de coeficientes, habiendo realizado correlaciones anteriormente. Existe colinealidad parcial o simplemente colinealidad cuando entre las variables independientes de una ecuación hay correlaciones altas. La colinelidad es un problema porque en el caso de colinealidad perfecta, no es posible estimar los coeficientes de la ecuación de regresión; y en el caso de colinealidad parcial, aumenta el tamaño de los residuos tipificados, lo cual produce coeficientes de regresión muy inestables (pequeños cambios en los datos producen cambios muy grandes en los coeficientes de regresión).

En términos técnicos la colinealidad se detecta en función de los Factores de Inflación de la Varianza (FIV), que son los inversos de la tolerancia. Cuanto mayor es el FIV de una variable, mayor es la varianza del correspondiente coeficiente de regresión.

Existen problemas y causa de preocupación cuando el FIV es mayor que 10 o si el FIV promedio es mayor que 1, la regresión puede estar prejuiciada. Esto implica, que en función del valor de la tolerancia, hay problemas serios de colinealidad cuando la tolerancia es menor que 0.1, y valores de tolerancia menores que 0.2 indican problemas potenciales.

Todas las variables utilizadas en el modelo tienen un FIV menor a 10 y los valores de tolerancia no bajan de 0.3, por lo que se asume que no hay efectos serios de colinealidad (ver tabla 7).

El modelo de regresión para Matemáticas

Tomando los coeficientes correspondientes a cada variable, de la matriz de coeficientes de la tabla 7, habiendo confirmando la adecuación y cumplido con todos los supuestos de regresión, se crea la ecuación que representa el modelo de regresión lineal múltiple con los factores asociados que son significativos en el modelo, para conocer sus efectos relativos en el rendimiento de Matemáticas de los estudiantes de sexto grado de nivel primaria.

Tabla 7. Coeficientes de regresión para la prueba de Matemáticas.

Coeficientes[a]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.	Estadísticos de colinealidad	
		B	Error típ.	Beta			Tolerancia	FIV
1	(Constante)	-.009	.001		-8.225	.000		
	NOTA_NO_ALGEBRA	.688	.000	.726	18415.218	.000	.811	1.234
	NOTA_ALGEBRA	.313	.000	.440	11159.282	.000	.811	1.234

a. Variable dependiente: NOTA_MATE

El modelo de regresión múltiple para Matemáticas, colocando los coeficientes en orden de mayor a menor, queda como sigue:

$$Y_{NOTA\_MATE} = -\ 0.009 + 0.688\ X_{NO\_ÁLGEBRA} + 0.313\ X_{ÁLGEBRA}$$

La ecuación anterior representa los resultados de la prueba de Matemáticas y sus dos partes que la componen, se puede ver que los factores fueron significativos ($p<.05$). Se interpreta el coeficiente de cada grupo de ítems, indicando el porcentaje en que es capaz de influir en la nota final de la prueba de Matemáticas, asumiendo que el resto de variables permanecen constantes.

En la ecuación se puede ver que al hacer cero la influencia de los factores, se tiene en promedio en el rendimiento de 0.9% en Matemáticas, esto puede deberse a la falta de algunos datos en uno de los grupos.

El factor más influyente en el rendimiento de los estudiantes de sexto primaria es el rendimiento en los ítems no algebraicos. El porcentaje de respuestas correctas de la prueba aumenta en 0.688 por cada punto porcentual de los ítems correctos que no son algebraicos. Mientras que el porcentaje de respuestas correctas de la prueba aumenta en 0.313 por cada punto porcentual de los ítems correctos que son algebraicos.

En otras palabras, el factor que conforma el porcentaje de respuestas correctas de los ítems algebraicos conforma el 31.3% de la nota total de la prueba de Matemáticas, pero el de no algebraicos es el 68.8%.

Procedimiento *Backward*

Para comprobar diferencias de influencia entre grupos se fueron reduciendo los factores incluidos en el modelo (procedimiento backward), en el cual se obtendrá un modelo de regresión lineal simple para determinar cuánto explica el modelo de cada variable independiente, asumiendo que la influencia del otro grupo de ítems se hace cero.

Tomando en cuenta solo los ítems algebraicos, se obtiene modelo de regresión con los datos de la tabla 5, mostrando una influencia del 57.2% de los resultados obtenidos en la prueba total de Matemáticas de sexto primaria en el año 2007.

Tabla 8. Coeficientes de regresión parcial para los ítems algebraicos.

Coeficientes[a]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.	Estadísticos de colinealidad	
		B	Error típ.	Beta			Tolerancia	FIV
1	(Constante)	12.784	.030		419.377	.000		
	NOTA_ALGEBRA	.537	.001	.756	546.496	.000	1.000	1.000

a. Variable dependiente: NOTA_MATE

La ecuación incluyendo únicamente la nota de los ítems algebraicos es:

$$Y_{NOTA\_MATE} = 12.784 + 0.537\ X_{ÁLGEBRA}$$

Luego se toman en cuenta solo los ítems no algebraicos, se obtiene una ecuación lineal con los datos mostrado en la tabla 9, en donde se puede observar que la influencia es del 84.3% en los resultados obtenidos en la prueba total de Matemáticas de sexto primaria en el año 2007.

Tabla 9. Coeficientes de regresión parcial para los ítems no algebraicos.

Coeficientes[a]

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.	Estadísticos de colinealidad	
		B	Error típ.	Beta			Tolerancia	FIV
1	(Constante)	3.503	.024		148.620	.000		
	NOTA_NO_ALGEBRA	.869	.001	.918	1094.023	.000	1.000	1.000

a. Variable dependiente: NOTA_MATE

La ecuación incluyendo únicamente la nota de los ítems no algebraicos es:

$$Y_{NOTA\_MATE} = 3.503 + 0.869\ X_{NO\_ÁLGEBRA}$$

En los modelos de regresión lineal simple se observa que utilizando un grupo y suponiendo que es cero la influencia del otro, se tiene que es mayor la explicación del grupo de ítems no algebraicos, lo que comprueba los resultados en la ecuación con ambas variables independientes.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

El factor más influyente en los resultados de la prueba de Matemáticas es el grupo de los ítems no algebraicos, esto demuestra que es necesario darle más énfasis a que los estudiantes puedan obtener mejor rendimiento en la prueba y una estrategia podría ser enseñar procedimientos algebraicos que los estudiantes puedan entender en ese nivel de estudios; de manera que sean los ítems algebraicos los que expliquen mejor los resultados de la prueba y que obtengan mejor rendimiento en ellos.

En el estudio se demuestra la importancia de generar el pensamiento algebraico en los estudiantes de nivel primario, para eliminar la mecanización y la memorización sin sentido, y para que sean capaces de entender el proceso de aprendizaje en el que están inmersos.

El álgebra es la continuación lógica de las Matemáticas y se basa en abstracción de conceptos. En el nivel primario le proporcionará al estudiante la capacidad de generalizar y utilizar símbolos para representar valores, introduciéndolo al concepto de variables.

El uso de conceptos algebraicos en el nivel primario, se basa en enseñar contenidos de álgebra que los estudiantes de esa edad pueden comprender, y que aprendan las propiedades de las operaciones básicas que utilizan, tales como la suma, resta, multiplicación y división.

Existen varias leyes o reglas básicas que rigen las operaciones algebraicas. El estudiante debe manejarse correctamente sin el uso consciente de dichas reglas, pues su cerebro debe ser adiestrado por ellas a través de su aprendizaje matemático previo. Necesita conocerlas porque debería estar en condiciones para justificar cada una de sus operaciones, y necesita saber cuándo se está utilizando una regla determinada.

Los desacuerdos de introducir el álgebra en el nivel primario han surgido por no conocer las delimitaciones claras de su aplicación, por tal razón, se debe tener cuidado de la forma en que se le enseñará al niño, ya que no se puede elevar mucho el nivel de abstracción, sino que se deben enseñar contenidos acorde a su nivel, ya de lo contrario sería contraproducente.

El pensamiento algebraico es organizado en dos grandes componentes, las herramientas del desarrollo del pensamiento algebraico, que son hábitos analíticos de la mente, especialmente en destrezas de solución de problemas, y destrezas de representación; y las ideas fundamentales de álgebra que representan un dominio, en el cual las herramientas del pensamiento algebraico pueden desarrollarse.

Para lógralo se necesita que el maestro sea motivador, investigador, reflexivo y que promueva el análisis en los estudiantes; que realice tareas atractivas y fáciles de entender, con contenidos fundamentales y que el desafío permita recuperar los procesos de pensamiento utilizados por el estudiante.

Es importante que se proporcionen las oportunidades de aprendizaje necesarias para este proceso, ya que el maestro necesita tener los recursos para enseñar, convirtiéndose también en la oportunidad del estudiante para aprender.

El proceso de desarrollar el pensamiento algebraico podría ayudar a que el estudiante obtenga un nivel de metacognición y autoeficacia, de manera que logre la calidad deseada en su aprendizaje.

Se debe trabajar por el mejoramiento de la calidad educativa de las Matemáticas, para elevar el rendimiento de los estudiantes, bajar la tasa de deserción y elevar la matricula de los estudiantes en niveles superiores. El desarrollo de pensamiento algebraico en el nivel primario puede ayudar a mejorar la calidad de la educación en Matemáticas, y contribuirá a un mejor futuro profesional.

El presente estudio da las pautas para realizar un estudio independiente, en el cual se especialice los ítems para que sean resueltos con procedimientos rigurosamente algebraicos, y en otro grupo en el que no se utilicen, de manera que se corroboren estos resultados. En este caso se tomaron las pruebas nacionales como un preliminar y establecer hipótesis a probar con estudios posteriores.

Una hipótesis que se genera, es comprobar si los estudiantes utilizan procedimientos algebraicos que no les han sido enseñados para resolver los problemas matemáticos, puede ser que no estén consientes de ello, en donde se valen de razonamiento y lógica para resolverlos. Es aquí cuando dejan a atrás los algoritmos enseñados en el salón de clase, y comienzan a tener un pensamiento matemático, que al final debería ser de sentido común en las Matemáticas.

Al relacionar las calificaciones de los grupos de ítems se tiene que la edad, la cantidad de hermanos o hermanas, si nadie le ayuda en las tareas y si ha repetido el grado, se relaciona negativamente; pero un factor externo que se relaciona de forma positiva es si alguien de su familia le ayuda a estudiar y hacer tareas, esto es para cualquier grupo de ítems.

Si se tiene que el factor más influyente en los resultados de la prueba de Matemáticas es el grupo de los ítems no algebraicos, demuestra que no se le ha dado relevancia a la utilización de procedimientos algebraicos. En vista que los rendimientos de las pruebas nacionales son bajos, podría utilizarse como estrategia enseñar procedimientos algebraicos que los estudiantes puedan entender en el nivel primario; de manera que sean los ítems algebraicos los que expliquen mejor los resultados de la prueba y que mejore el rendimiento.

El uso de conceptos algebraicos en el nivel primario, se basa en enseñar en los contenidos del CNB, puntos focales de álgebra que los estudiantes de esa edad pueden comprender, de manera que utilicen las propiedades de las operaciones básicas que ya conocen, tales como la suma, resta, multiplicación y división.

BIBLIOGRAFÍA

Aguirre-Muñoz, Zenaida (2008). Catedrática asociada a Texas Tech University, U.S.A, y consultora para la Oficina de Educación del Condado de Los Ángeles California. 15 de mayo de 2008. Comunicación Personal.

Cajas, F. (2007). Elementos para un plan estratégico de evaluación e investigación educativa: 2008-2021. Programa estándares e investigación educativa/USAID.

Carraher, D. y Schliemann, A. (2007). Early Algebra and Algebraic Reasoning. En Lester, F. Jr. (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 669-705). Estados Unidos de América: Information Age Publishing.

Cervini, R. (2001). *Efecto de la "Oportunidad de aprender" sobre el logro en Matemáticas en la educación básica argentina.* Argentina. Revista Electrónica de Investigación Educativa, septiembre 2001, Vol. 3, Núm. 2, pp. 1-22. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

DICADE (2007). Currículo Nacional Base, Sexto Grado, Nivel Primario. Primera Edición. MINEDUC. Guatemala.

DICADE (2006). Currículum Nacional Base para la formación inicial de docentes de nivel primario. Primera edición. MINEDUC. Guatemala.

Distrito escolar 1J de Portland (5to.). Distrito escolar 1J de Portland, Portland Oregon, Boleta de calificaciones de Primaria. Consultado en 02/05/08 en http://cms7.pps.k12.or.us/.docs/pg/400/rid/10441/f/SpanishGrade05.pdf.

Estándares Educativos para Guatemala (2007), MINEDUC, Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID.

Foundations for Success (2008). The final report of the National Mathematics Advisory Panel. U.S. Department of Education. Consultado en www.ed.gov/pubs/edpubs.html

Howe R. (2005). Comments on NAEP algebra problems [Electronic version]. Algebraic reasoning: Developmental, cognitive, and Disciplinary Foundations for Instruction. Retrieved Feb. 1, 2006 from http://www.brookings.edu/gs/brown/algebraicreasoning.html, (tomado de Carraher, D. y Schliemann, A., 2007, pág. 669).

Kriegler, Shelley (2000). Just WHAT IS ALGEBRAIC THINKING? Departamento de Matemáticas, UCLA. Tomado de: http://www.math.ucla.edu/~kriegler/index.html

Lesh, R. y Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling. National Council of Teachers of Mathematics. United States.

Martin, E. Jr. (1972). Álgebra básica. Argentina: El Ateneo.

Marzano, R. (2000). Designing a new taxonomy of educational objectives. Thousand Oaks, CA: Corwin Press.

Molina, M. (2004). Resolución de igualdades numéricas por estudiantes de tercer grado. Un estudio sobre la comprensión del signo igual y el desarrollo del pensamiento relacional. Departamento de didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+matematica&i=101

Mullis, I. Martin, M. y Foy, P. (2005). IEA's TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains. ENSEÑANZA E INVESTIGACIÓN EN PSICOLOGÍA VOL. 12, NUM. 2: 259-275. Consultado en julio y diciembre de 2007.

NCTM Tomado de: http://www.researchmethodsarena.com/books/Algebra-in-the-Early-Grades-isbn9780805854732

Otero, M. y Banks-Leite, L. (2006). Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media. Argentina. Relime Vol. 9, Núm. 1, marzo, 2006, pp. 151-178.

Peter, H. (1978). Álgebra elemental. México D. F.: Limusa S. A.

Programa Estándares e Investigación Educativa/USAID (2007). *Logros en temas de eficiencia, equidad y calidad educativa*

Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* En D. Grouws (Ed.), Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sepúlveda, A. y Santos, L. (2006). Desarrollo de episodios de comprensión matemática, estudiantes de bachillerato en procesos de resolución de problemas. México. Revista Mexicana de Investigación Educativa, octubre-diciembre 2006. Vol. 11. Núm. 31, pp. 1389-1422.

Swokowski, E. y Cole, J. (2006). Álgebra y trigonometría con geometría analítica, 11a. edición. México: International Thomson.

Terán, M. y Pachano, L. (2005). La investigación-acción en el aula: tendencias y propuestas para la enseñanza de la Matemática en sexto grado. EDUCERE, Artículos arbitrados, abril-junio 2005, Año 9, Núm. 29, pp. 171-179. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigacion+ matematica&i=101

Uicab, R. y Oktac, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. Relime, noviembre 2006, Vol. 9, Núm. 3, pp. 459-490. Consultado en: http://dialnet.unirioja.es/servlet/busquedadoc?t=estudio+investigación+matematica&i=101

William, D. (2007). Keeping Learning on Track: Classroom Assessment and the Regulation of Learning. En Lester, F. Jr. (ed.), Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. National Council of Teachers of Mathematics. (pp. 1051-1098). E. U. A. Information Age Publishing.