GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

DIGECADE
Dirección General de Gestión de Calidad Educativa

Guía para el docente
Matemática
Tercer Grado
Nivel de Educación Media, Ciclo Básico

¡Aquí se encuentran los materiales digitales
e información general!

www.mineduc.gob.gt/DIGECADE/Guatematica.asp

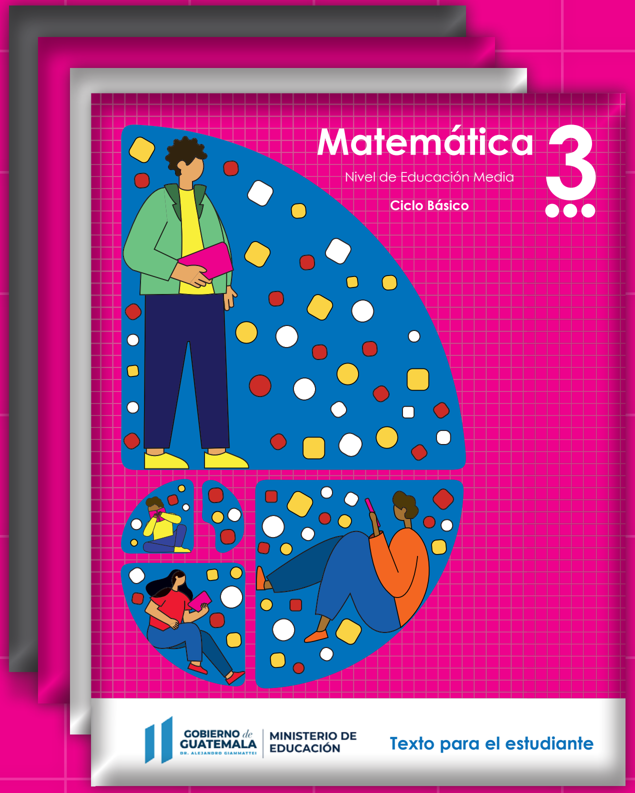
JICA
Agencia de Cooperación
Internacional del Japón

Ciclo Básico
GUATEMÁTICA

3

Guía para el docente Matemática / Nivel de Educación Media, Ciclo Básico

Guía para el docente Matemática



3 Grado

Nivel de Educación Media
Ciclo Básico

GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

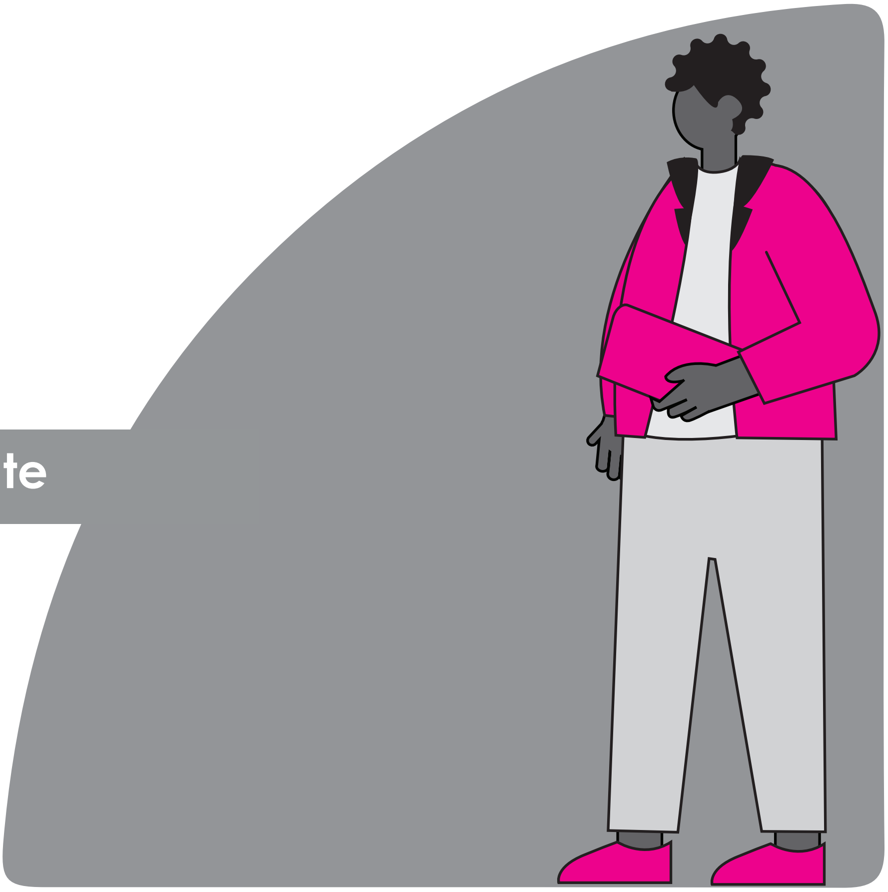
GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Matemática 3

Nivel de Educación Media

Ciclo Básico



Guía para el docente

GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Claudia Patricia Ruíz Casasola de Estrada
Ministra de Educación

Lilian Dinora Pérez López
Viceministra Técnica de Educación

María del Rosario Balcarcel Minchez
Viceministra Administrativa de Educación

Carmelina Espantzay Serech de Rodríguez
Viceministra de Educación Bilingüe e Intercultural

Edna Portales de Núñez
Viceministra de Educación Extraescolar y Alternativa

Cooperación Técnica de Japón a través de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA)

Ministerio de Educación de Guatemala (Mineduc)
6a calle 1-87, zona 10,01010
Teléfono: (502) 2411-9595
www.mineduc.gob.gt / www.mineduc.edu.gt

Segunda edición, 2023

GOBIERNO de GUATEMALA
DR. ALEJANDRO GIAMMATTEI
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Estimado docente:

Esta Guía para Docentes es una herramienta pedagógica que contribuirá al fortalecimiento de su trabajo en el aula para el desarrollo de competencias matemáticas en los estudiantes, a través de pensar e intentar resolver problemas por sí mismos. Es producto del esfuerzo del Ministerio de Educación y la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media de la Universidad de San Carlos de Guatemala con el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón, en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Calidad de Educación Matemática del Ciclo Básico.

El material ofrece orientaciones para la realización de actividades de aprendizaje que permitan el desarrollo del pensamiento lógico y capacidades para la toma de decisiones en los estudiantes. Se espera que, las sugerencias que brinda esta guía sean aplicadas en el aula, y a partir de ellas se logren mejores niveles de aprendizaje.

La mejora de los aprendizajes en el área de matemática de los estudiantes del Ciclo de Educación Básica, permitirá formar ciudadanos críticos, creativos, comunicativos y con altas capacidades de razonamiento lógico; pero, sobre todo, que utilicen esas destrezas y habilidades para resolver problemas de su entorno.

Su mejor esfuerzo es la clave para que, juntos avancemos hacia el mejoramiento de los aprendizajes de la matemática y nos permita tener ciudadanos con mayores competencias para insertarse en el mundo de la ciencia, tecnología, las artes y la ingeniería.

Ministerio de Educación

Índice

Presentación

Introducción

La Guía para el docente es una herramienta pedagógica que contribuirá al fortalecimiento de la labor docente en el aula, para el desarrollo de competencias matemáticas de los estudiantes. Fue elaborada en el marco del Proyecto de Mejoramiento de la Calidad de Educación Matemática del Ciclo Básico, ejecutado por el Ministerio de Educación, la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (Efpem) de la Universidad de San Carlos de Guatemala y el apoyo técnico de la Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA).

Los propósitos de esta guía son:

- Ofrecer orientaciones acerca del aprendizaje esperado y la resolución de los ejercicios de cada clase.
- Brindar sugerencias para el uso estructurado del pizarrón que permitan alcanzar los aprendizajes esperados.
- Desarrollar clases utilizando el Texto para el estudiante que minimicen los errores conceptuales en la enseñanza de la Matemática.

La Guía para el docente se diseñó con base en los resultados del análisis de observaciones de clases que se realizaron en algunos Institutos Nacionales de Educación Básica. Para lograr aprendizajes significativos es necesario considerar los siguientes elementos:

- Comprensión del aprendizaje esperado en cada clase
- Uso efectivo del pizarrón como un recurso de interacción entre estudiantes y docente
- Verificación del logro del aprendizaje esperado
- Secuencia del aprendizaje, con base en los contenidos y su gradación

El Ministerio de Educación pone a disposición de los docentes este recurso que permitirá fortalecer la práctica en el aula para el logro de aprendizajes significativos de los estudiantes. Para su utilización, es necesario considerar algunos aspectos esenciales que constituyen los principales puntos de partida del proceso, como se presentan a continuación.

1. Importancia del aprendizaje de la Matemática: el aprendizaje del área de Matemática es imprescindible durante el proceso de formación de los estudiantes en los diferentes niveles de educación del sistema educativo nacional. El aprendizaje del área está vinculado con el desarrollo del razonamiento matemático y propicia a los estudiantes las competencias para resolver problemas cotidianos, analizar situaciones de su entorno, así como busca que los estudiantes sean creativos, críticos y comunicativos. La Matemática se constituye en el lenguaje para la interpretación y cuantificación de los fenómenos del entorno y para lograr la modelación que permita simplificar la solución de problemas.

2. Rol del docente y del estudiante en el proceso de aprendizaje: en el marco del nuevo paradigma educativo que impulsa el Currículum Nacional Base (CNB) del ciclo de Educación Básica, los actores que interactúan en el proceso educativo asumen roles diferenciados para el logro de aprendizajes significativos. El estudiante constituye el centro del proceso, sujeto y agente activo de su propia formación. El rol del docente está encaminado a desarrollar los procesos más elevados del razonamiento y a orientar la interiorización de valores que permitan una convivencia armoniosa en una sociedad pluricultural. El protagonismo del estudiante se evidencia en el proceso activo para el logro de los aprendizajes esperados de cada clase y que estos se movilicen para la apropiación de nuevos conocimientos y su posible uso en la resolución de problemas de su entorno.

3. Secuencia y estructura de clase con enfoque de resolución de problema: para lograr que los estudiantes se conviertan en agentes activos de su propia formación, se requiere que las clases se realicen con una secuencia adecuada establecida en cuatro momentos:

   Problema de la clase: este momento permite que los estudiantes piensen e intenten resolver el problema por sí mismos, tomando en cuenta lo aprendido en clases anteriores.

   Solución: presenta paso a paso el proceso de solución del problema de la clase.

   Conclusión: presenta la idea principal de la clase a través de una definición o un procedimiento.

   Ejercicios: para reforzar lo aprendido, entre ellos se plantea el ítem de evaluación que servirá para verificar si se ha logrado el aprendizaje esperado. El ítem de evaluación se señala en la página reducida del Texto para el estudiante en la Guía para el docente.

4. Gestión escolar: para el uso efectivo del material se requiere generar un ambiente propicio para el desarrollo de los aprendizajes y que esté profundamente relacionado con la gestión escolar en la institución educativa. Uno de los elementos primordiales es la cantidad de periodos de clases efectivas a desarrollar durante el ciclo escolar. Los materiales están diseñados para cubrir los contenidos prescritos en el CNB. La tarea de los involucrados es garantizar el desarrollo de la cantidad de clases establecidas, como condición para que los estudiantes adquieran las competencias del área de Matemática.

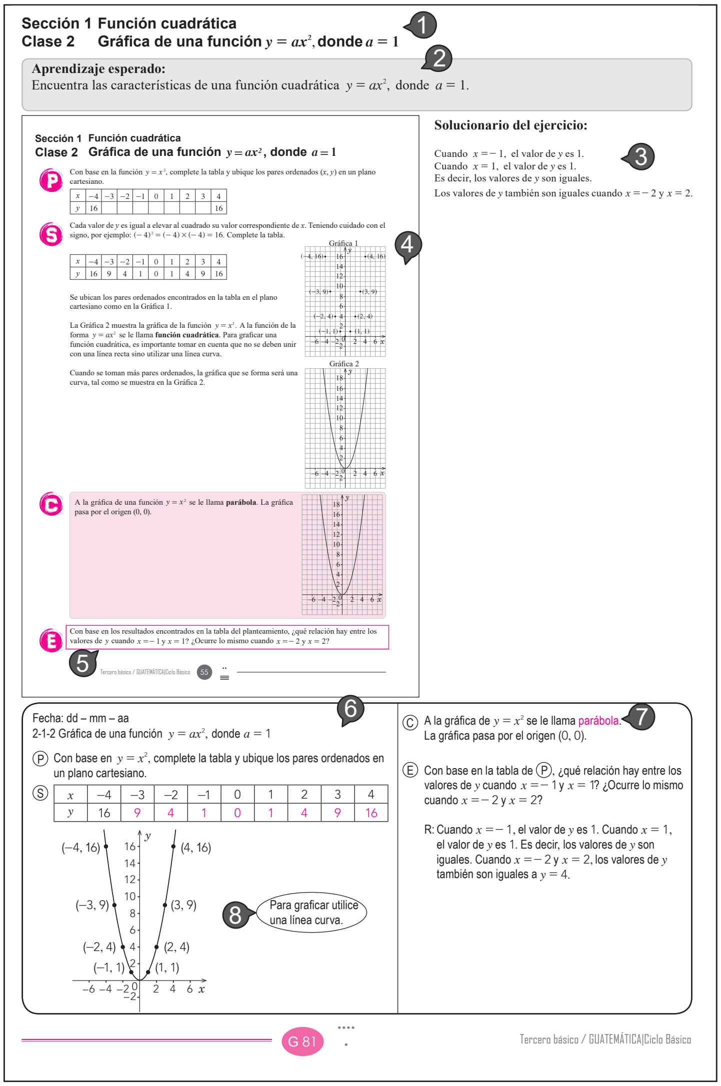
5. Fortalecimiento de los aprendizajes en el hogar: la consolidación de los aprendizajes no se circunscribe únicamente en el periodo de clase, sino que se complementa con el tiempo de estudio que los estudiantes realizan en sus hogares. Por lo que es necesario asignar como tarea en casa los ejercicios que no son resueltos en cada sesión de aprendizaje.

Lineamientos de edición y estructura de la Guía para el docente

- ✓ Lineamientos de edición: los docentes pueden desarrollar clases utilizando el Texto para el estudiante sin errores conceptuales matemáticos, que sea fácil de entender y práctico para brindar la orientación en el aula.

- ✓ Estructura global: la Guía para el docente contiene páginas iniciales que explican lo relacionado a los lineamientos de elaboración de los materiales y programación del desarrollo de los contenidos de aprendizaje. La Guía para el docente se divide en unidades acordes a las unidades establecidas en el Texto para el estudiante; al inicio de cada unidad se presenta la planificación de la unidad correspondiente.

- ✓ Estructura de página de clase: cada sesión de clase que se desarrolla en la Guía para el docente presenta los siguientes elementos:



Sección 1 Función cuadrática
Clase 2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$

Aprendizaje esperado:
Encuentra las características de una función cuadrática $y = ax^2$, donde $a = 1$.

Sección 1 Función cuadrática
Clase 2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$

P Con base en la función $y = x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados (x, y) en un plano cartesiano.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16								16

S Cada valor de y es igual a elevar al cuadrado su valor correspondiente de x. Teniendo cuidado con el signo, por ejemplo: $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$. Complete la tabla.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Se ubican los pares ordenados encontrados en la tabla en el plano cartesiano como en la Gráfica 1.

La Gráfica 2 muestra la gráfica de la función $y = x^2$. A la función de la forma $y = ax^2$ se le llama **función cuadrática**. Para graficar una función cuadrática, es importante tomar en cuenta que no se deben unir con una línea recta sino utilizar una línea curva.

Cuando se toman más pares ordenados, la gráfica que se forma será una curva, tal como se muestra en la Gráfica 2.

Gráfica 1

Gráfica 2

C A la gráfica de una función $y = x^2$ se le llama **parábola**. La gráfica pasa por el origen (0, 0).

E Con base en los resultados encontrados en la tabla del planteamiento, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Ocurre lo mismo cuando $x = -2$ y $x = 2$?

Solucionario del ejercicio:

Cuando $x = -1$, el valor de y es 1.
Cuando $x = 1$, el valor de y es 1.
Es decir, los valores de y son iguales.
Los valores de y también son iguales cuando $x = -2$ y $x = 2$.

Fecha: dd – mm – aa
2-1-2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$

Ⓟ Con base en $y = x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados en un plano cartesiano.

Ⓢ

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Ⓒ A la gráfica de $y = x^2$ se le llama parábola. La gráfica pasa por el origen (0, 0).

Ⓔ Con base en la tabla de Ⓟ, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Ocurre lo mismo cuando $x = -2$ y $x = 2$?

R: Cuando $x = -1$, el valor de y es 1. Cuando $x = 1$, el valor de y es 1. Es decir, los valores de y son iguales. Cuando $x = -2$ y $x = 2$, los valores de y también son iguales a $y = 4$.

① Identificación de la clase:
Se escribe el número y título de sección y de clase.

② Aprendizaje esperado:
Indica el alcance que se espera que tengan los estudiantes al finalizar el periodo de clase.

③ Solucionario de los ejercicios:
Tiene como propósito apoyar al docente en la verificación de la solución de los ejercicios E.

④ Página de texto:
Tiene como propósito ubicar y relacionar el contenido de aprendizaje de la clase.

⑤ Identificación del ítem de evaluación:
Se resalta el ítem de evaluación que se encuentra en los ejercicios de la clase. Su función es verificar si se ha logrado el aprendizaje esperado.

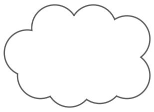
⑥ Ejemplo de uso del pizarrón:
Es una propuesta que puede ser contextualizada dependiendo de las características de los estudiantes y experiencia del docente, mientras que se mantenga la secuencia del aprendizaje y el uso correcto del espacio del pizarrón. Se presenta de manera ordenada los cuatro momentos de la clase: problema, solución, conclusión y ejercicios (ítem de evaluación).

Existen algunas clases en las que el plan de pizarrón no contiene dichos cuatro momentos; sin embargo, la clase deberá desarrollarse con base en el Texto para el estudiante. No se incluyen todos los momentos ya que se seleccionó lo más relevante y así facilitar el aprendizaje de los estudiantes.

⑦ Uso del color magenta en el pizarrón:

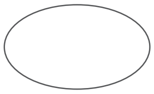
- Escritura importante del Texto para el estudiante
- Respuesta o escritura adicional en los diagramas
- Información complementaria para la explicación de los contenidos

⑧ Uso de las figuras que simplifican los íconos en el plan de pizarrón:



La nube representa la mano que se encuentra en el Texto para el estudiante, es decir, un recordatorio de los conceptos aprendidos previamente.

El rectángulo con esquinas redondeadas representa el Quetzal que se encuentra en el Texto para el estudiante, es decir, los conceptos nuevos e importantes para comprender el tema de la clase.



El óvalo representa las partes del texto que se deben resaltar, pero que en el Texto para el estudiante no corresponden ni a la mano ni al Quetzal.

Lineamientos de edición y estructura del Texto para el estudiante

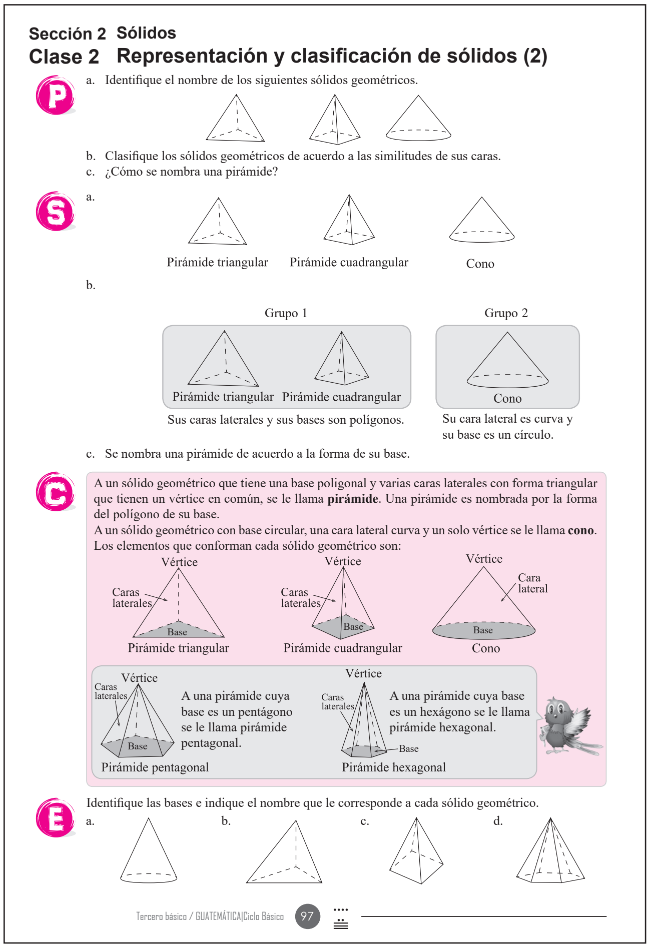
✓ Lineamientos de edición: para el diseño y elaboración del Texto para el estudiante se consideraron los siguientes aspectos: organización de los contenidos de acuerdo al CNB, priorización del desarrollo de las capacidades de los estudiantes, énfasis en la secuencia de los aprendizajes para que sean significativos, resolución de problemas por los mismos estudiantes, referencia según perspectiva académica internacional en educación matemática, fortalecimiento de la práctica de la interculturalidad.

✓ Estructura del Texto para el estudiante: se presenta por unidades, secciones y clases.

Las unidades didácticas que se desarrollan en el Texto para el estudiante constituyen la organización de los contenidos de aprendizajes basados en la secuencialidad y metodología a utilizar, así como la evaluación, entre otras. Las unidades del Texto para el estudiante responden al contenido de las mallas curriculares y ordenadas en: Álgebra, Función, Etnomatemática, Geometría, Lógica, Estadística, Aritmética y Avanzado. En Avanzado se abordan temas con nivel de dificultad alto y que corresponden a grados superiores. Sin embargo, para responder al CNB se desarrollaron conceptos básicos a modo de introducción. Cada unidad del Texto para el estudiante se ha estructurado por sección y esta por clases. Una sección contiene una secuencia de clases que abordan un subtema de la unidad.

Una clase se entiende como el proceso de interacción entre estudiantes y docente para llevar a cabo el aprendizaje de Matemática. Generalmente, la interacción se lleva a cabo en un periodo de tiempo que oscila entre treinta o treinta y cinco minutos. El aprendizaje esperado de una clase se constituye en el elemento orientador de ese proceso y se encuentra indicado en la Guía para el docente.

El desarrollo de una clase se realiza en cuatro momentos: problema de la clase, solución, conclusión y ejercicios. En algunas clases se han agregado ejemplos después de la conclusión. Estos tienen como propósito consolidar el aprendizaje o profundizar el contenido de la clase.



Sección 2 Sólidos

Clase 2 Representación y clasificación de sólidos (2)

P

a. Identifique el nombre de los siguientes sólidos geométricos.

b. Clasifique los sólidos geométricos de acuerdo a las similitudes de sus caras.

c. ¿Cómo se nombra una pirámide?

S

a.

Pirámide triangular Pirámide cuadrangular Cono

b.

Grupo 1

Pirámide triangular Pirámide cuadrangular

Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2

Cono

Su cara lateral es curva y su base es un círculo.

c. Se nombra una pirámide de acuerdo a la forma de su base.

C

A un sólido geométrico que tiene una base poligonal y varias caras laterales con forma triangular que tienen un vértice en común, se le llama **pirámide**. Una pirámide es nombrada por la forma del polígono de su base.

A un sólido geométrico con base circular, una cara lateral curva y un solo vértice se le llama **cono**.

Los elementos que conforman cada sólido geométrico son:

A una pirámide cuya base es un pentágono se le llama pirámide pentagonal.

A una pirámide cuya base es un hexágono se le llama pirámide hexagonal.

E

Identifique las bases e indique el nombre que le corresponde a cada sólido geométrico.

a. b. c. d.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 97

Problema de la clase

Solución

Conclusión

Ejercicios

Plan de estudio anual

Es la organización secuencial de las unidades didácticas que se desarrollarán durante un ciclo escolar. Se indica el tiempo aproximado para el desarrollo, el cual debe cumplirse para lograr las competencias matemáticas del estudiante.

Mes	Unidad (número de clases)	Contenidos (número de clases)	Página del texto
Enero	Álgebra (43)	Productos de polinomios (7)	6-12
Febrero		Factorización (16)	13-28
Marzo		Ecuaciones de segundo grado (20)	29-50
Abril	Función (17)	Función cuadrática (13)	54-69
		Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa (4)	70-73
Mayo	Etnomatemática (14)	Tiempo y espacio en el pensamiento Maya (3)	78-80
		El universo y sus cuadrantes (2)	81-82
		Patrones y su significación en el pensamiento Maya (3)	83-85
		Sistemas numéricos (5)	86-90
		Sistemas de medición (1)	91
	Geometría (35)	Círculos (3)	93-95
		Sólidos (2)	96-97
Junio		Construcción de sólidos (5)	98-102
		Área superficial de sólidos (10)	103-112
Julio		Volumen de sólidos (10)	113-122
		Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180° (5)	123-128
	Lógica (14)	Conjuntos (8)	132-139
Agosto		Relaciones entre conjuntos y proposiciones (3)	140-142
		Razonamientos (2)	143-144
		Relación de definiciones (1)	145
	Estadística (11)	Estadística (2)	149-150
		Probabilidades (9)	151-162
Septiembre	Aritmética (11)	Números reales (3)	165-167
		Números complejos (8)	168-175
	Avanzado (19)	Productos de polinomios (7)	179-185
Octubre		Factorización (1)	186
		Fracciones algebraicas (3)	187-189
		Radicación de polinomios (1)	190
		Inecuaciones de segundo grado (3)	191-194
		Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180° (4)	195-198

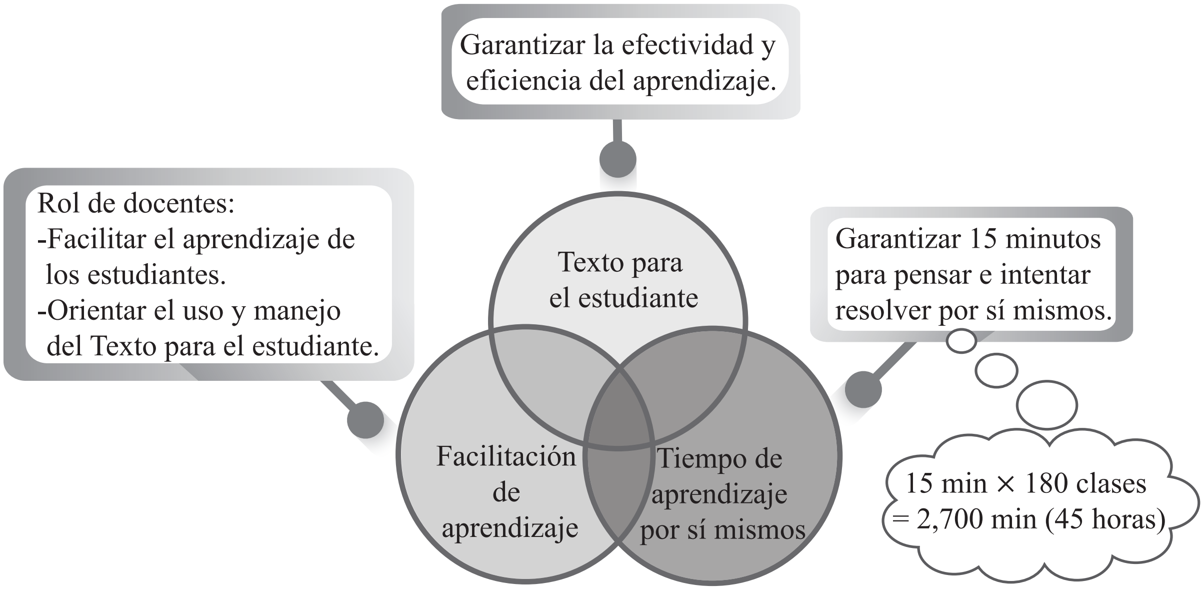
Orientaciones metodológicas

Orientaciones metodológicas para el mejoramiento de los aprendizajes del área de Matemática

Las orientaciones metodológicas son sugerencias que se proporcionan al docente para el logro efectivo del aprendizaje esperado de la clase y que contribuyen a mejorar el rendimiento académico de los estudiantes en el área.

Para mejorar los aprendizajes del área de Matemática hay tres factores esenciales que pueden ser tomados en cuenta desde la práctica docente en el aula: el tiempo de aprendizaje por sí mismos, la facilitación del docente y los recursos educativos. Estos factores interrelacionados constituyen la base para la formulación de una estrategia didáctica que permitan consolidar los aprendizajes de los estudiantes.

Estrategia de mejora de los aprendizajes en Matemática



El tiempo de aprendizaje por sí mismos

El tiempo de aprendizaje por sí mismos es un momento donde los estudiantes piensan e intentan resolver problemas por sí mismos para apropiar nuevos conocimientos. El estudiante que solo escucha las explicaciones del docente durante casi todo el periodo de clase, aprende menos porque su actitud es pasiva.

El tiempo mínimo que se recomienda para implementar el aprendizaje por sí mismos en el aula es de 15 minutos. A continuación se presentan algunas estrategias para llevarlo a cabo.

✓ Aprendizaje individual: esta estrategia de aprendizaje se presenta cuando se asigna tiempo para que el estudiante lea, piense en la solución de un problema o ejercicio, escriba su respuesta en el cuaderno, verifique la respuesta, entre otros. Garantizar el tiempo para estas actividades logrará aprendizajes significativos. Las ventajas de esta estrategia de aprendizaje son:

  - Fomenta el aprendizaje autónomo.
  - Garantiza el aprendizaje de los conceptos y procedimientos matemáticos de cada estudiante.
  - Promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, tales como: análisis, comprensión, síntesis, creatividad, comunicación de ideas, razonamiento lógico, entre otros.

✓ Aprendizaje colaborativo o interactivo: En esta estrategia se asigna tiempo para que los estudiantes conformados en equipos puedan aprender conjuntamente a través del intercambio de ideas sobre la solución de un problema o ejercicio. Generalmente esta estrategia se puede implementar después del aprendizaje individual y se hace para que los estudiantes puedan intercambiar fácilmente sus ideas y puedan apoyarse mutuamente. Las ventajas de esta estrategia de aprendizaje son:

  - Fomenta el apoyo mutuo, ya que un estudiante que no comprende un concepto o procedimiento puede formar pareja con otro estudiante para intercambiar ideas matemáticas. El estudiante que explica a su compañero tiende a profundizar su comprensión del tema a través de la explicación verbal.
  - Propicia un ambiente de convivencia en el aula.

Facilitación del docente

El rol del docente en el proceso de enseñanza y aprendizaje es: facilitador, mediador, líder, guía e investigador. Su esfuerzo se orienta a desarrollar procesos de razonamientos y la interiorización de valores que permitan una convivencia armoniosa en la sociedad pluricultural. Las actividades del docente durante el desarrollo de una clase deben contribuir al logro de aprendizajes del área y propiciar la práctica de los valores humanos.

Facilitar el aprendizaje implica desarrollar sistemáticamente la clase, siguiendo los momentos del enfoque de resolución de problema:

P **Problema de la clase o situación de aprendizaje**

S **Solución del problema presentando paso a paso el proceso**

C **Conclusión presentando la síntesis de la clase**

E **Ejercicios incluyendo el ítem de evaluación**

Estos momentos permiten que los estudiantes alcancen los aprendizajes esperados y desarrollen sus habilidades matemáticas, donde se constituyen como protagonistas principales del proceso.

Recursos educativos

✓ El Texto para el estudiante: es una herramienta de enseñanza y aprendizaje, el cual presenta una secuencia didáctica apropiada y un nivel de complejidad gradual para que sea accesible a los estudiantes.

La secuencia didáctica se refiere al orden de los contenidos de una clase, una unidad o de un grado. Cuando existe una secuencia gradual, los estudiantes aprovechan los conocimientos previos para la construcción de nuevos aprendizajes.

En cuanto al nivel de complejidad gradual se pretende que el material a utilizar responda al nivel de desarrollo y necesidades cognitivas de los estudiantes.

✓ El pizarrón: es un recurso imprescindible para llevar a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula. En él se plasman los momentos del desarrollo de una clase, por tal razón se le puede denominar cuaderno común para el aula.

Aspectos básicos para el uso del pizarrón:

- El desarrollo de la clase se visualiza en el pizarrón desde el inicio hasta el final.
- El uso recomendable del pizarrón consiste en considerar espacio para: el problema inicial, el proceso de la solución, la conclusión, el ítem de evaluación y otros ejercicios si fuese necesario.
- Lo que se escribe en el pizarrón permanece hasta el final de la clase. De ahí la importancia de organizar bien el espacio.
- Permitirá a los estudiantes tomar apuntes en sus cuadernos para estudiarlos posteriormente.
- El buen uso del pizarrón permite la comprensión del tema de la clase y facilita la retroalimentación del proceso y la toma de apuntes por parte de los estudiantes.
- Es un medio de interacción entre los estudiantes y el docente.

Estrategias básicas para el desarrollo de una clase, según los momentos P, S, C y E

Para lograr los aprendizajes esperados de una clase es fundamental considerar la utilización de estrategias didácticas que propicien el involucramiento de los estudiantes en su aprendizaje. A continuación se presentan algunas estrategias que pueden ser utilizadas en cada momento de la clase.

Momentos de la clase	Proceso de aprendizaje del estudiante	Facilitación del docente	Estrategias básicas que se pueden utilizar en el desarrollo de la clase
P **Problema de la clase**	Solución individual del problema inicial	Orientar que lean el problema.	Indicar que lean el problema inicial en el Texto para el estudiante. Mientras los estudiantes leen, el docente escribe el problema en el pizarrón. Indicar que copien el problema en el cuaderno.
		Confirmar el nivel de comprensión.	Preguntar a los estudiantes si han comprendido el problema inicial. Explicar el problema de manera clara y concisa, si es necesario.
		Orientar que resuelvan el problema individualmente.	Indicar que escriban la solución en el cuaderno. Monitorear el avance de la solución individual, recorriendo el salón de clase. Identificar varias maneras de solución, errores comunes, entre otros. Brindar tiempo prudencial para el trabajo individual.
S **Solución**	Verificación del proceso de solución	Orientar para que comparen la solución individual con la solución en el Texto para el estudiante.	Identificar similitudes o diferencias de la solución individual y del Texto para el estudiante. Anotar en el cuaderno las similitudes o diferencias encontradas. Socializar similitudes o diferencias con algún compañero.

Momentos de la clase	Proceso de aprendizaje del estudiante	Facilitación del docente	Estrategias básicas que se pueden utilizar en el desarrollo de la clase
		Explicar la solución del Texto para el estudiante y escribir paso a paso en el pizarrón.	Iniciar la explicación cuando los estudiantes estén en silencio. Llamar la atención a los estudiantes que no estén atentos. Escribir la solución utilizando el espacio que indica el plan de pizarrón. Explicar paso a paso la solución del problema, observando el rostro de los estudiantes para captar si van comprendiendo la explicación. Repetir y poner énfasis en los contenidos importantes. No interceptar la vista de los estudiantes hacia el pizarrón. Brindar oportunidad para que un estudiante comparta su solución.
		Orientar para que copien la solución en el cuaderno.	Dar tiempo prudencial para copiar la solución en el cuaderno.
C **Conclusión**	Comprensión de la conclusión de la clase	Orientar lectura de la conclusión.	Leer la conclusión o solicitar a un estudiante que la lea en voz alta.
		Orientar comprensión de la conclusión.	Explicar la conclusión de forma clara y sencilla auxiliándose en el proceso de solución del problema de la clase. Brindar tiempo prudencial (1 a 2 minutos aproximadamente) para que los estudiantes copien la conclusión en el cuaderno.
		Orientar los ejemplos después de la conclusión, si hubieran.	Explicar el ejemplo de forma clara y concisa. Llamar la atención a los estudiantes antes de la explicación. Enfatizar la aplicación de la conclusión en el ejemplo. Brindar tiempo para que copien los ejemplos en el cuaderno.
E **Ejercicios**	Comprobación del logro del aprendizaje esperado	Indicar que resuelvan el ítem de evaluación.	Asignar tiempo prudencial (3 a 5 minutos aproximadamente) para resolver el ítem de evaluación en forma individual. Monitorear la solución del ítem de evaluación recorriendo el aula para verificar el logro del aprendizaje esperado. Para verificar solución se puede pedir que levanten la mano cuántos llegaron a la respuesta correcta, calificar en parejas intercambiando cuadernos, realizando autoevaluación, entre otros. Realizar la corrección en el cuaderno si fuera necesario. Si el 50% de los estudiantes no respondió correctamente, explicar nuevamente la solución del problema de la clase. Brindar oportunidad para que algunos estudiantes expliquen la solución, si el tiempo lo permite.
		Orientar la solución de otros ejercicios.	Indicar que resuelvan otros ejercicios, si el tiempo lo permite. Indicar que resuelvan individualmente y después en parejas. Verificar proceso de solución recorriendo el salón de clase.

Momentos de la clase	Proceso de aprendizaje del estudiante	Facilitación del docente	Estrategias básicas que se pueden utilizar en el desarrollo de la clase
Asignar la tarea para el siguiente día	Reforzamiento de lo aprendido	Revisar la respuesta en la siguiente clase.	Escribir la respuesta correcta en la parte superior derecha del pizarrón para que cada estudiante se autoevalúe. Dictar la respuesta correcta para heteroevaluación (estudiantes intercambian cuadernos para calificar respuesta). Indicar a los estudiantes que verifiquen la respuesta de manera individual utilizando el solucionario de los ejercicios.

Secuencia de las clases por unidades

Unidad 1 - Álgebra -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Productos de polinomios (7)	1.1 Repaso de producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$
	1.2 Repaso de productos notables de las formas $(x+a)^2$, $(x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$
	1.3 Producto de la forma $(ax+by)^2$
	1.4 Producto de la forma $(ax-by)^2$
	1.5 Producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$
	1.6 Combinación de productos notables
	1.7 Operaciones usando productos notables
2. Factorización (16)	2.1 Factorización de polinomios
	2.2 Factor común
	2.3 Ejercicios de factor común
	2.4 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab(1)$
	2.5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab(1)$
	2.6 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab(2)$
	2.7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab(2)$
	2.8 Factorización de diferencia de cuadrados
	2.9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados
	2.10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto
	2.11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto
	2.12 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx+c
	2.13 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx-c
	2.14 Factorización de binomio de la forma ax^2-b
	2.15 Factorizaciones combinadas
	2.16 Operaciones aritméticas usando factorización
3. Ecuaciones de segundo grado (20)	3.1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado
	3.2 Solución de una ecuación de segundo grado
	3.3 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2=b$
	3.4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2=b$
	3.5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n(1)$
	3.6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n(2)$
	3.7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$
	3.8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado
	3.9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado
	3.10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado
	3.11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx=0$
	3.12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx=0$
	3.13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$
	3.14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2-c^2=0$

	3.15 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$
	3.16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$
	3.17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$
	3.18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$
	3.19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$
	3.20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado

Unidad 2 - Función -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Función cuadrática (13)	1.1 Introducción al concepto de función cuadrática
	1.2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$
	1.3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$
	1.4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$
	1.5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = -1$
	1.6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$
	1.7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$
	1.8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$
	1.9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$
	1.10 Rango de una función $y = ax^2$
	1.11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$
	1.12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$
	1.13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$
2. Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa (4)	2.1 Función inyectiva
	2.2 Función sobreyectiva
	2.3 Función biyectiva
	2.4 Función inversa

Unidad 3 - Etnomatemática -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Tiempo y espacio en el pensamiento Maya (3)	1.1 Calendario Gregoriano y sus características
	1.2 Conversión del Calendario Maya Ab' al Calendario Gregoriano y viceversa
	1.3 Cargadores del año Maya y su significación
2. El universo y sus cuadrantes (2)	2.1 Cruz cósmica Maya
	2.2 Planetas y su representación en el pensamiento Maya
3. Patrones y su significación en el pensamiento Maya (3)	3.1 4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento Maya
	3.2 Patrones y mosaicos en la vestimenta Maya
	3.3 Trece energías del Calendario Maya y fecha de nacimiento Maya
4. Sistemas numéricos (5)	4.1 Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular
	4.2 Sistema binario y su naturaleza
	4.3 Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa

	4.4 Sistema binario en las computadoras
	4.5 Cero como elemento matemático hindú
5. Sistemas de medición (1)	5.1 Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas

Unidad 4 - Geometría -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Círculos (3)	1.1 Sectores circulares y segmentos
	1.2 Longitud de arcos
	1.3 Área de sectores circulares
2. Sólidos (2)	2.1 Representación y clasificación de sólidos (1)
	2.2 Representación y clasificación de sólidos (2)
3. Construcción de sólidos (5)	3.1 Cubos
	3.2 Prismas
	3.3 Cilindros
	3.4 Pirámides
	3.5 Conos
4. Área superficial de sólidos (10)	4.1 Área superficial de cubos
	4.2 Área superficial de prismas rectangulares
	4.3 Área superficial de prismas triangulares
	4.4 Área superficial de cilindros
	4.5 Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros
	4.6 Área superficial de pirámides cuadrangulares
	4.7 Área superficial de pirámides triangulares
	4.8 Área superficial de conos
	4.9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos
	4.10 Área superficial de esferas
5. Volumen de sólidos (10)	5.1 Volumen de prismas rectangulares
	5.2 Volumen de cubos
	5.3 Volumen de prismas triangulares
	5.4 Volumen de cilindros
	5.5 Ejercicios del volumen de prismas y cilindros
	5.6 Volumen de pirámides cuadrangulares
	5.7 Volumen de pirámides triangulares
	5.8 Volumen de conos
	5.9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos
	5.10 Volumen de esferas
6. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180° (5)	6.1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano
	6.2 Razones trigonométricas hasta 180° (1)
	6.3 Razones trigonométricas hasta 180° (2)
	6.4 Propiedad de razones trigonométricas
	6.5 Relación de seno, coseno y tangente

Unidad 5 - Lógica -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Conjuntos (8)	1.1 Notación de conjuntos
	1.2 Conjunto vacío
	1.3 Subconjuntos
	1.4 Unión de conjuntos
	1.5 Intersección de conjuntos
	1.6 Diferencia de conjuntos
	1.7 Diferencia simétrica de conjuntos
	1.8 Complemento de un conjunto
2. Relaciones entre conjuntos y proposiciones (3)	2.1 Conjunción
	2.2 Disyunción
	2.3 Negación
3. Razonamientos	3.1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)
	3.2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)
4. Relación de definiciones (1)	4.1 Relación de definiciones

Unidad 6 - Estadística -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Estadística (2)	1.1 Rango
	1.2 Rango intercuartil
2. Probabilidades (9)	2.1 Diagrama de árbol
	2.2 Permutación
	2.3 Combinación
	2.4 Probabilidad
	2.5 Propiedades de probabilidad
	2.6 Ley de la suma
	2.7 Eventos independientes
	2.8 Probabilidad condicional
	2.9 Ley del producto

Unidad 7 - Aritmética -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Números reales (3)	1.1 Repaso de números racionales
	1.2 Repaso de números irracionales
	1.3 Números reales
2. Números complejos (8)	2.1 Unidad imaginaria
	2.2 Parte real y parte imaginaria
	2.3 Módulo de un número complejo
	2.4 Suma y resta de números complejos

	2.5 Opuesto de un número complejo
	2.6 Conjugado de un número complejo
	2.7 Multiplicación de números complejos
	2.8 División de números complejos

Unidad 8 - Avanzado -

Sección (periodos de clase)	Clase
1. Productos de polinomios (7)	1.1 Producto de la forma $(x + a)^3$
	1.2 Producto de la forma $(x - a)^3$
	1.3 Potenciación de polinomios de la forma $(x + a)^n$ y $(x - a)^n$
	1.4 Triángulo de Pascal
	1.5 Binomio de Newton
	1.6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a + b + c)^2$
	1.7 Productos de la forma $(x + a)(x^2 - ax + a^2)$ y $(x - a)(x^2 + ax + a^2)$
2. Factorización (1)	2.1 Factorización de binomios de la forma $a^3 + b^3$ y $a^3 - b^3$
3. Fracciones algebraicas (3)	3.1 Fracción algebraica
	3.2 Multiplicación y división
	3.3 Suma y resta
4. Radicación de polinomios (1)	4.1 Raíz cuadrada de un polinomio
5. Inecuaciones de segundo grado (3)	5.1 Solución de una inecuación de segundo grado
	5.2 Función cuadrática e interceptos con el eje x
	5.3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática
6. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°	6.1 Teorema de Senos (1)
	6.2 Teorema de Senos (2)
	6.3 Teorema de Cosenos (1)
	6.4 Teorema de Cosenos (2)

$$+ bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4}}{2a}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

Unidad 1 •

Álgebra

Plan de estudio - Unidad 1 Álgebra -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
1. Construye patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones en la solución de problemas.	1.1 Aplica la factorización de polinomios al simplificar fracciones algebraicas.	1. Productos de polinomios	1.1 Repaso de producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$	Desarrolla un producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$.
			1.2 Repaso de productos notables de las formas $(x+a)^2, (x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$	Desarrolla un producto notable de la forma $(x+a)^2, (x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$.
			1.3 Producto de la forma $(ax+by)^2$	Desarrolla un producto notable de la forma $(ax+by)^2$.
			1.4 Producto de la forma $(ax-by)^2$	Desarrolla un producto notable de la forma $(ax-by)^2$.
			1.5 Producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$	Desarrolla un producto notable de la forma $(ax+by)(ax-by)$.
			1.6 Combinación de productos notables	Desarrolla una combinación de productos notables.
			1.7 Operaciones usando productos notables	Calcula una expresión usando productos notables.
		2. Factorización	2.1 Factorización de polinomios	Expresa el área de una figura como el producto de base y altura.
			2.2 Factor común	Factoriza un polinomio cuando sus términos tienen un factor común.
			2.3 Ejercicios de factor común	Factoriza un polinomio cuando sus términos tienen un factor común.
			2.4 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab\,(1)$	Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ como el producto notable $(x+a)(x+b)$, donde $a>0$ y $b>0$.
			2.5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab\,(1)$	Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$, donde $a>0$ y $b>0$.
			2.6 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab\,(2)$	Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.
			2.7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab\,(2)$	Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.
			2.8 Factorización de diferencia de cuadrados	Factoriza una diferencia de cuadrados.
			2.9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados	Factoriza una diferencia de cuadrados.
			2.10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto	Factoriza un trinomio cuadrado perfecto.
			2.11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto	Factoriza un trinomio cuadrado perfecto.
			2.12 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx+c	Factoriza un trinomio de la forma ax^2+bx+c.

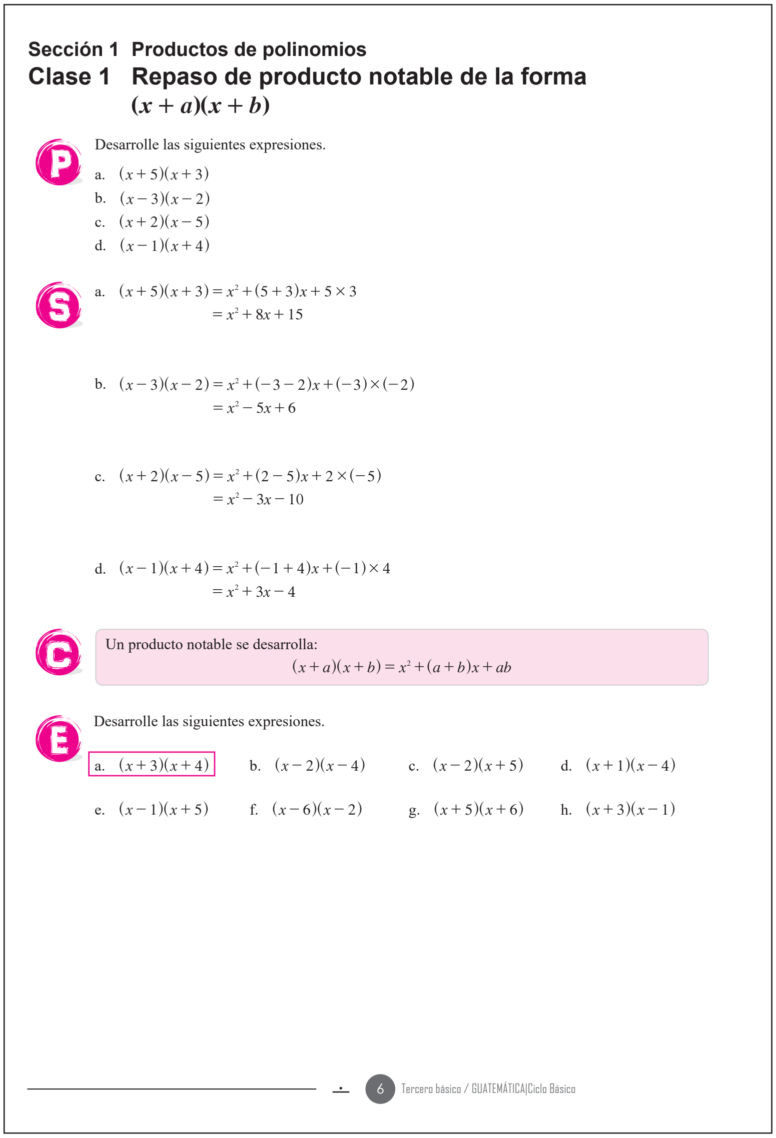
			2.13 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx - c$	Factoriza un trinomio de la forma $ax^2 + bx - c$.
			2.14 Factorización de binomio de la forma $ax^2 - b$	Factoriza un binomio de la forma $ax^2 - b$.
			2.15 Factorizaciones combinadas	Factoriza diferentes tipos de expresiones.
			2.16 Operaciones aritméticas usando factorización	Calcula una expresión usando factorización.
2. Resuelve problemas utilizando modelos matemáticos en la representación y comunicación de resultados.	2.4 Utiliza diferentes métodos en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.	3. Ecuaciones de segundo grado	3.1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado	Plantea una ecuación de segundo grado.
			3.2 Solución de una ecuación de segundo grado	Encuentra las soluciones de una ecuación de segundo grado al sustituir los valores dados.
			3.3 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$.
			3.4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$.
			3.5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$ (1)	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$, donde n es un cuadrado perfecto.
			3.6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$ (2)	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x + m)^2 = n$.
			3.7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx + c = 0$ por completación de cuadrados.
			3.8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado	Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.
			3.9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado	Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.
			3.10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado	Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.
			3.11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$.
			3.12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$.
			3.13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x + a)(x + b) = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x + a)(x + b) = 0$.
			3.14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$.

			3.15 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$.
			3.16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.
			3.17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.
			3.18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.
			3.19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$	Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + (a + b)x + ab = 0$.
			3.20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado	Resuelve una ecuación de segundo grado usando factorización, fórmula general o completación de cuadrados.

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 1 Repaso de producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$.



Sección 1 Productos de polinomios

Clase 1 Repaso de producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$

P Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+5)(x+3)$
b. $(x-3)(x-2)$
c. $(x+2)(x-5)$
d. $(x-1)(x+4)$

S a. $(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+5\times 3$
$=x^2+8x+15$

b. $(x-3)(x-2)=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)$
$=x^2-5x+6$

c. $(x+2)(x-5)=x^2+(2-5)x+2\times(-5)$
$=x^2-3x-10$

d. $(x-1)(x+4)=x^2+(-1+4)x+(-1)\times 4$
$=x^2+3x-4$

C Un producto notable se desarrolla:
$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+3)(x+4)$ b. $(x-2)(x-4)$ c. $(x-2)(x+5)$ d. $(x+1)(x-4)$
e. $(x-1)(x+5)$ f. $(x-6)(x-2)$ g. $(x+5)(x+6)$ h. $(x+3)(x-1)$

6 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times 4$
$=x^2+7x+12$

b. $(x-2)(x-4)=x^2+(-2-4)x+(-2)\times(-4)$
$=x^2-6x+8$

c. $(x-2)(x+5)=x^2+(-2+5)x+(-2)\times 5$
$=x^2+3x-10$

d. $(x+1)(x-4)=x^2+(1-4)x+1\times(-4)$
$=x^2-3x-4$

e. $(x-1)(x+5)=x^2+(-1+5)x+(-1)\times 5$
$=x^2+4x-5$

f. $(x-6)(x-2)=x^2+(-6-2)x+(-6)\times(-2)$
$=x^2-8x+12$

g. $(x+5)(x+6)=x^2+(5+6)x+5\times 6$
$=x^2+11x+30$

h. $(x+3)(x-1)=x^2+(3-1)x+3\times(-1)$
$=x^2+2x-3$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-1 Repaso de producto notable de la forma $(x+a)(x+b)$

Ⓟ Desarrolle.
a. $(x+5)(x+3)$
b. $(x-3)(x-2)$
c. $(x+2)(x-5)$
d. $(x-1)(x+4)$

Ⓢ a. $(x+5)(x+3)=x^2+(5+3)x+5\times 3$
$=x^2+8x+15$

b. $(x-3)(x-2)=x^2+(-3-2)x+(-3)\times(-2)$
$=x^2-5x+6$

c. $(x+2)(x-5)=x^2+(2-5)x+2\times(-5)$
$=x^2-3x-10$

d. $(x-1)(x+4)=x^2+(-1+4)x+(-1)\times 4$
$=x^2+3x-4$

Ⓒ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

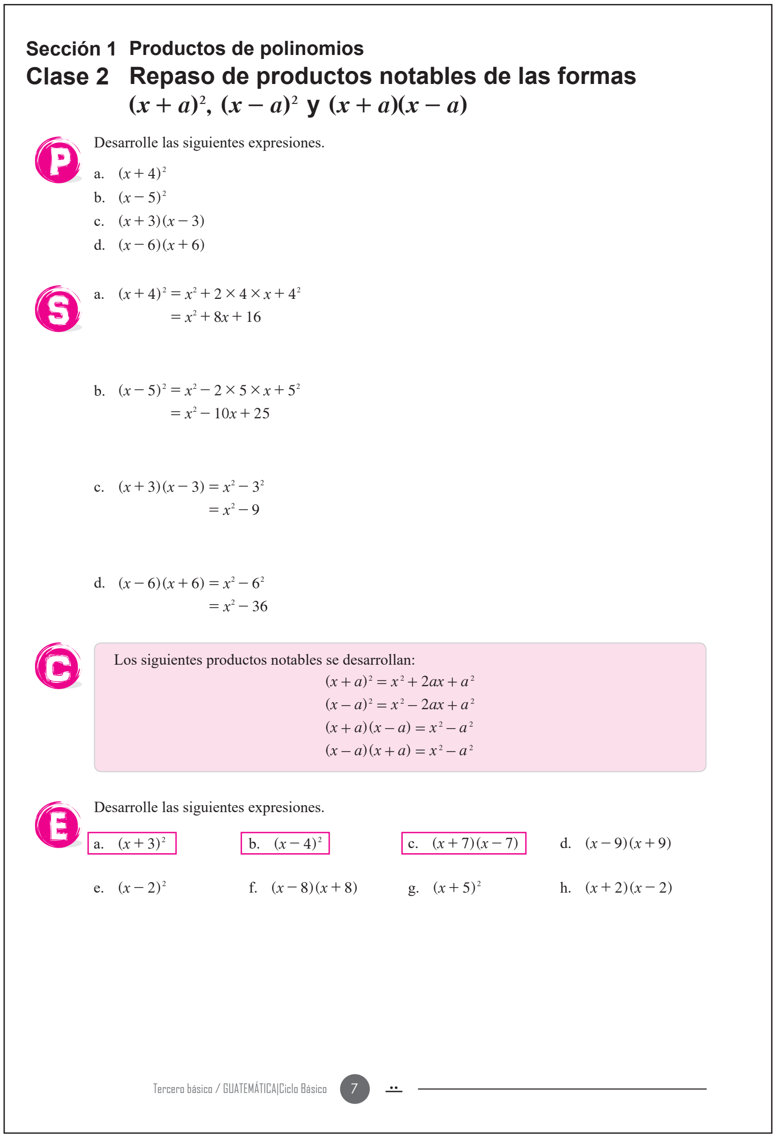
Ⓔ Desarrolle.

a. $(x+3)(x+4)=x^2+(3+4)x+3\times 4$
$=x^2+7x+12$

Sección 1 Productos de polinomios

Clase 2 Repaso de productos notables de las formas $(x+a)^2, (x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(x+a)^2, (x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$.



Sección 1 Productos de polinomios

Clase 2 Repaso de productos notables de las formas $(x+a)^2$, $(x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$

P Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+4)^2$
b. $(x-5)^2$
c. $(x+3)(x-3)$
d. $(x-6)(x+6)$

S a. $(x+4)^2 = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2$
$= x^2 + 8x + 16$

b. $(x-5)^2 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2$
$= x^2 - 10x + 25$

c. $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

d. $(x-6)(x+6) = x^2 - 6^2$
$= x^2 - 36$

C Los siguientes productos notables se desarrollan:
$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$
$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+3)^2$ b. $(x-4)^2$ c. $(x+7)(x-7)$ d. $(x-9)(x+9)$
e. $(x-2)^2$ f. $(x-8)(x+8)$ g. $(x+5)^2$ h. $(x+2)(x-2)$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 7

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = x^2 + 6x + 9$
b. $(x-4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = x^2 - 8x + 16$
c. $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$
d. $(x-9)(x+9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$
e. $(x-2)^2 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 = x^2 - 4x + 4$
f. $(x-8)(x+8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$
g. $(x+5)^2 = x^2 + 2 \times 5 \times x + 5^2 = x^2 + 10x + 25$
h. $(x+2)(x-2) = x^2 - 2^2 = x^2 - 4$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-2 Repaso de productos notables de las formas $(x+a)^2, (x-a)^2$ y $(x+a)(x-a)$

Ⓟ Desarrolle.
a. $(x+4)^2$
b. $(x-5)^2$
c. $(x+3)(x-3)$
d. $(x-6)(x+6)$

Ⓢ a. $(x+4)^2 = x^2 + 2 \times 4 \times x + 4^2$
$= x^2 + 8x + 16$

b. $(x-5)^2 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2$
$= x^2 - 10x + 25$

c. $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2$
$= x^2 - 9$

d. $(x-6)(x+6) = x^2 - 6^2$
$= x^2 - 36$

Ⓒ $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$
$(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$
$(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$
$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$

Ⓔ Desarrolle.

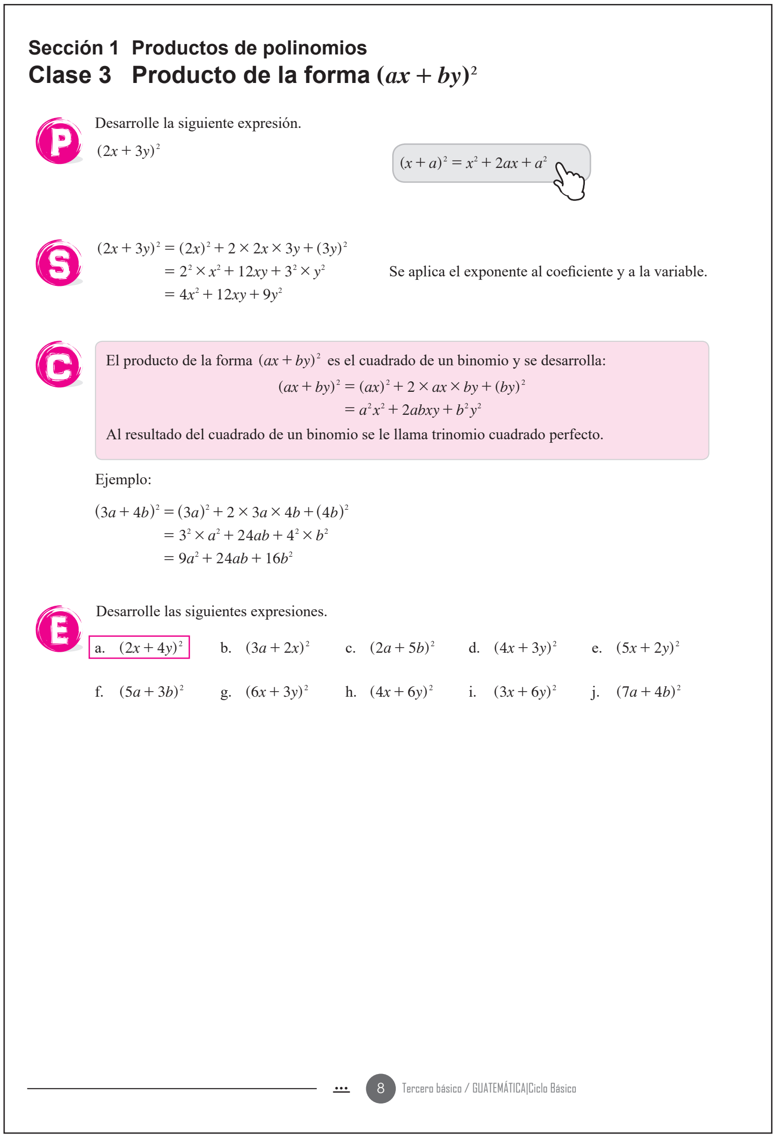
a. $(x+3)^2 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2$
$= x^2 + 6x + 9$

b. $(x-4)^2 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2$
$= x^2 - 8x + 16$

c. $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2$
$= x^2 - 49$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 3 Producto de la forma $(ax+by)^2$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(ax+by)^2$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 3 Producto de la forma $(ax+by)^2$

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(2x+3y)^2$

$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$

S
$$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x)^2+2\times 2x\times 3y+(3y)^2\\ &= 2^2\times x^2+12xy+3^2\times y^2\\ &= 4x^2+12xy+9y^2\end{aligned}$$
Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.

C El producto de la forma $(ax+by)^2$ es el cuadrado de un binomio y se desarrolla:
$$\begin{aligned}(ax+by)^2 &= (ax)^2+2\times ax\times by+(by)^2\\ &= a^2x^2+2abxy+b^2y^2\end{aligned}$$
Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:
$$\begin{aligned}(3a+4b)^2 &= (3a)^2+2\times 3a\times 4b+(4b)^2\\ &= 3^2\times a^2+24ab+4^2\times b^2\\ &= 9a^2+24ab+16b^2\end{aligned}$$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x+4y)^2$ b. $(3a+2x)^2$ c. $(2a+5b)^2$ d. $(4x+3y)^2$ e. $(5x+2y)^2$

f. $(5a+3b)^2$ g. $(6x+3y)^2$ h. $(4x+6y)^2$ i. $(3x+6y)^2$ j. $(7a+4b)^2$

8 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $$\begin{aligned}(2x+4y)^2 &= (2x)^2+2\times 2x\times 4y+(4y)^2\\ &= 2^2\times x^2+16xy+4^2\times y^2\\ &= 4x^2+16xy+16y^2\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(3a+2x)^2 &= (3a)^2+2\times 3a\times 2x+(2x)^2\\ &= 3^2\times a^2+12ax+2^2\times x^2\\ &= 9a^2+12ax+4x^2\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(2a+5b)^2 &= (2a)^2+2\times 2a\times 5b+(5b)^2\\ &= 2^2\times a^2+20ab+5^2\times b^2\\ &= 4a^2+20ab+25b^2\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(4x+3y)^2 &= (4x)^2+2\times 4x\times 3y+(3y)^2\\ &= 4^2\times x^2+24xy+3^2\times y^2\\ &= 16x^2+24xy+9y^2\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}(5x+2y)^2 &= (5x)^2+2\times 5x\times 2y+(2y)^2\\ &= 5^2\times x^2+20xy+2^2\times y^2\\ &= 25x^2+20xy+4y^2\end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned}(5a+3b)^2 &= (5a)^2+2\times 5a\times 3b+(3b)^2\\ &= 5^2\times a^2+30ab+3^2\times b^2\\ &= 25a^2+30ab+9b^2\end{aligned}$$

g. $$\begin{aligned}(6x+3y)^2 &= (6x)^2+2\times 6x\times 3y+(3y)^2\\ &= 6^2\times x^2+36xy+3^2\times y^2\\ &= 36x^2+36xy+9y^2\end{aligned}$$

h. $$\begin{aligned}(4x+6y)^2 &= (4x)^2+2\times 4x\times 6y+(6y)^2\\ &= 4^2\times x^2+48xy+6^2\times y^2\\ &= 16x^2+48xy+36y^2\end{aligned}$$

i. $$\begin{aligned}(3x+6y)^2 &= (3x)^2+2\times 3x\times 6y+(6y)^2\\ &= 3^2\times x^2+36xy+6^2\times y^2\\ &= 9x^2+36xy+36y^2\end{aligned}$$

j. $$\begin{aligned}(7a+4b)^2 &= (7a)^2+2\times 7a\times 4b+(4b)^2\\ &= 7^2\times a^2+56ab+4^2\times b^2\\ &= 49a^2+56ab+16b^2\end{aligned}$$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-3 Producto de la forma $(ax+by)^2$

Ⓟ Desarrolle.
$(2x+3y)^2$

$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$

Ⓢ $$\begin{aligned}(2x+3y)^2 &= (2x)^2+2\times 2x\times 3y+(3y)^2\\ &= 2^2\times x^2+12xy+3^2\times y^2\\ &= 4x^2+12xy+9y^2\end{aligned}$$

Aplique el exponente al coeficiente y a la variable.

Ⓒ $$\begin{aligned}(ax+by)^2 &= (ax)^2+2\times ax\times by+(by)^2\\ &= a^2x^2+2abxy+b^2y^2\end{aligned}$$
Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

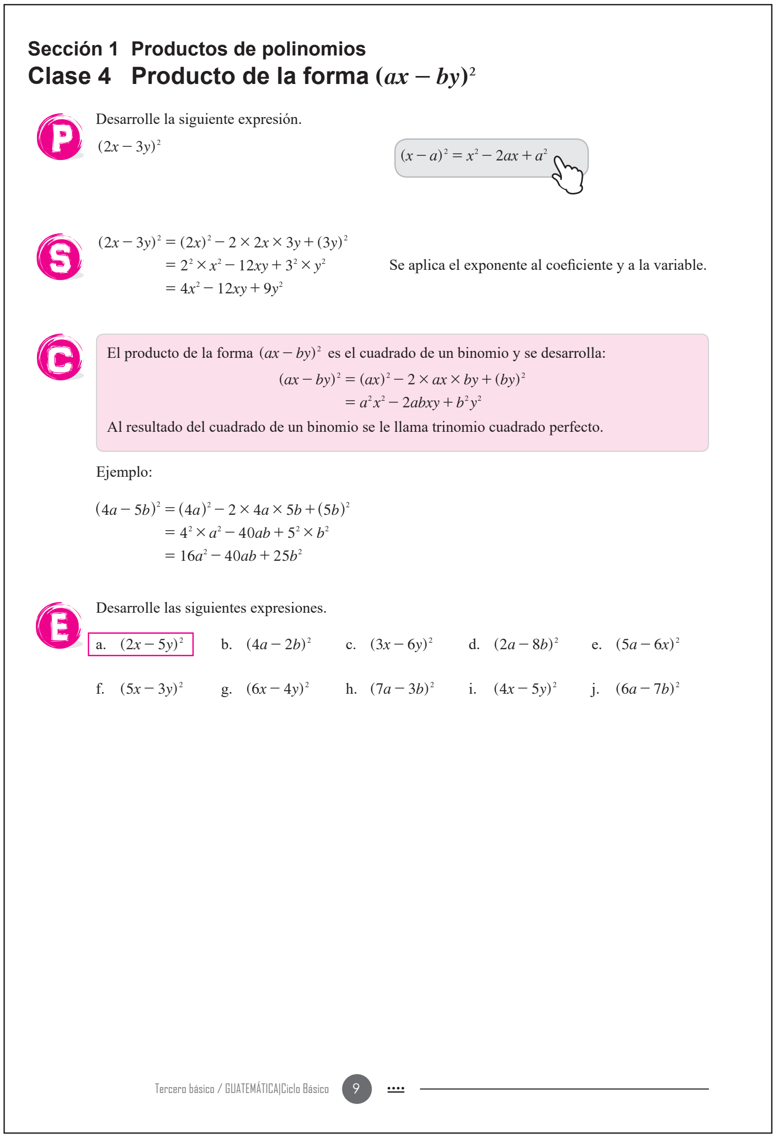
Ejemplo:
$$\begin{aligned}(3a+4b)^2 &= (3a)^2+2\times 3a\times 4b+(4b)^2\\ &= 3^2\times a^2+24ab+4^2\times b^2\\ &= 9a^2+24ab+16b^2\end{aligned}$$

Ⓔ Desarrolle.

a. $$\begin{aligned}(2x+4y)^2 &= (2x)^2+2\times 2x\times 4y+(4y)^2\\ &= 2^2\times x^2+16xy+4^2\times y^2\\ &= 4x^2+16xy+16y^2\end{aligned}$$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 4 Producto de la forma $(ax - by)^2$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(ax - by)^2$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 4 Producto de la forma $(ax - by)^2$

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(2x - 3y)^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

S
$$\begin{aligned}(2x - 3y)^2 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2\\ &= 2^2 \times x^2 - 12xy + 3^2 \times y^2\\ &= 4x^2 - 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.

C El producto de la forma $(ax - by)^2$ es el cuadrado de un binomio y se desarrolla:
$$\begin{aligned}(ax - by)^2 &= (ax)^2 - 2 \times ax \times by + (by)^2\\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2\end{aligned}$$
Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:
$$\begin{aligned}(4a - 5b)^2 &= (4a)^2 - 2 \times 4a \times 5b + (5b)^2\\ &= 4^2 \times a^2 - 40ab + 5^2 \times b^2\\ &= 16a^2 - 40ab + 25b^2\end{aligned}$$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x - 5y)^2$　b. $(4a - 2b)^2$　c. $(3x - 6y)^2$　d. $(2a - 8b)^2$　e. $(5a - 6x)^2$

f. $(5x - 3y)^2$　g. $(6x - 4y)^2$　h. $(7a - 3b)^2$　i. $(4x - 5y)^2$　j. $(6a - 7b)^2$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 9

Solucionario de los ejercicios:

a. $$\begin{aligned}(2x - 5y)^2 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5y + (5y)^2\\ &= 2^2 \times x^2 - 20xy + 5^2 \times y^2\\ &= 4x^2 - 20xy + 25y^2\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(4a - 2b)^2 &= (4a)^2 - 2 \times 4a \times 2b + (2b)^2\\ &= 4^2 \times a^2 - 16ab + 2^2 \times b^2\\ &= 16a^2 - 16ab + 4b^2\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(3x - 6y)^2 &= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 6y + (6y)^2\\ &= 3^2 \times x^2 - 36xy + 6^2 \times y^2\\ &= 9x^2 - 36xy + 36y^2\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(2a - 8b)^2 &= (2a)^2 - 2 \times 2a \times 8b + (8b)^2\\ &= 2^2 \times a^2 - 32ab + 8^2 \times b^2\\ &= 4a^2 - 32ab + 64b^2\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}(5a - 6x)^2 &= (5a)^2 - 2 \times 5a \times 6x + (6x)^2\\ &= 5^2 \times a^2 - 60ax + 6^2 \times x^2\\ &= 25a^2 - 60ax + 36x^2\end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned}(5x - 3y)^2 &= (5x)^2 - 2 \times 5x \times 3y + (3y)^2\\ &= 5^2 \times x^2 - 30xy + 3^2 \times y^2\\ &= 25x^2 - 30xy + 9y^2\end{aligned}$$

g. $$\begin{aligned}(6x - 4y)^2 &= (6x)^2 - 2 \times 6x \times 4y + (4y)^2\\ &= 6^2 \times x^2 - 48xy + 4^2 \times y^2\\ &= 36x^2 - 48xy + 16y^2\end{aligned}$$

h. $$\begin{aligned}(7a - 3b)^2 &= (7a)^2 - 2 \times 7a \times 3b + (3b)^2\\ &= 7^2 \times a^2 - 42ab + 3^2 \times b^2\\ &= 49a^2 - 42ab + 9b^2\end{aligned}$$

i. $$\begin{aligned}(4x - 5y)^2 &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 5y + (5y)^2\\ &= 4^2 \times x^2 - 40xy + 5^2 \times y^2\\ &= 16x^2 - 40xy + 25y^2\end{aligned}$$

j. $$\begin{aligned}(6a - 7b)^2 &= (6a)^2 - 2 \times 6a \times 7b + (7b)^2\\ &= 6^2 \times a^2 - 84ab + 7^2 \times b^2\\ &= 36a^2 - 84ab + 49b^2\end{aligned}$$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-4 Producto de la forma $(ax - by)^2$

Ⓟ Desarrolle.
$(2x - 3y)^2$

$(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$

Ⓢ $$\begin{aligned}(2x - 3y)^2 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3y + (3y)^2\\ &= 2^2 \times x^2 - 12xy + 3^2 \times y^2\\ &= 4x^2 - 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

Aplique el exponente al coeficiente y a la variable.

Ⓒ $$\begin{aligned}(ax - by)^2 &= (ax)^2 - 2 \times ax \times by + (by)^2\\ &= a^2x^2 - 2abxy + b^2y^2\end{aligned}$$

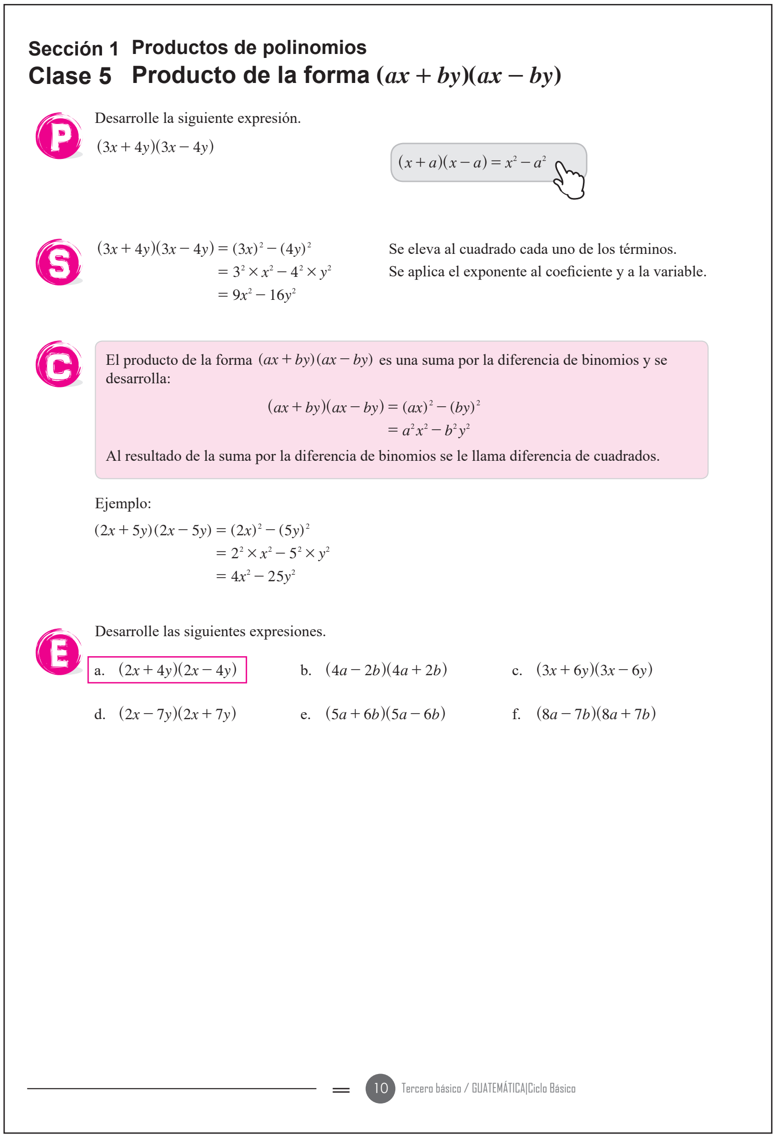
Al resultado del cuadrado de un binomio se le llama trinomio cuadrado perfecto.

Ejemplo:
$$\begin{aligned}(4a - 5b)^2 &= (4a)^2 - 2 \times 4a \times 5b + (5b)^2\\ &= 4^2 \times a^2 - 40ab + 5^2 \times b^2\\ &= 16a^2 - 40ab + 25b^2\end{aligned}$$

Ⓔ Desarrolle.
a. $$\begin{aligned}(2x - 5y)^2 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 5y + (5y)^2\\ &= 2^2 \times x^2 - 20xy + 5^2 \times y^2\\ &= 4x^2 - 20xy + 25y^2\end{aligned}$$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 5 Producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(ax+by)(ax-by)$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 5 Producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(3x+4y)(3x-4y)$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

S
$$
\begin{aligned}
(3x+4y)(3x-4y) &= (3x)^2-(4y)^2\\
&= 3^2\times x^2-4^2\times y^2\\
&= 9x^2-16y^2
\end{aligned}
$$

Se eleva al cuadrado cada uno de los términos.
Se aplica el exponente al coeficiente y a la variable.

C El producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$ es una suma por la diferencia de binomios y se desarrolla:

$$
\begin{aligned}
(ax+by)(ax-by) &= (ax)^2-(by)^2\\
&= a^2x^2-b^2y^2
\end{aligned}
$$

Al resultado de la suma por la diferencia de binomios se le llama diferencia de cuadrados.

Ejemplo:
$$
\begin{aligned}
(2x+5y)(2x-5y) &= (2x)^2-(5y)^2\\
&= 2^2\times x^2-5^2\times y^2\\
&= 4x^2-25y^2
\end{aligned}
$$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(2x+4y)(2x-4y)$
b. $(4a-2b)(4a+2b)$
c. $(3x+6y)(3x-6y)$
d. $(2x-7y)(2x+7y)$
e. $(5a+6b)(5a-6b)$
f. $(8a-7b)(8a+7b)$

10 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $(2x+4y)(2x-4y)=(2x)^2-(4y)^2$
$=2^2\times x^2-4^2\times y^2=4x^2-16y^2$

b. $(4a-2b)(4a+2b)=(4a)^2-(2b)^2$
$=4^2\times a^2-2^2\times b^2=16a^2-4b^2$

c. $(3x+6y)(3x-6y)=(3x)^2-(6y)^2$
$=3^2\times x^2-6^2\times y^2=9x^2-36y^2$

d. $(2x-7y)(2x+7y)=(2x)^2-(7y)^2$
$=2^2\times x^2-7^2\times y^2=4x^2-49y^2$

e. $(5a+6x)(5a-6x)=(5a)^2-(6x)^2$
$=5^2\times a^2-6^2\times x^2=25a^2-36x^2$

f. $(8a-7b)(8a+7b)=(8a)^2-(7b)^2$
$=8^2\times a^2-7^2\times b^2=64a^2-49b^2$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-5 Producto de la forma $(ax+by)(ax-by)$

Ⓟ Desarrolle.
$(3x+4y)(3x-4y)$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

Ⓢ
$$
\begin{aligned}
(3x+4y)(3x-4y) &= (3x)^2-(4y)^2\\
&= 3^2\times x^2-4^2\times y^2\\
&= 9x^2-16y^2
\end{aligned}
$$

Aplique el exponente al coeficiente y a la variable.

Ⓒ
$$
\begin{aligned}
(ax+by)(ax-by) &= (ax)^2-(by)^2\\
&= a^2x^2-b^2y^2
\end{aligned}
$$

Al resultado de la suma por la diferencia de binomios se le llama diferencia de cuadrados.

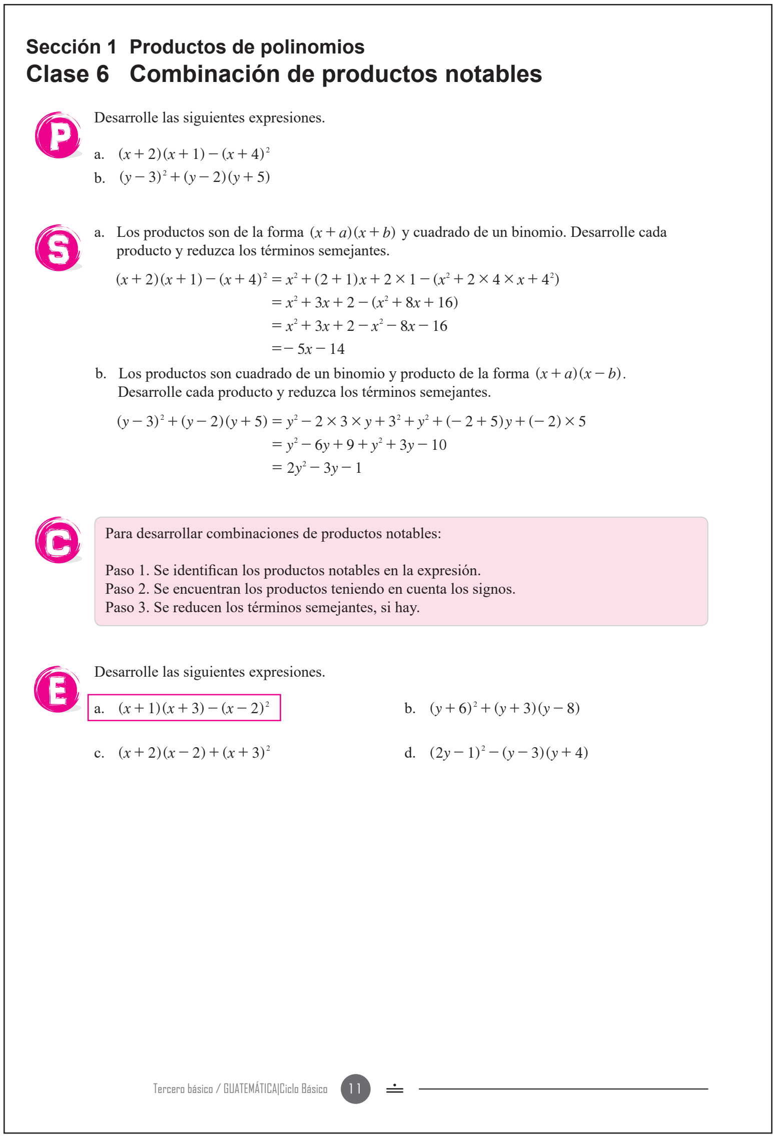
Ejemplo:
$$
\begin{aligned}
(2x+5y)(2x-5y) &= (2x)^2-(5y)^2\\
&= 2^2\times x^2-5^2\times y^2\\
&= 4x^2-25y^2
\end{aligned}
$$

Ⓔ Desarrolle.

a.
$$
\begin{aligned}
(2x+4y)(2x-4y) &= (2x)^2-(4y)^2\\
&= 2^2\times x^2-4^2\times y^2\\
&= 4x^2-16y^2
\end{aligned}
$$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 6 Combinación de productos notables

Aprendizaje esperado:
Desarrolla una combinación de productos notables.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 6 Combinación de productos notables

P Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+2)(x+1)-(x+4)^2$
b. $(y-3)^2+(y-2)(y+5)$

S a. Los productos son de la forma $(x+a)(x+b)$ y cuadrado de un binomio. Desarrolle cada producto y reduzca los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(x+2)(x+1)-(x+4)^2 &= x^2+(2+1)x+2\times1-(x^2+2\times4\times x+4^2)\\ &= x^2+3x+2-(x^2+8x+16)\\ &= x^2+3x+2-x^2-8x-16\\ &=-5x-14\end{aligned}$$

b. Los productos son cuadrado de un binomio y producto de la forma $(x+a)(x-b)$. Desarrolle cada producto y reduzca los términos semejantes.

$$\begin{aligned}(y-3)^2+(y-2)(y+5) &= y^2-2\times3\times y+3^2+y^2+(-2+5)y+(-2)\times5\\ &= y^2-6y+9+y^2+3y-10\\ &= 2y^2-3y-1\end{aligned}$$

C Para desarrollar combinaciones de productos notables:

Paso 1. Se identifican los productos notables en la expresión.
Paso 2. Se encuentran los productos teniendo en cuenta los signos.
Paso 3. Se reducen los términos semejantes, si hay.

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x+1)(x+3)-(x-2)^2$
b. $(y+6)^2+(y+3)(y-8)$
c. $(x+2)(x-2)+(x+3)^2$
d. $(2y-1)^2-(y-3)(y+4)$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 11

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+1)(x+3)-(x-2)^2$
$= x^2+(1+3)x+1\times3-(x^2-2\times2\times x+2^2)$
$= x^2+4x+3-(x^2-4x+4)$
$= x^2+4x+3-x^2+4x-4$
$= 8x-1$

b. $(y+6)^2+(y+3)(y-8)$
$= y^2+2\times6\times y+6^2+y^2+(3-8)y+3\times(-8)$
$= y^2+12y+36+y^2-5y-24$
$= 2y^2+7y+12$

c. $(x+2)(x-2)+(x+3)^2$
$= x^2-2^2+x^2+2\times3\times x+3^2$
$= x^2-4+x^2+6x+9$
$= 2x^2+6x+5$

d. $(2y-1)^2-(y-3)(y+4)$
$= (2y)^2-2\times2y\times1+1^2-[y^2+(-3+4)y-3\times4]$
$= 2^2\times y^2-4y+1-(y^2+y-12)$
$= 4y^2-4y+1-y^2-y+12$
$= 3y^2-5y+13$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-6 Combinación de productos notables

Ⓟ Desarrolle.

a. $(x+2)(x+1)-(x+4)^2$
b. $(y-3)^2+(y-2)(y+5)$

Ⓢ a. $(x+2)(x+1)-(x+4)^2$
$= x^2+(2+1)x+2\times1-(x^2+2\times4\times x+4^2)$
$= x^2+3x+2-(x^2+8x+16)$
$= x^2+3x+2-x^2-8x-16$
$=-5x-14$

b. $(y-3)^2+(y-2)(y+5)$
$= y^2-2\times3\times y+3^2+y^2+(-2+5)y+(-2)\times5$
$= y^2-6y+9+y^2+3y-10$
$= 2y^2-3y-1$

Ⓒ Para desarrollar combinaciones de productos notables:

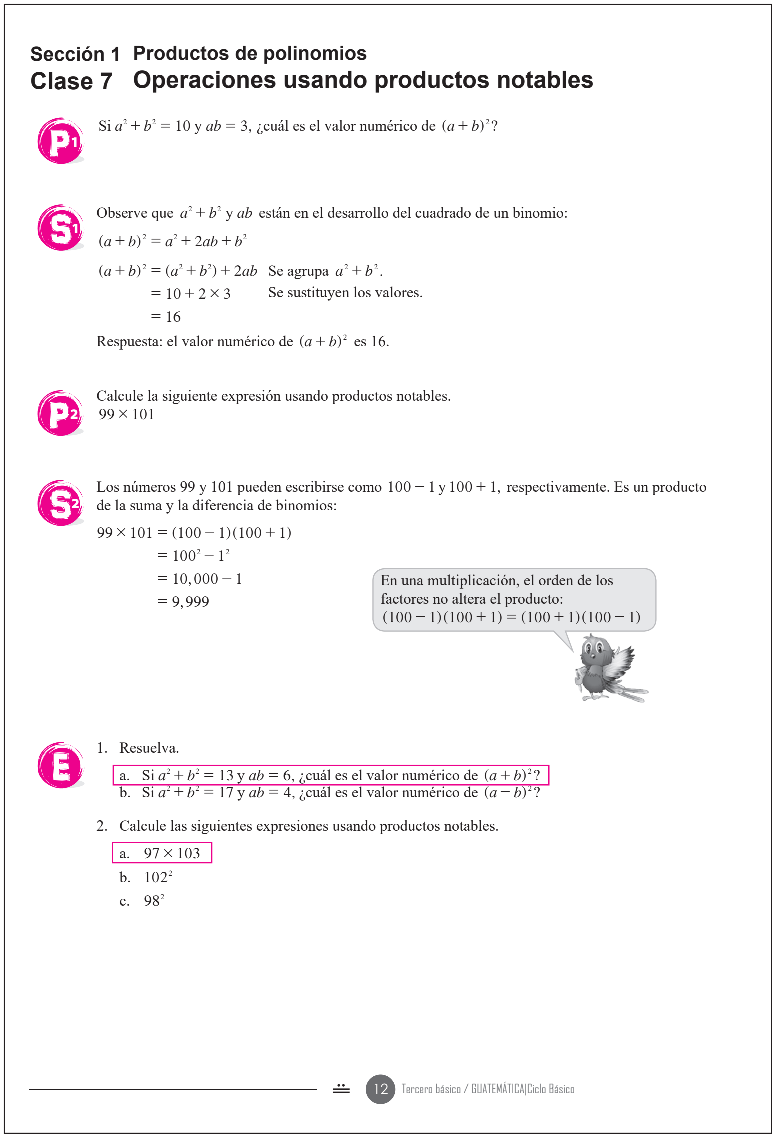
Paso 1. Se identifican los productos notables en la expresión.
Paso 2. Se encuentran los productos teniendo en cuenta los signos.
Paso 3. Se reducen los términos semejantes, si hay.

Ⓔ Desarrolle.

a. $(x+1)(x+3)-(x-2)^2$
$= x^2+(1+3)x+1\times3-(x^2-2\times2\times x+2^2)$
$= x^2+4x+3-(x^2-4x+4)$
$= x^2+4x+3-x^2+4x-4$
$= 8x-1$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 7 Operaciones usando productos notables

Aprendizaje esperado:
Calcula una expresión usando productos notables.



Sección 1 **Productos de polinomios**
Clase 7 **Operaciones usando productos notables**

P1 Si $a^2 + b^2 = 10$ y $ab = 3$, ¿cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$?

S1 Observe que $a^2 + b^2$ y ab están en el desarrollo del cuadrado de un binomio:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2 = (a^2+b^2) + 2ab$ Se agrupa $a^2 + b^2$.
$= 10 + 2 \times 3$ Se sustituyen los valores.
$= 16$

Respuesta: el valor numérico de $(a+b)^2$ es 16.

P2 Calcule la siguiente expresión usando productos notables.
99×101

S2 Los números 99 y 101 pueden escribirse como $100 - 1$ y $100 + 1$, respectivamente. Es un producto de la suma y la diferencia de binomios:

$99 \times 101 = (100-1)(100+1)$
$= 100^2 - 1^2$
$= 10,000 - 1$
$= 9,999$

En una multiplicación, el orden de los factores no altera el producto:
$(100-1)(100+1) = (100+1)(100-1)$

E 1. Resuelva.
a. Si $a^2 + b^2 = 13$ y $ab = 6$, ¿cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$?
b. Si $a^2 + b^2 = 17$ y $ab = 4$, ¿cuál es el valor numérico de $(a-b)^2$?

2. Calcule las siguientes expresiones usando productos notables.
a. 97×103
b. 102^2
c. 98^2

12 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= (a^2 + b^2) + 2ab$
$= 13 + 2 \times 6$
$= 25$

b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$= (a^2 + b^2) - 2ab$
$= 17 - 2 \times 4$
$= 9$

2. a. $97 \times 103 = (100-3)(100+3)$
$= 100^2 - 3^2$
$= 10,000 - 9$
$= 9,991$

b. $102^2 = (100+2)^2$
$= 100^2 + 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
$= 10,000 + 400 + 4$
$= 10,404$

c. $98^2 = (100-2)^2$
$= 100^2 - 2 \times 100 \times 2 + 2^2$
$= 10,000 - 400 + 4$
$= 9,604$

Fecha: dd – mm – aa
1-1-7 Operaciones usando productos notables

(P1) Si $a^2 + b^2 = 10$ y $ab = 3$, ¿cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$?

(S1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= (a^2 + b^2) + 2ab$ Se agrupa $a^2 + b^2$.
$= 10 + 2 \times 3$ Se sustituyen los valores.
$= 16$
R: 16

(P2) Calcule la expresión usando productos notables.
99×101

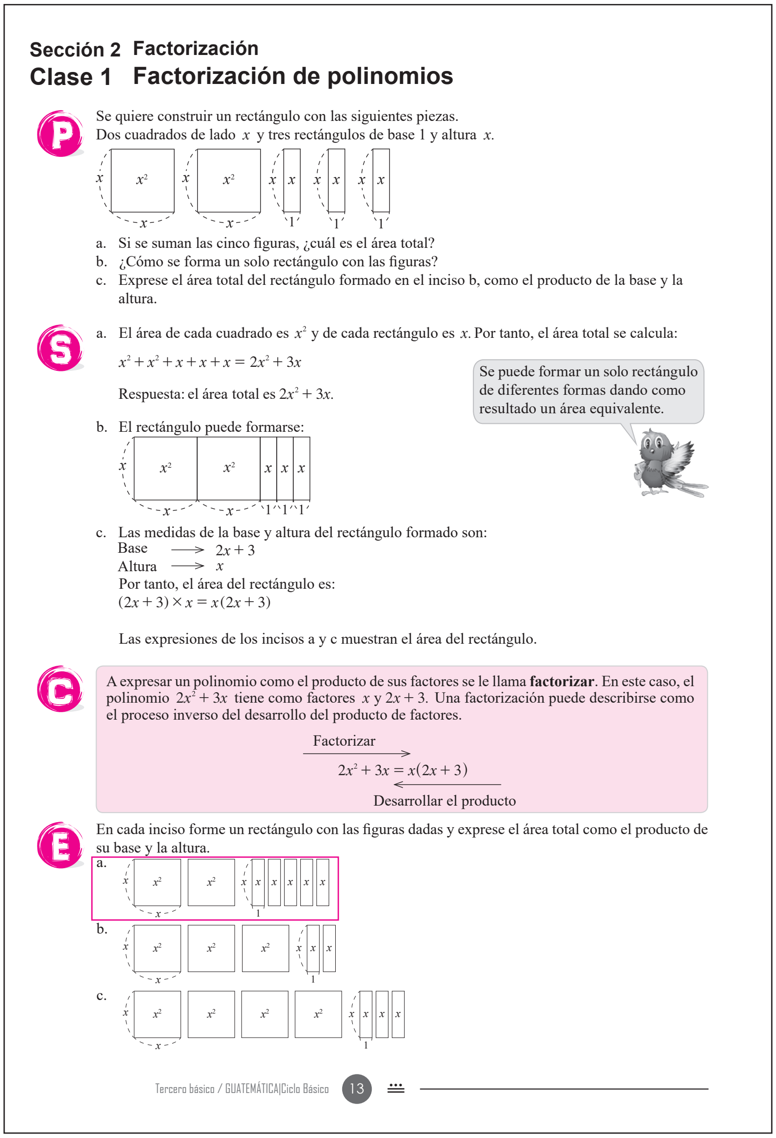
(S2) $99 = 100 - 1, 101 = 100 + 1$
$99 \times 101 = (100-1)(100+1)$
$99 \times 101 = 100^2 - 1^2$
$= 10,000 - 1$
$= 9,999$

(E) 1. Resuelva.
a. Si $a^2 + b^2 = 13$ y $ab = 6$, ¿cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$?
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$= (a^2 + b^2) + 2ab$
$= 13 + 2 \times 6$
$= 25$
R: 25

2. Calcule la expresión usando productos notables.
a. $97 \times 103 = (100-3)(100+3)$
$= 100^2 - 3^2$
$= 10,000 - 9$
$= 9,991$
R: 9,991

Sección 2 Factorización
Clase 1 Factorización de polinomios

Aprendizaje esperado:
Expresa el área de una figura como el producto de base y altura.



Sección 2 **Factorización**
Clase 1 **Factorización de polinomios**

P Se quiere construir un rectángulo con las siguientes piezas.
Dos cuadrados de lado x y tres rectángulos de base 1 y altura x.

a. Si se suman las cinco figuras, ¿cuál es el área total?
b. ¿Cómo se forma un solo rectángulo con las figuras?
c. Exprese el área total del rectángulo formado en el inciso b, como el producto de la base y la altura.

S a. El área de cada cuadrado es x^2 y de cada rectángulo es x. Por tanto, el área total se calcula:

$x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$

Respuesta: el área total es $2x^2 + 3x$.

Se puede formar un solo rectángulo de diferentes formas dando como resultado un área equivalente.

b. El rectángulo puede formarse:

c. Las medidas de la base y altura del rectángulo formado son:
Base $\longrightarrow$ $2x + 3$
Altura $\longrightarrow$ x
Por tanto, el área del rectángulo es:
$(2x + 3) \times x = x(2x + 3)$

Las expresiones de los incisos a y c muestran el área del rectángulo.

C A expresar un polinomio como el producto de sus factores se le llama **factorizar**. En este caso, el polinomio $2x^2 + 3x$ tiene como factores x y $2x + 3$. Una factorización puede describirse como el proceso inverso del desarrollo del producto de factores.

$$2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{Factorizar}} x(2x+3)$$
$$2x^2 + 3x \xleftarrow[\text{Desarrollar el producto}]{} x(2x+3)$$

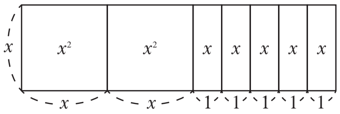
E En cada inciso forme un rectángulo con las figuras dadas y exprese el área total como el producto de su base y la altura.

a.
b.
c.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 13

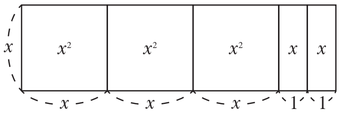
Solucionario de los ejercicios:

a.



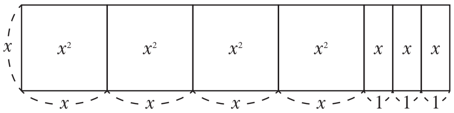
R: $x(2x+5)$

b.



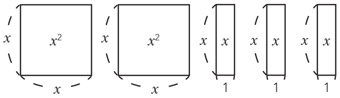
R: $x(3x+2)$

c.



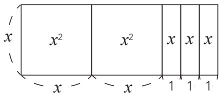
R: $x(4x+3)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-1 Factorización de polinomios
Ⓟ Se quiere un rectángulo con las siguientes piezas.



a. Si se suman las cinco figuras, ¿cuál es el área total?
b. ¿Cómo se forma un solo rectángulo?
c. Exprese el área total del rectángulo del inciso b.

Ⓢ a. Área total: $x^2 + x^2 + x + x + x = 2x^2 + 3x$
b.

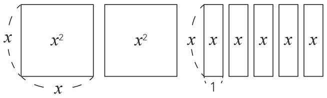


c. Las medidas del rectángulo son:
Base $\Rightarrow$ $2x+3$ Altura $\Rightarrow$ x
Área total del rectángulo del inciso b:
$(2x+3)x = x(2x+3)$

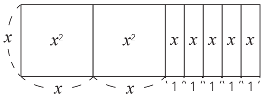
Ⓒ A expresar un polinomio como el producto de sus factores se le llama factorizar.

$$2x^2 + 3x \xrightarrow{\text{Factorizar}} x(2x+3)$$
$$2x^2 + 3x \xleftarrow[\text{Desarrollar el producto}]{} x(2x+3)$$

Ⓔ Forme un rectángulo con las figuras dadas y exprese el área total.
a.



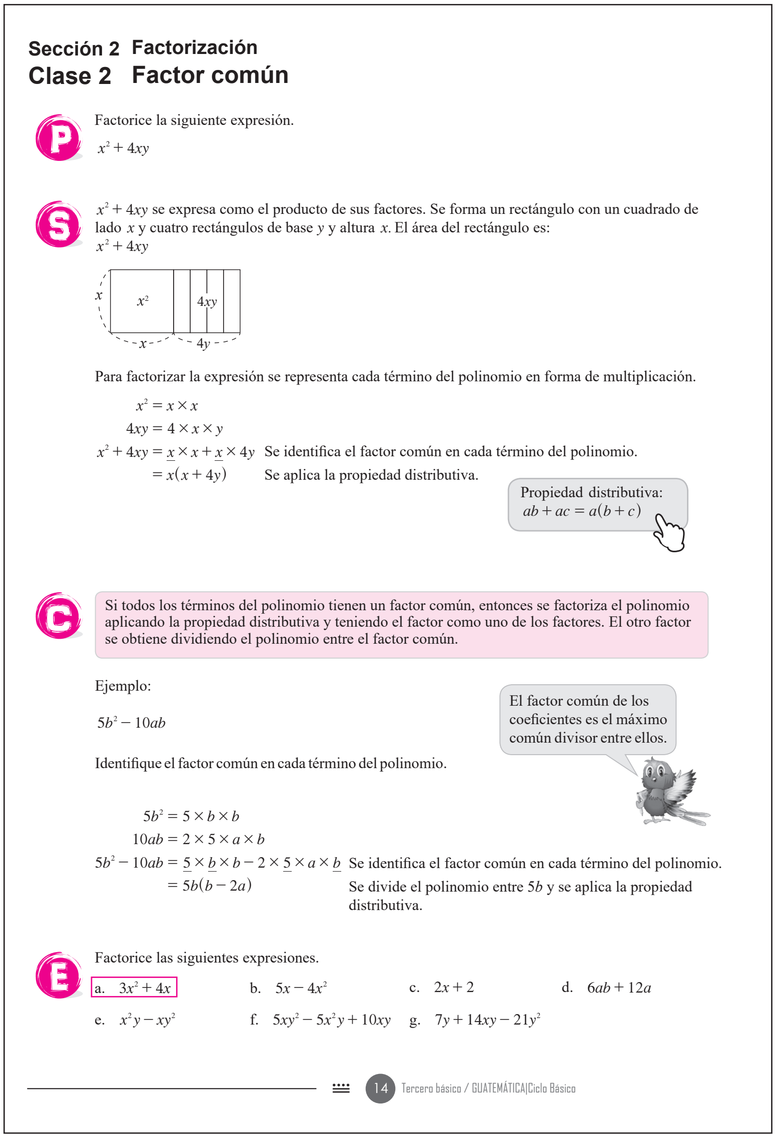
Esta figura se forma:



Base: $2x+5$
Altura: x
El área del rectángulo es: $x(2x+5)$

Sección 2 Factorización
Clase 2 Factor Común

Aprendizaje esperado:
Factoriza un polinomio cuando sus términos tienen un factor común.



Sección 2 Factorización
Clase 2 Factor común

P Factorice la siguiente expresión.
$x^2 + 4xy$

S $x^2 + 4xy$ se expresa como el producto de sus factores. Se forma un rectángulo con un cuadrado de lado x y cuatro rectángulos de base y y altura x. El área del rectángulo es:
$x^2 + 4xy$

Para factorizar la expresión se representa cada término del polinomio en forma de multiplicación.

$x^2 = x \times x$
$4xy = 4 \times x \times y$
$x^2 + 4xy = \underline{x} \times x + \underline{x} \times 4y$ Se identifica el factor común en cada término del polinomio.
$= x(x + 4y)$ Se aplica la propiedad distributiva.

Propiedad distributiva:
$ab + ac = a(b + c)$

C Si todos los términos del polinomio tienen un factor común, entonces se factoriza el polinomio aplicando la propiedad distributiva y teniendo el factor como uno de los factores. El otro factor se obtiene dividiendo el polinomio entre el factor común.

Ejemplo:

$5b^2 - 10ab$

Identifique el factor común en cada término del polinomio.

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor entre ellos.

$5b^2 = 5 \times b \times b$
$10ab = 2 \times 5 \times a \times b$
$5b^2 - 10ab = \underline{5} \times \underline{b} \times b - 2 \times \underline{5} \times a \times \underline{b}$ Se identifica el factor común en cada término del polinomio.
$= 5b(b - 2a)$ Se divide el polinomio entre $5b$ y se aplica la propiedad distributiva.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $3x^2 + 4x$
b. $5x - 4x^2$
c. $2x + 2$
d. $6ab + 12a$
e. $x^2y - xy^2$
f. $5xy^2 - 5x^2y + 10xy$
g. $7y + 14xy - 21y^2$

14 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

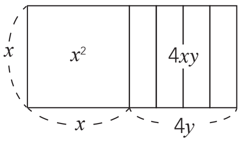
Solucionario de los ejercicios:

a. $3x^2 + 4x = 3 \times x \times x + 4 \times x = x(3x + 4)$
b. $5x - 4x^2 = 5 \times x - 4 \times x \times x = x(5 - 4x)$
c. $2x + 2 = 2 \times x + 2 = 2(x + 1)$
d. $6ab + 12a = 6 \times a \times b + 6 \times 2 \times a = 6a(b + 2)$
e. $x^2y - xy^2 = x \times x \times y - x \times y \times y = xy(x - y)$
f. $5xy^2 - 5x^2y + 10xy$
$= 5 \times x \times y \times y - 5 \times x \times x \times y + 5 \times 2 \times x \times y$
$= 5xy(y - x + 2)$
g. $7y + 14xy - 21y^2$
$= 7 \times y + 7 \times 2 \times x \times y - 7 \times 3 \times y \times y$
$= 7y(1 + 2x - 3y)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-2 Factor común

Ⓟ Factorice.
$x^2 + 4xy$

Ⓢ El área del rectángulo es $x^2 + 4xy$.



Se representa cada término en forma de multiplicación.
$x^2 = x \times x$
$4xy = 4 \times x \times y$
$x^2 + 4xy = \underline{x} \times x + \underline{x} \times 4y$ Se identifica el factor común.
$= x(x + 4y)$ Se aplica la propiedad distributiva.

Propiedad distributiva:
$ab + ac = a(b + c)$

Ⓒ Si todos los términos del polinomio tienen un factor común, entonces se factoriza el polinomio aplicando la propiedad distributiva y teniendo el factor como uno de los factores. El otro factor se obtiene dividiendo el polinomio entre el factor común.

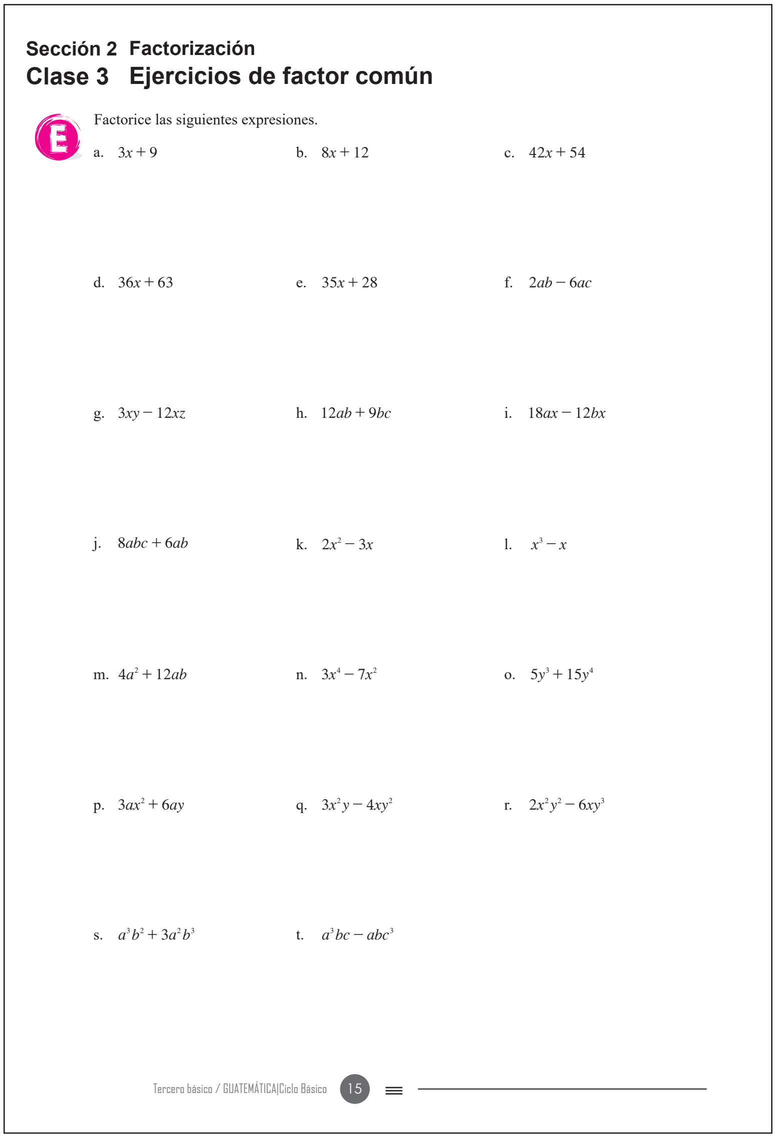
Ejemplo:
$5b^2 - 10ab$
$5b^2 = 5 \times b \times b$
$10ab = 2 \times 5 \times a \times b$
$5b^2 - 10ab = \underline{5} \times \underline{b} \times b - 2 \times \underline{5} \times a \times \underline{b}$
$= 5b(b - 2a)$

El factor común de los coeficientes es el máximo común divisor entre ellos.

Ⓔ Factorice.
a. $3x^2 + 4x = 3 \times x \times x + 4 \times x$
$= x(3x + 4)$

Sección 2 Factorización
Clase 3 Ejercicios de factor común

Aprendizaje esperado:
Factoriza un polinomio cuando sus términos tienen un factor común.



Sección 2 Factorización

Clase 3 Ejercicios de factor común

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $3x + 9$ b. $8x + 12$ c. $42x + 54$

d. $36x + 63$ e. $35x + 28$ f. $2ab - 6ac$

g. $3xy - 12xz$ h. $12ab + 9bc$ i. $18ax - 12bx$

j. $8abc + 6ab$ k. $2x^2 - 3x$ l. $x^3 - x$

m. $4a^2 + 12ab$ n. $3x^4 - 7x^2$ o. $5y^3 + 15y^4$

p. $3ax^2 + 6ay$ q. $3x^2y - 4xy^2$ r. $2x^2y^2 - 6xy^3$

s. $a^3b^2 + 3a^2b^3$ t. $a^3bc - abc^3$

Solucionario de los ejercicios:

a. $3x + 9 = 3 \times x + 3 \times 3 = 3(x + 3)$
b. $8x + 12 = 4 \times 2 \times x + 4 \times 3 = 4(2x + 3)$
c. $42x + 54 = 6 \times 7 \times x + 6 \times 9 = 6(7x + 9)$
d. $36x + 63 = 9 \times 4 \times x + 9 \times 7 = 9(4x + 7)$
e. $35x + 28 = 7 \times 5 \times x + 7 \times 4 = 7(5x + 4)$
f. $2ab - 6ac = 2 \times a \times b - 2 \times 3 \times a \times c = 2a(b - 3c)$
g. $3xy - 12xz = 3 \times x \times y - 3 \times 4 \times x \times z$
$= 3x(y - 4z)$
h. $12ab + 9bc = 3 \times 4 \times a \times b + 3 \times 3 \times b \times c$
$= 3b(4a + 3c)$
i. $18ax - 12bx = 6 \times 3 \times a \times x - 6 \times 2 \times b \times x$
$= 6x(3a - 2b)$
j. $8abc + 6ab = 2 \times 4 \times a \times b \times c + 2 \times 3 \times a \times b$
$= 2ab(4c + 3)$
k. $2x^2 - 3x = 2 \times x \times x - 3 \times x = x(2x - 3)$
l. $x^3 - x = x \times x \times x - x = x(x^2 - 1)$
m. $4a^2 + 12ab = 4 \times a \times a + 4 \times 3 \times a \times b$
$= 4a(a + 3b)$
n. $3x^4 - 7x^2 = 3 \times x \times x \times x \times x - 7 \times x \times x$
$= x^2(3x^2 - 7)$
o. $5y^3 + 15y^4 = 5 \times y \times y \times y + 5 \times 3 \times y \times y \times y \times y$
$= 5y^3(1 + 3y)$
p. $3ax^2 + 6ay = 3 \times a \times x \times x + 3 \times 2 \times a \times y$
$= 3a(x^2 + 2y)$
q. $3x^2y - 4xy^2 = 3 \times x \times x \times y - 4 \times x \times y \times y$
$= xy(3x - 4y)$
r. $2x^2y^2 - 6xy^3 = 2 \times x \times x \times y \times y - 2 \times 3 \times x \times y \times y \times y$
$= 2xy^2(x - 3y)$
s. $a^3b^2 + 3a^2b^3 = a \times a \times a \times b \times b + 3 \times a \times a \times b \times b \times b$
$= a^2b^2(a + 3b)$
t. $a^3bc - abc^3 = a \times a \times a \times b \times c - a \times b \times c \times c \times c$
$= abc(a^2 - c^2)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-3 Ejercicios de factor común

Ⓔ Factorice.

a. $3x + 9$
$= 3 \times x + 3 \times 3$
$= 3(x + 3)$

b. $8x + 12$
$= 4 \times 2 \times x + 4 \times 3$
$= 4(2x + 3)$

c. $42x + 54$
$= 6 \times 7 \times x + 6 \times 9$
$= 6(7x + 9)$

d. $36x + 63$
$= 9 \times 4 \times x + 9 \times 7$
$= 9(4x + 7)$

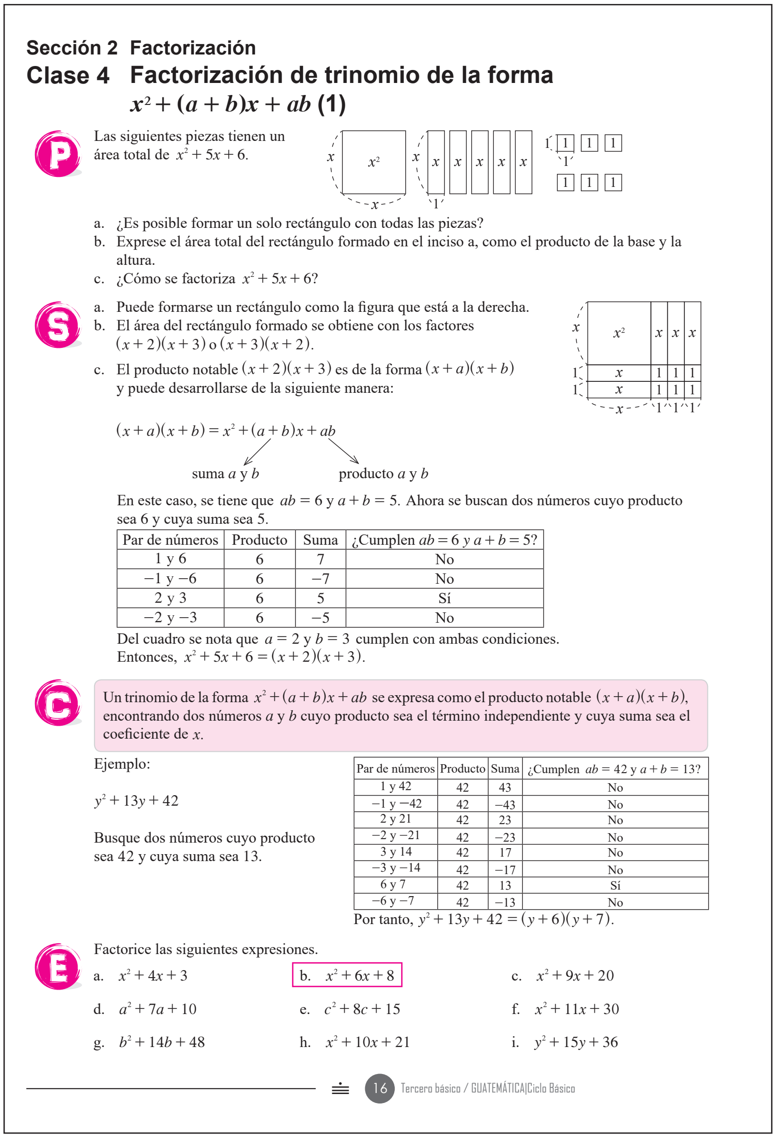
e. $35x + 28$
$= 7 \times 5 \times x + 7 \times 4$
$= 7(5x + 4)$

f. $2ab - 6ac$
$= 2 \times a \times b - 2 \times 3 \times a \times c$
$= 2a(b - 3c)$

Sección 2 Factorización

Clase 4 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ como el producto notable $(x+a)(x+b)$, donde $a>0$ y $b>0$.



Sección 2 Factorización

Clase 4 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

P Las siguientes piezas tienen un área total de x^2+5x+6.

a. ¿Es posible formar un solo rectángulo con todas las piezas?
b. Exprese el área total del rectángulo formado en el inciso a, como el producto de la base y la altura.
c. ¿Cómo se factoriza x^2+5x+6?

S
a. Puede formarse un rectángulo como la figura que está a la derecha.
b. El área del rectángulo formado se obtiene con los factores $(x+2)(x+3)$ o $(x+3)(x+2)$.
c. El producto notable $(x+2)(x+3)$ es de la forma $(x+a)(x+b)$ y puede desarrollarse de la siguiente manera:

$$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{suma } a \text{ y } b}x+\underbrace{ab}_{\text{producto } a \text{ y } b}$$

En este caso, se tiene que $ab=6$ y $a+b=5$. Ahora se buscan dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=6$ y $a+b=5$?
1 y 6	6	7	No
−1 y −6	6	−7	No
2 y 3	6	5	Sí
−2 y −3	6	−5	No

Del cuadro se nota que $a=2$ y $b=3$ cumplen con ambas condiciones.
Entonces, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

C Un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ se expresa como el producto notable $(x+a)(x+b)$, encontrando dos números a y b cuyo producto sea el término independiente y cuya suma sea el coeficiente de x.

Ejemplo:

$y^2+13y+42$

Busque dos números cuyo producto sea 42 y cuya suma sea 13.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=42$ y $a+b=13$?
1 y 42	42	43	No
−1 y −42	42	−43	No
2 y 21	42	23	No
−2 y −21	42	−23	No
3 y 14	42	17	No
−3 y −14	42	−17	No
6 y 7	42	13	Sí
−6 y −7	42	−13	No

Por tanto, $y^2+13y+42=(y+6)(y+7)$.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. x^2+4x+3
b. $\boxed{x^2+6x+8}$
c. $x^2+9x+20$
d. $a^2+7a+10$
e. $c^2+8c+15$
f. $x^2+11x+30$
g. $b^2+14b+48$
h. $x^2+10x+21$
i. $y^2+15y+36$

16 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

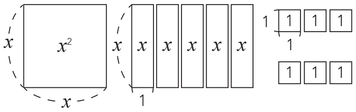
Solucionario de los ejercicios:

a. Dos números cuyo producto sea 3 y cuya suma sea 4 son 1 y 3.
$x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$
b. Dos números cuyo producto sea 8 y cuya suma sea 6 son 2 y 4.
$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$
c. Dos números cuyo producto sea 20 y cuya suma sea 9 son 4 y 5.
$x^2+9x+20=(x+4)(x+5)$
d. Dos números cuyo producto sea 10 y cuya suma sea 7 son 2 y 5.
$a^2+7a+10=(a+2)(a+5)$
e. Dos números cuyo producto sea 15 y cuya suma sea 8 son 3 y 5.
$c^2+8c+15=(c+3)(c+5)$
f. Dos números cuyo producto sea 30 y cuya suma sea 11 son 5 y 6.
$x^2+11x+30=(x+5)(x+6)$
g. Dos números cuyo producto sea 48 y cuya suma sea 14 son 6 y 8.
$b^2+14b+48=(b+6)(b+8)$
h. Dos números cuyo producto sea 21 y cuya suma sea 10 son 3 y 7.
$x^2+10x+21=(x+3)(x+7)$
i. Dos números cuyo producto sea 36 y cuya suma sea 15 son 3 y 12.
$y^2+15y+36=(y+3)(y+12)$

Fecha: dd – mm – aa

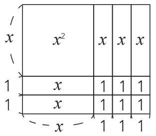
1-2-4 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

Ⓟ Área total de las piezas: x^2+5x+6



a. ¿Es posible formar un solo rectángulo?
b. Exprese el área del inciso a.
c. ¿Cómo se factoriza x^2+5x+6?

Ⓢ a.



Puede formarse un rectángulo.

b. El área del rectángulo se obtiene: $(x+2)(x+3)$ o $(x+3)(x+2)$.
Es decir, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=(x+3)(x+2)$.
c. El producto notable $(x+2)(x+3)$ es de la forma $(x+a)(x+b)$.

$$(x+a)(x+b)=x^2+\underbrace{(a+b)}_{\text{suma } a \text{ y } b}x+\underbrace{ab}_{\text{producto } a \text{ y } b}$$

En $x^2+5x+6 \longrightarrow a+b=5$ y $ab=6$

Se buscan dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea 5.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=6$ y $a+b=5$?
1 y 6	6	7	No
−1 y −6	6	−7	No
2 y 3	6	5	Sí
−2 y −3	6	−5	No

$a=2$ y $b=3$ cumplen con ambas condiciones.
Entonces, $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)$.

Ⓒ Un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ se expresa como el producto notable $(x+a)(x+b)$.

Ⓔ Factorice.

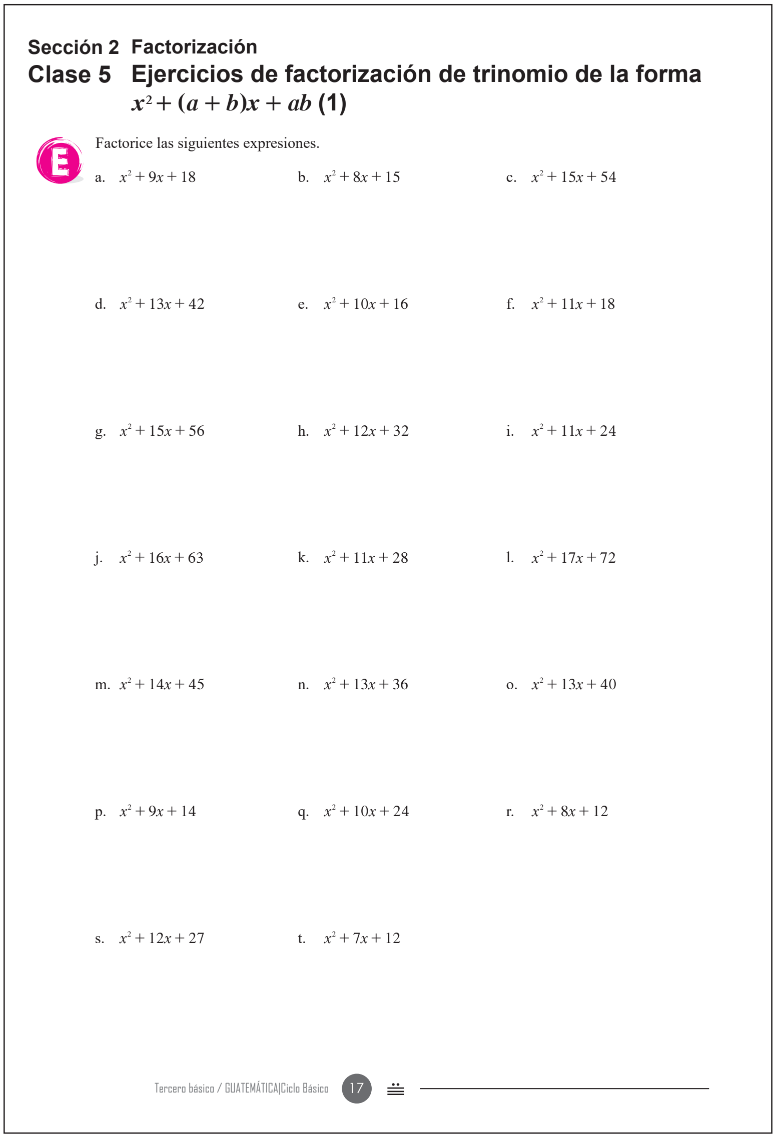
b. x^2+6x+8 $ab=8$ y $a+b=6$

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=+8$ y $a+b=6$?
1 y 8	8	9	No
−1 y −8	8	−9	No
2 y 4	8	6	Sí
−2 y −4	8	−6	No

$x^2+6x+8=(x+2)(x+4)$

Sección 2 Factorización
Clase 5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$, donde $a>0$ y $b>0$.



Sección 2 Factorización
Clase 5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2+9x+18$
b. $x^2+8x+15$
c. $x^2+15x+54$
d. $x^2+13x+42$
e. $x^2+10x+16$
f. $x^2+11x+18$
g. $x^2+15x+56$
h. $x^2+12x+32$
i. $x^2+11x+24$
j. $x^2+16x+63$
k. $x^2+11x+28$
l. $x^2+17x+72$
m. $x^2+14x+45$
n. $x^2+13x+36$
o. $x^2+13x+40$
p. $x^2+9x+14$
q. $x^2+10x+24$
r. $x^2+8x+12$
s. $x^2+12x+27$
t. $x^2+7x+12$

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2+9x+18=(x+3)(x+6)$
b. $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$
c. $x^2+15x+54=(x+6)(x+9)$
d. $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$
e. $x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$
f. $x^2+11x+18=(x+2)(x+9)$
g. $x^2+15x+56=(x+7)(x+8)$
h. $x^2+12x+32=(x+4)(x+8)$
i. $x^2+11x+24=(x+3)(x+8)$
j. $x^2+16x+63=(x+7)(x+9)$
k. $x^2+11x+28=(x+4)(x+7)$
l. $x^2+17x+72=(x+8)(x+9)$
m. $x^2+14x+45=(x+5)(x+9)$
n. $x^2+13x+36=(x+4)(x+9)$
o. $x^2+13x+40=(x+5)(x+8)$
p. $x^2+9x+14=(x+2)(x+7)$
q. $x^2+10x+24=(x+4)(x+6)$
r. $x^2+8x+12=(x+2)(x+6)$
s. $x^2+12x+27=(x+3)(x+9)$
t. $x^2+7x+12=(x+3)(x+4)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-5 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (1)

Ⓔ Factorice.

a. $x^2+9x+18=(x+3)(x+6)$

b. $x^2+8x+15=(x+3)(x+5)$

c. $x^2+15x+54=(x+6)(x+9)$

d. $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

e. $x^2+10x+16=(x+2)(x+8)$

f. $x^2+11x+18=(x+2)(x+9)$

g. $x^2+15x+56=(x+7)(x+8)$

h. $x^2+12x+32=(x+4)(x+8)$

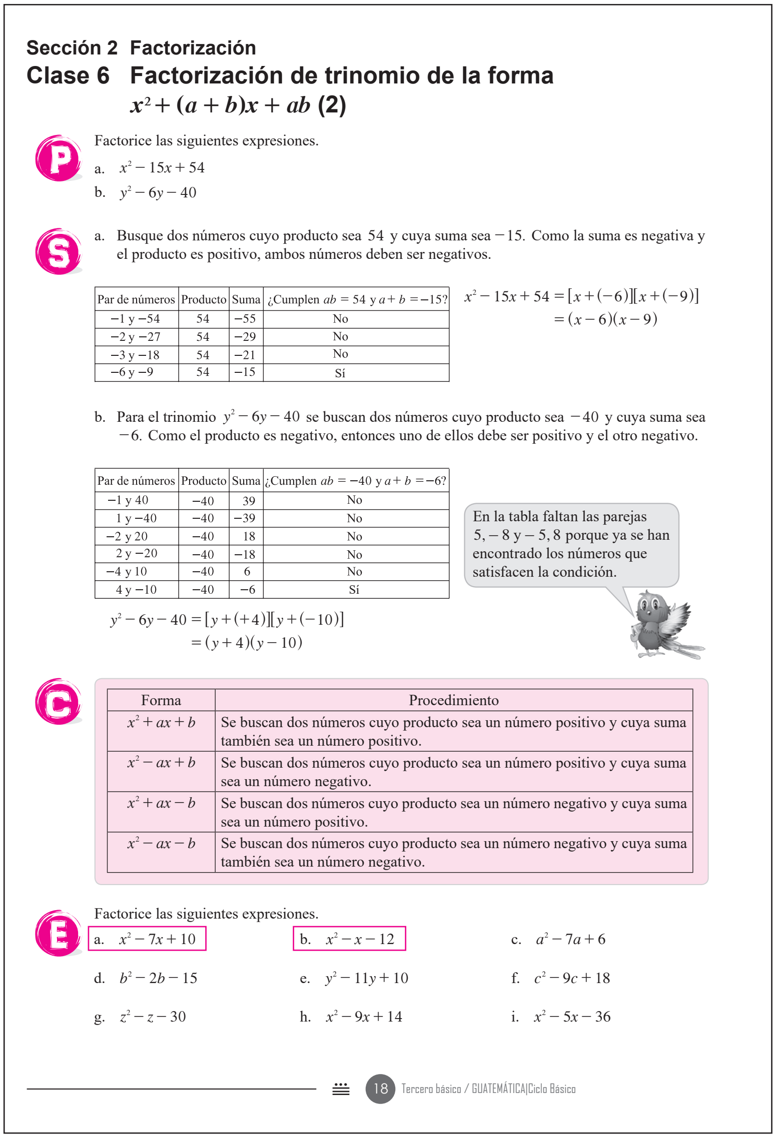
i. $x^2+11x+24=(x+3)(x+8)$

Sección 2 Factorización

Clase 6 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (2)

Aprendizaje esperado:

Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.



Sección 2 Factorización

Clase 6 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (2)

P Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2-15x+54$

b. $y^2-6y-40$

S a. Busque dos números cuyo producto sea 54 y cuya suma sea -15. Como la suma es negativa y el producto es positivo, ambos números deben ser negativos.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=54$ y $a+b=-15$?
−1 y −54	54	−55	No
−2 y −27	54	−29	No
−3 y −18	54	−21	No
−6 y −9	54	−15	Sí

$$\begin{aligned} x^2-15x+54 &= [x+(-6)][x+(-9)] \\ &= (x-6)(x-9) \end{aligned}$$

b. Para el trinomio $y^2-6y-40$ se buscan dos números cuyo producto sea -40 y cuya suma sea -6. Como el producto es negativo, entonces uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=-40$ y $a+b=-6$?
−1 y 40	−40	39	No
1 y −40	−40	−39	No
−2 y 20	−40	18	No
2 y −20	−40	−18	No
−4 y 10	−40	6	No
4 y −10	−40	−6	Sí

En la tabla faltan las parejas $5,-8$ y $-5,8$ porque ya se han encontrado los números que satisfacen la condición.

$$\begin{aligned} y^2-6y-40 &= [y+(+4)][y+(-10)] \\ &= (y+4)(y-10) \end{aligned}$$

C

Forma	Procedimiento
x^2+ax+b	Se buscan dos números cuyo producto sea un número positivo y cuya suma también sea un número positivo.
x^2-ax+b	Se buscan dos números cuyo producto sea un número positivo y cuya suma sea un número negativo.
x^2+ax-b	Se buscan dos números cuyo producto sea un número negativo y cuya suma sea un número positivo.
x^2-ax-b	Se buscan dos números cuyo producto sea un número negativo y cuya suma también sea un número negativo.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2-7x+10$ b. x^2-x-12 c. a^2-7a+6

d. $b^2-2b-15$ e. $y^2-11y+10$ f. $c^2-9c+18$

g. z^2-z-30 h. $x^2-9x+14$ i. $x^2-5x-36$

Solucionario de los ejercicios:

a. Dos números cuyo producto sea 10 y cuya suma sea -7 son -2 y -5.

$$\begin{aligned} x^2-7x+10 &= [x+(-2)][x+(-5)] \\ &= (x-2)(x-5) \end{aligned}$$

b. Dos números cuyo producto sea -12 y cuya suma sea -1 son 3 y -4.

$$\begin{aligned} x^2-x-12 &= [x+(+3)][x+(-4)] \\ &= (x+3)(x-4) \end{aligned}$$

c. Dos números cuyo producto sea 6 y cuya suma sea -7 son -1 y -6.

$$\begin{aligned} a^2-7a+6 &= [a+(-1)][a+(-6)] \\ &= (a-1)(a-6) \end{aligned}$$

d. Dos números cuyo producto sea -15 y cuya suma sea -2 son 3 y -5.

$$\begin{aligned} b^2-2b-15 &= [b+(+3)][b+(-5)] \\ &= (b+3)(b-5) \end{aligned}$$

e. Dos números cuyo producto sea 10 y cuya suma sea -11 son -1 y -10.

$$\begin{aligned} y^2-11y+10 &= [y+(-1)][y+(-10)] \\ &= (y-1)(y-10) \end{aligned}$$

f. Dos números cuyo producto sea 18 y cuya suma sea -9 son -3 y -6.

$$\begin{aligned} c^2-9c+18 &= [c+(-3)][c+(-6)] \\ &= (c-3)(c-6) \end{aligned}$$

g. Dos números cuyo producto sea -30 y cuya suma sea -1 son 5 y -6.

$$\begin{aligned} z^2-z-30 &= [z+(+5)][z+(-6)] \\ &= (z+5)(z-6) \end{aligned}$$

h. Dos números cuyo producto sea 14 y cuya suma sea -9 son -2 y -7.

$$\begin{aligned} x^2-9x+14 &= [x+(-2)][x+(-7)] \\ &= (x-2)(x-7) \end{aligned}$$

i. Dos números cuyo producto sea 36 y cuya suma sea -5 son 4 y 9.

$$\begin{aligned} x^2-5x-36 &= [x+(+4)][x+(-9)] \\ &= (x+4)(x-9) \end{aligned}$$

Fecha: dd – mm – aa

1-2-6 Factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (2)

Ⓟ Factorice.

a. $x^2-15x+54$ b. $y^2-6y-40$

Ⓢ a. Dos números cuyo producto sea 54 y suma sea −15. Como la suma es negativa y el producto es positivo, ambos números deben ser negativos.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=54$ y $a+b=-15$?
−1 y −54	54	−55	No
−2 y −27	54	−29	No
−3 y −18	54	−21	No
−6 y −9	54	−15	Sí

$$\begin{aligned} x^2-15x+54 &= [x+(-6)][x+(-9)] \\ &= (x-6)(x-9) \end{aligned}$$

b. Dos números cuyo producto sea −40 y suma sea −6. Como el producto es negativo uno de ellos debe ser positivo y el otro negativo.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen $ab=40$ y $a+b=-6$?
−1 y 40	−40	39	No
1 y −40	−40	−39	No
−2 y 20	−40	18	No
2 y −20	−40	−18	No
−4 y 10	−40	6	No
4 y −10	−40	−6	Sí

$$\begin{aligned} y^2-6y-40 &= [y+(+4)][y+(-10)] \\ &= (y+4)(y-10) \end{aligned}$$

Ⓔ Factorice.

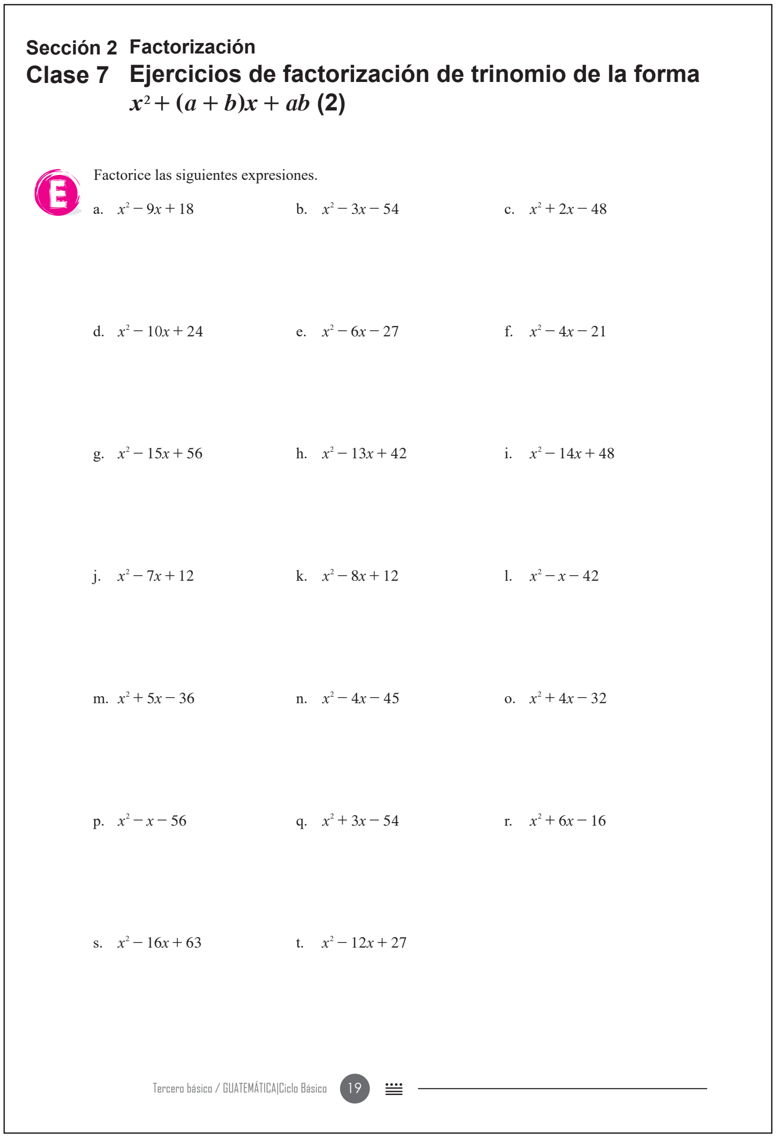
a. $$\begin{aligned} x^2-7x+10 &= [x+(-2)][x+(-5)] \\ &= (x-2)(x-5) \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x^2-x-12 &= [x+(+3)][x+(-4)] \\ &= (x+3)(x-4) \end{aligned}$$

Sección 2 Factorización

Clase 7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (2)

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$.



Sección 2 Factorización
Clase 7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma $x^2+(a+b)x+ab$ (2)

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2-9x+18$ b. $x^2-3x-54$ c. $x^2+2x-48$

d. $x^2-10x+24$ e. $x^2-6x-27$ f. $x^2-4x-21$

g. $x^2-15x+56$ h. $x^2-13x+42$ i. $x^2-14x+48$

j. $x^2-7x+12$ k. $x^2-8x+12$ l. x^2-x-42

m. $x^2+5x-36$ n. $x^2-4x-45$ o. $x^2+4x-32$

p. x^2-x-56 q. $x^2+3x-54$ r. $x^2+6x-16$

s. $x^2-16x+63$ t. $x^2-12x+27$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 19

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2-9x+18=[x+(-3)][x+(-6)]$
$=(x-3)(x-6)$

b. $x^2-3x-54=[x+(+6)][x+(-9)]$
$=(x+6)(x-9)$

c. $x^2+2x-48=[x+(-6)][x+(+8)]$
$=(x-6)(x+8)$

d. $x^2-10x+24=[x+(-4)][x+(-6)]$
$=(x-4)(x-6)$

e. $x^2-6x-27=[x+(+3)][x+(-9)]$
$=(x+3)(x-9)$

f. $x^2-4x-21=[x+(+3)][x+(-7)]$
$=(x+3)(x-7)$

g. $x^2-15x+56=[x+(-7)][x+(-8)]$
$=(x-7)(x-8)$

h. $x^2-13x+42=[x+(-6)][x+(-7)]$
$=(x-6)(x-7)$

i. $x^2-14x+48=[x+(-6)][x+(-8)]$
$=(x-6)(x-8)$

j. $x^2-7x+12=[x+(-3)][x+(-4)]$
$=(x-3)(x-4)$

k. $x^2-8x+12=[x+(-2)][x+(-6)]$
$=(x-2)(x-6)$

l. $x^2-x-42=[x+(+6)][x+(-7)]$
$=(x+6)(x-7)$

m. $x^2+5x-36=[x+(-4)][x+(+9)]$
$=(x-4)(x+9)$

n. $x^2-4x-45=[x+(+5)][x+(-9)]$
$=(x+5)(x-9)$

o. $x^2+4x-32=[x+(-4)][x+(+8)]$
$=(x-4)(x+8)$

p. $x^2-x-56=[x+(+7)][x+(-8)]$
$=(x+7)(x-8)$

q. $x^2+3x-54=[x+(-6)][x+(+9)]$
$=(x-6)(x+9)$

r. $x^2+6x-16=[x+(-2)][x+(+8)]$
$=(x-2)(x+8)$

Ver ejercicios restantes en la página G69.

Fecha: dd – mm – aa
1-2-7 Ejercicios de factorización de trinomio de la forma
$x^2+(a+b)x+ab$ (2)

Ⓔ Factorice.

a. $x^2-9x+18=[x+(-3)][x+(-6)]$
$=(x-3)(x-6)$

b. $x^2-3x-54=[x+(+6)][x+(-9)]$
$=(x+6)(x-9)$

c. $x^2+2x-48=[x+(-6)][x+(+8)]$
$=(x-6)(x+8)$

d. $x^2-10x+24=[x+(-4)][x+(-6)]$
$=(x-4)(x-6)$

e. $x^2-6x-27=[x+(+3)][x+(-9)]$
$=(x+3)(x-9)$

f. $x^2-4x-21=[x+(+3)][x+(-7)]$
$=(x+3)(x-7)$

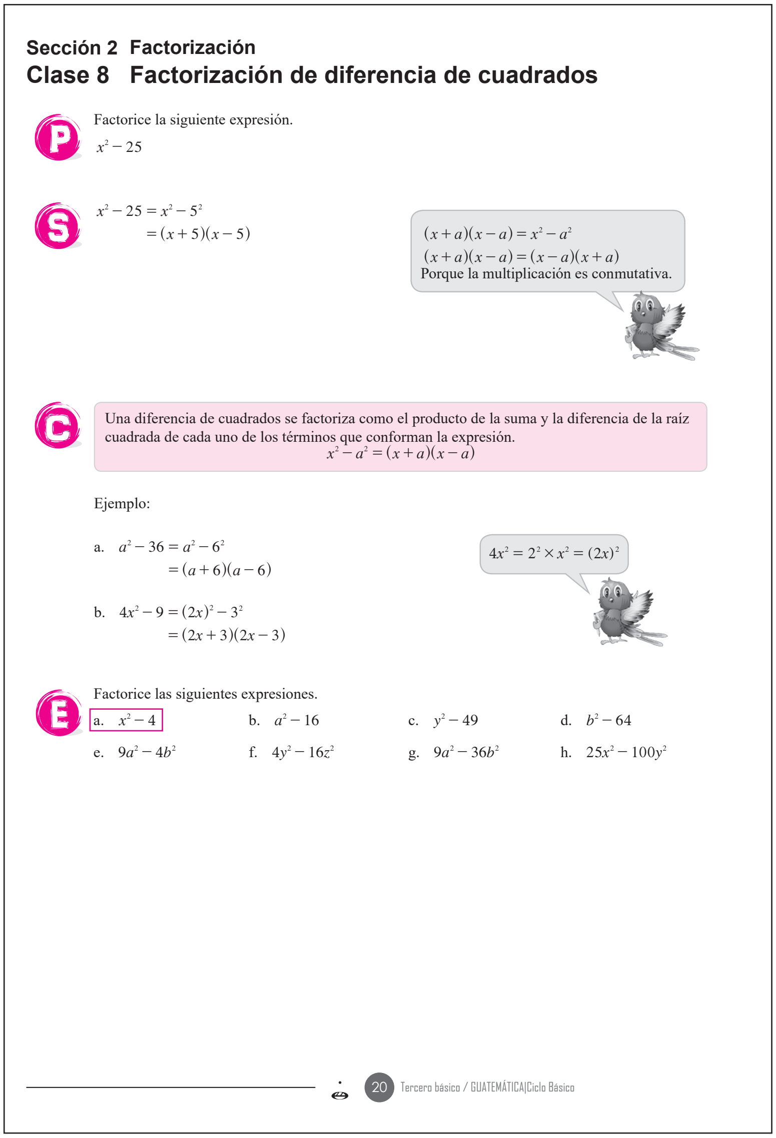
g. $x^2-15x+56=[x+(-7)][x+(-8)]$
$=(x-7)(x-8)$

h. $x^2-13x+42=[x+(-6)][x+(-7)]$
$=(x-6)(x-7)$

i. $x^2-14x+48=[x+(-6)][x+(-8)]$
$=(x-6)(x-8)$

Sección 2 Factorización
Clase 8 Factorización de diferencia de cuadrados

Aprendizaje esperado:
Factoriza una diferencia de cuadrados.



Sección 2 Factorización
Clase 8 Factorización de diferencia de cuadrados

P Factorice la siguiente expresión.
x^2-25

S $x^2-25=x^2-5^2$
$=(x+5)(x-5)$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
$(x+a)(x-a)=(x-a)(x+a)$
Porque la multiplicación es conmutativa.

C Una diferencia de cuadrados se factoriza como el producto de la suma y la diferencia de la raíz cuadrada de cada uno de los términos que conforman la expresión.
$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

Ejemplo:

a. $a^2-36=a^2-6^2$
$=(a+6)(a-6)$

b. $4x^2-9=(2x)^2-3^2$
$=(2x+3)(2x-3)$

$4x^2=2^2\times x^2=(2x)^2$

E Factorice las siguientes expresiones.

a. x^2-4 b. a^2-16 c. y^2-49 d. b^2-64
e. $9a^2-4b^2$ f. $4y^2-16z^2$ g. $9a^2-36b^2$ h. $25x^2-100y^2$

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2-4=x^2-2^2=(x+2)(x-2)$
b. $a^2-16=a^2-4^2=(a+4)(a-4)$
c. $y^2-49=y^2-7^2=(y+7)(y-7)$
d. $b^2-64=b^2-8^2=(b+8)(b-8)$
e. $9a^2-4b^2=(3a)^2-(2b)^2=(3a+2b)(3a-2b)$
f. $4y^2-16z^2=(2y)^2-(4z)^2=(2y+4z)(2y-4z)$
g. $9a^2-36b^2=(3a)^2-(6b)^2=(3a+6b)(3a-6b)$
h. $25x^2-100y^2=(5x)^2-(10y)^2$
$=(5x+10y)(5x-10y)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-8 Factorización de diferencia de cuadrados

Ⓟ Factorice.
x^2-25

Ⓢ $x^2-25=x^2-5^2$
$=(x+5)(x-5)$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$
$(x+a)(x-a)=(x-a)(x+a)$
Porque la multiplicación es conmutativa.

Ⓒ $x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

Ejemplo:

a. $a^2-36=a^2-6^2$
$=(a+6)(a-6)$

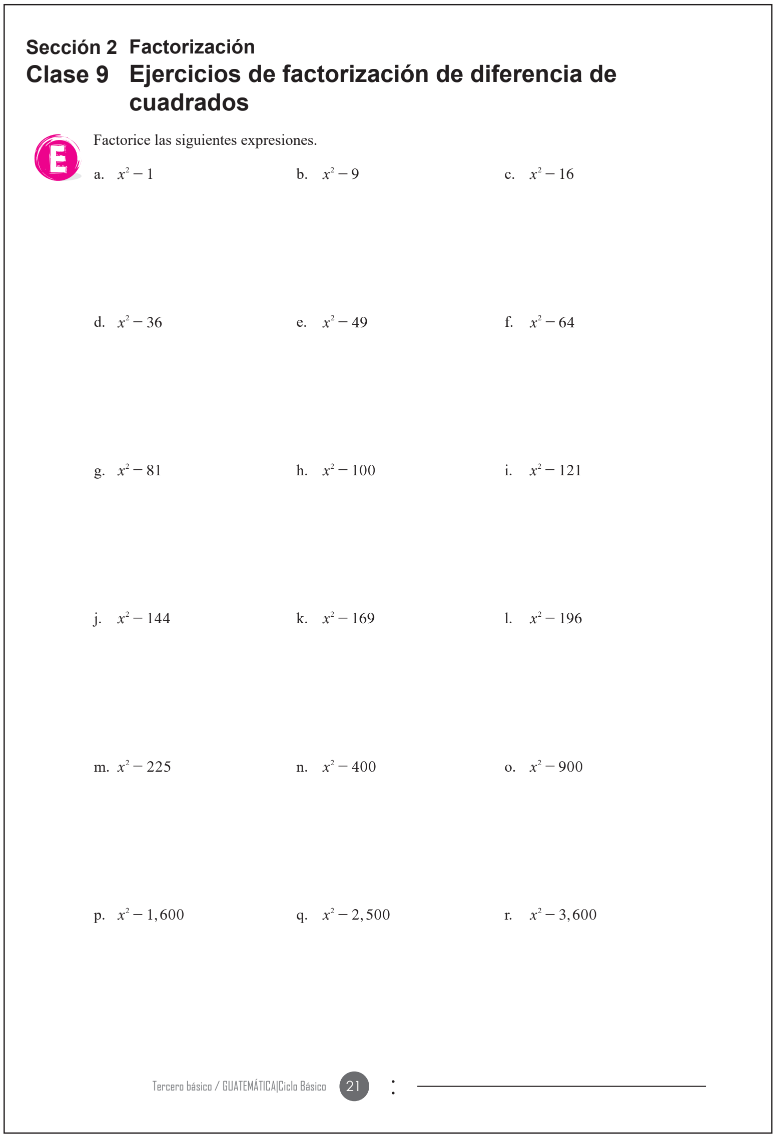
b. $4x^2-9=(2x)^2-3^2$
$=(2x+3)(2x-3)$

Ⓔ Factorice.

a. $x^2-4=x^2-2^2$
$=(x+2)(x-2)$

Sección 2 Factorización
Clase 9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados

Aprendizaje esperado:
Factoriza una diferencia de cuadrados.



Sección 2 Factorización
Clase 9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados

Ⓔ Factorice las siguientes expresiones.

a. x^2-1 b. x^2-9 c. x^2-16

d. x^2-36 e. x^2-49 f. x^2-64

g. x^2-81 h. x^2-100 i. x^2-121

j. x^2-144 k. x^2-169 l. x^2-196

m. x^2-225 n. x^2-400 o. x^2-900

p. $x^2-1,600$ q. $x^2-2,500$ r. $x^2-3,600$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 21

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$
b. $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$
c. $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$
d. $x^2-36=x^2-6^2=(x+6)(x-6)$
e. $x^2-49=x^2-7^2=(x+7)(x-7)$
f. $x^2-64=x^2-8^2=(x+8)(x-8)$
g. $x^2-81=x^2-9^2=(x+9)(x-9)$
h. $x^2-100=x^2-10^2=(x+10)(x-10)$
i. $x^2-121=x^2-11^2=(x+11)(x-11)$
j. $x^2-144=x^2-12^2=(x+12)(x-12)$
k. $x^2-169=x^2-13^2=(x+13)(x-13)$
l. $x^2-196=x^2-14^2=(x+14)(x-14)$
m. $x^2-225=x^2-15^2=(x+15)(x-15)$
n. $x^2-400=x^2-20^2=(x+20)(x-20)$
o. $x^2-900=x^2-30^2=(x+30)(x-30)$
p. $x^2-1,600=x^2-40^2=(x+40)(x-40)$
q. $x^2-2,500=x^2-50^2=(x+50)(x-50)$
r. $x^2-3,600=x^2-60^2=(x+60)(x-60)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-9 Ejercicios de factorización de diferencia de cuadrados

Ⓔ Factorice.

a. $x^2-1=x^2-1^2=(x+1)(x-1)$

b. $x^2-9=x^2-3^2=(x+3)(x-3)$

c. $x^2-16=x^2-4^2=(x+4)(x-4)$

d. $x^2-36=x^2-6^2=(x+6)(x-6)$

e. $x^2-49=x^2-7^2=(x+7)(x-7)$

f. $x^2-64=x^2-8^2=(x+8)(x-8)$

g. $x^2-81=x^2-9^2=(x+9)(x-9)$

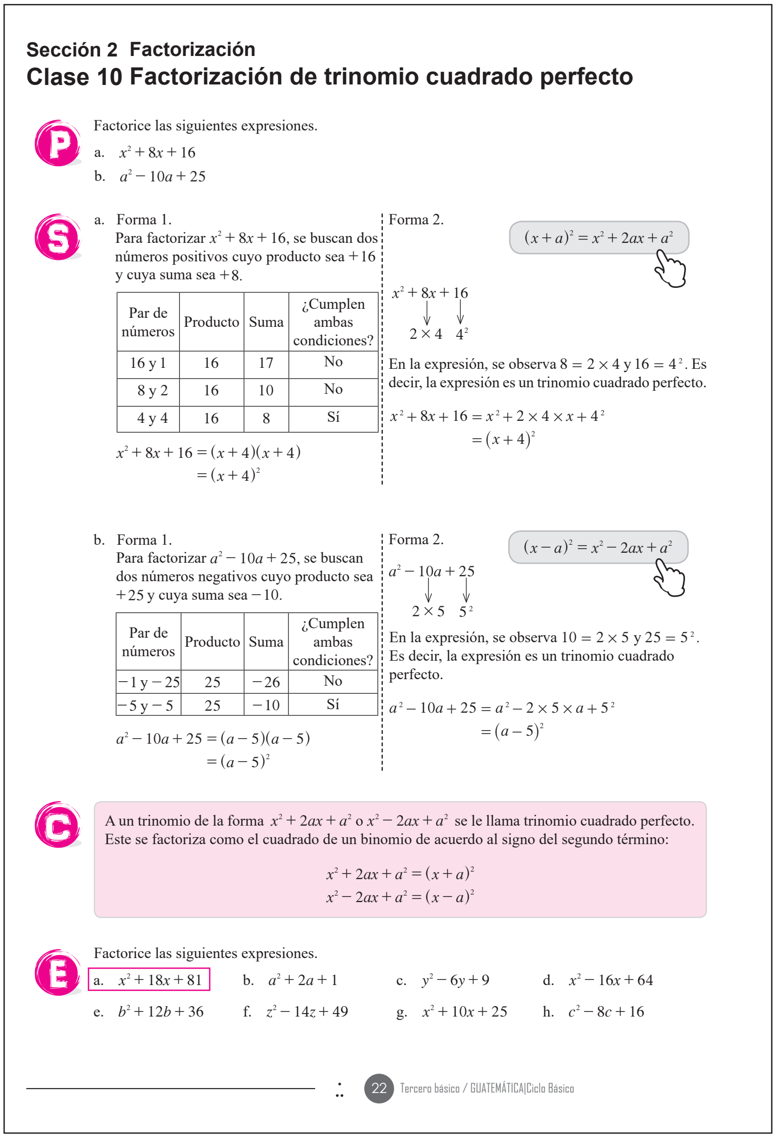
h. $x^2-100=x^2-10^2=(x+10)(x-10)$

i. $x^2-121=x^2-11^2=(x+11)(x-11)$

j. $x^2-144=x^2-12^2=(x+12)(x-12)$

Sección 2 Factorización
Clase 10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio cuadrado perfecto.



Sección 2 Factorización
Clase 10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto

P Factorice las siguientes expresiones.
a. $x^2+8x+16$
b. $a^2-10a+25$

S a. Forma 1.
Para factorizar $x^2+8x+16$, se buscan dos números positivos cuyo producto sea $+16$ y cuya suma sea $+8$.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen ambas condiciones?
16 y 1	16	17	No
8 y 2	16	10	No
4 y 4	16	8	Sí

$$x^2+8x+16=(x+4)(x+4)$$
$$=(x+4)^2$$

Forma 2.

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

$$\underset{2\times 4}{x^2+8x}+\underset{4^2}{16}$$

En la expresión, se observa $8=2\times4$ y $16=4^2$. Es decir, la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

$$x^2+8x+16=x^2+2\times4\times x+4^2$$
$$=(x+4)^2$$

b. Forma 1.
Para factorizar $a^2-10a+25$, se buscan dos números negativos cuyo producto sea $+25$ y cuya suma sea -10.

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen ambas condiciones?
-1 y -25	25	-26	No
-5 y -5	25	-10	Sí

$$a^2-10a+25=(a-5)(a-5)$$
$$=(a-5)^2$$

Forma 2.

$(x-a)^2=x^2-2ax+a^2$

$$\underset{2\times 5}{a^2-10a}+\underset{5^2}{25}$$

En la expresión, se observa $10=2\times5$ y $25=5^2$. Es decir, la expresión es un trinomio cuadrado perfecto.

$$a^2-10a+25=a^2-2\times5\times a+5^2$$
$$=(a-5)^2$$

C A un trinomio de la forma $x^2+2ax+a^2$ o $x^2-2ax+a^2$ se le llama trinomio cuadrado perfecto. Este se factoriza como el cuadrado de un binomio de acuerdo al signo del segundo término:

$$x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$$
$$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$$

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2+18x+81$ b. a^2+2a+1 c. y^2-6y+9 d. $x^2-16x+64$
e. $b^2+12b+36$ f. $z^2-14z+49$ g. $x^2+10x+25$ h. $c^2-8c+16$

22 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2+18x+81=x^2+2\times9\times x+9^2=(x+9)^2$
b. $a^2+2a+1=a^2+2\times1\times a+1^2=(a+1)^2$
c. $y^2-6y+9=y^2-2\times3\times y+3^2=(y-3)^2$
d. $x^2-16x+64=x^2-2\times8\times x+8^2=(x-8)^2$
e. $b^2+12b+36=b^2+2\times6\times b+6^2=(b+6)^2$
f. $z^2-14z+49=z^2-2\times7\times z+7^2=(z-7)^2$
g. $x^2+10x+25=x^2+2\times5\times x+5^2=(x+5)^2$
h. $c^2-8c+16=c^2-2\times4\times c+4^2=(c-4)^2$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-10 Factorización de trinomio cuadrado perfecto

Ⓟ Factorice.
a. $x^2+8x+16$
b. $a^2-10a+25$

Ⓢ a. Forma 1.
$x^2+8x+16 \xrightarrow{\qquad\qquad} ab=16,\ a+b=8$

Par de números	Producto	Suma	¿Cumplen ambas condiciones?
16 y 1	16	17	No
8 y 2	16	10	No
4 y 4	16	8	Sí

$$x^2+8x+16=(x+4)(x+4)$$
$$=(x+4)^2$$

Forma 2. $x^2+\underset{2\times4}{8x}+\underset{4^2}{16}=(x+4)^2$

$$x^2+8x+16=x^2+2\times4\times x+4^2$$
$$=(x+4)^2$$

b. Forma 2. $a^2-\underset{2\times5}{10a}+\underset{5^2}{25}=(a-5)^2$

$$a^2-10a+25=a^2-2\times5\times a+5^2$$
$$=(a-5)^2$$

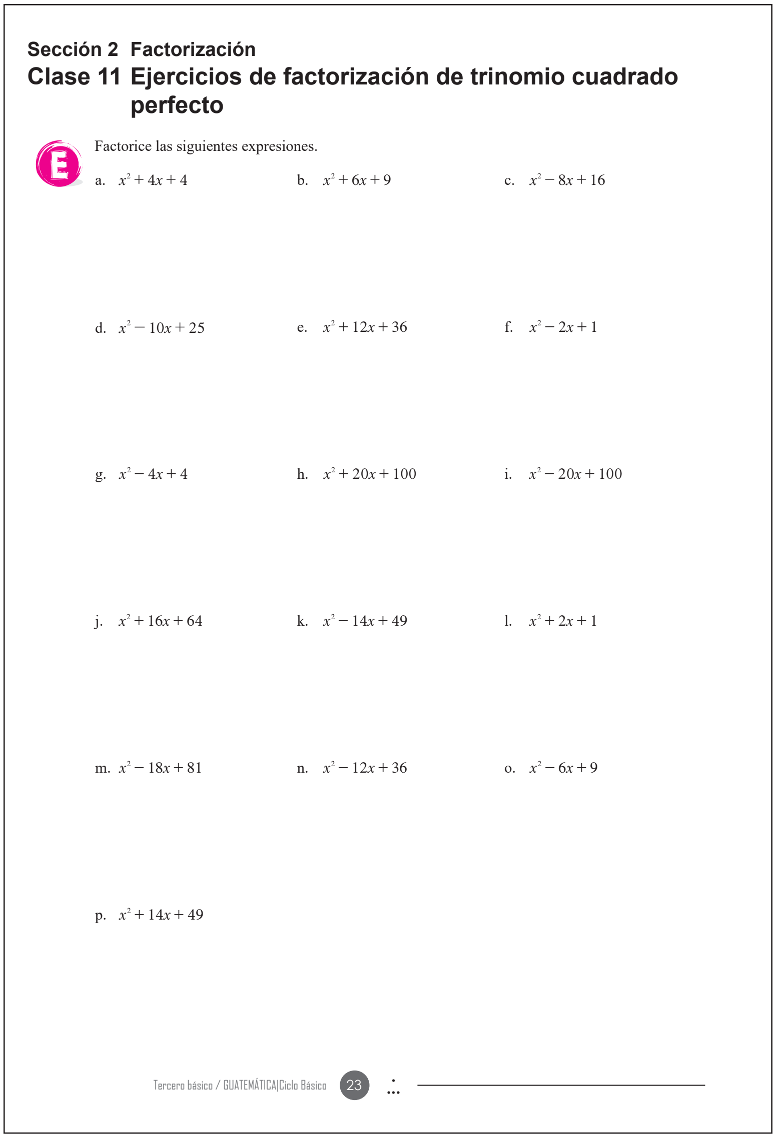
Ⓒ $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$
$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

Ⓔ Factorice.
a. $x^2+18x+81=x^2+2\times9\times x+9^2$
$=(x+9)^2$

Sección 2 Factorización

Clase 11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio cuadrado perfecto.



Sección 2 Factorización

Clase 11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $x^2 + 4x + 4$ b. $x^2 + 6x + 9$ c. $x^2 - 8x + 16$

d. $x^2 - 10x + 25$ e. $x^2 + 12x + 36$ f. $x^2 - 2x + 1$

g. $x^2 - 4x + 4$ h. $x^2 + 20x + 100$ i. $x^2 - 20x + 100$

j. $x^2 + 16x + 64$ k. $x^2 - 14x + 49$ l. $x^2 + 2x + 1$

m. $x^2 - 18x + 81$ n. $x^2 - 12x + 36$ o. $x^2 - 6x + 9$

p. $x^2 + 14x + 49$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 23

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x + 2)^2$
b. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x + 3)^2$
c. $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = (x - 4)^2$
d. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x - 5)^2$
e. $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x + 6)^2$
f. $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x - 1)^2$
g. $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x - 2)^2$
h. $x^2 + 20x + 100 = x^2 + 2 \times 10 \times x + 10^2 = (x + 10)^2$
i. $x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \times 10 \times x + 10^2 = (x - 10)^2$
j. $x^2 + 16x + 64 = x^2 + 2 \times 8 \times x + 8^2 = (x + 8)^2$
k. $x^2 - 14x + 49 = x^2 - 2 \times 7 \times x + 7^2 = (x - 7)$
l. $x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x + 1)^2$
m. $x^2 - 18x + 81 = x^2 - 2 \times 9 \times x + 9^2 = (x - 9)^2$
n. $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x - 6)^2$
o. $x^2 - 6x + 9 = x^2 - 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x - 3)^2$
p. $x^2 + 14x + 49 = x^2 + 2 \times 7 \times x + 7^2 = (x + 7)^2$

Fecha: dd – mm – aa

1-2-11 Ejercicios de factorización de trinomio cuadrado perfecto

Ⓔ Factorice.

a. $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x + 2)^2$

b. $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \times 3 \times x + 3^2 = (x + 3)^2$

c. $x^2 - 8x + 16 = x^2 - 2 \times 4 \times x + 4^2 = (x - 4)^2$

d. $x^2 - 10x + 25 = x^2 - 2 \times 5 \times x + 5^2 = (x - 5)^2$

e. $x^2 + 12x + 36 = x^2 + 2 \times 6 \times x + 6^2 = (x + 6)^2$

f. $x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \times 1 \times x + 1^2 = (x - 1)^2$

g. $x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2 \times 2 \times x + 2^2 = (x - 2)^2$

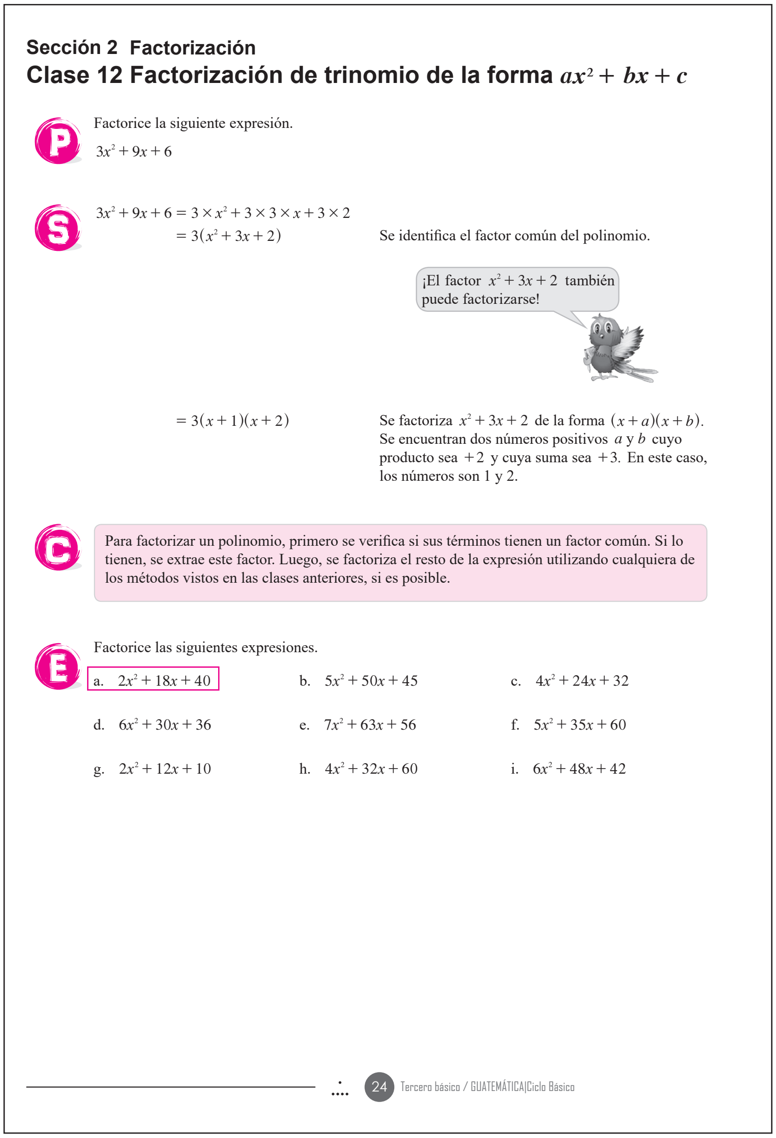
h. $x^2 + 20x + 100 = x^2 + 2 \times 10 \times x + 10^2 = (x + 10)^2$

i. $x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \times 10 \times x + 10^2 = (x - 10)^2$

Sección 2 Factorización

Clase 12 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$.



Sección 2 Factorización

Clase 12 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

P Factorice la siguiente expresión.
$3x^2 + 9x + 6$

S $3x^2 + 9x + 6 = 3 \times x^2 + 3 \times 3 \times x + 3 \times 2$
$= 3(x^2 + 3x + 2)$ Se identifica el factor común del polinomio.

¡El factor $x^2 + 3x + 2$ también puede factorizarse!

$= 3(x + 1)(x + 2)$ Se factoriza $x^2 + 3x + 2$ de la forma $(x + a)(x + b)$. Se encuentran dos números positivos a y b cuyo producto sea $+2$ y cuya suma sea $+3$. En este caso, los números son 1 y 2.

C Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2 + 18x + 40$
b. $5x^2 + 50x + 45$
c. $4x^2 + 24x + 32$
d. $6x^2 + 30x + 36$
e. $7x^2 + 63x + 56$
f. $5x^2 + 35x + 60$
g. $2x^2 + 12x + 10$
h. $4x^2 + 32x + 60$
i. $6x^2 + 48x + 42$

24 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2 + 18x + 40 = 2 \times x^2 + 2 \times 9 \times x + 2 \times 20$
$= 2(x^2 + 9x + 20) = 2(x + 4)(x + 5)$

b. $5x^2 + 50x + 45 = 5 \times x^2 + 5 \times 10 \times x + 5 \times 9$
$= 5(x^2 + 10x + 9) = 5(x + 1)(x + 9)$

c. $4x^2 + 24x + 32 = 4 \times x^2 + 4 \times 6 \times x + 4 \times 8$
$= 4(x^2 + 6x + 8) = 4(x + 2)(x + 4)$

d. $6x^2 + 30x + 36 = 6 \times x^2 + 6 \times 5 \times x + 6 \times 6$
$= 6(x^2 + 5x + 6) = 6(x + 2)(x + 3)$

e. $7x^2 + 63x + 56 = 7 \times x^2 + 7 \times 9 \times x + 7 \times 8$
$= 7(x^2 + 9x + 8) = 7(x + 1)(x + 8)$

f. $5x^2 + 35x + 60 = 5 \times x^2 + 5 \times 7 \times x + 5 \times 12$
$= 5(x^2 + 7x + 12) = 5(x + 3)(x + 4)$

g. $2x^2 + 12x + 10 = 2 \times x^2 + 2 \times 6 \times x + 2 \times 5$
$= 2(x^2 + 6x + 5) = 2(x + 1)(x + 5)$

h. $4x^2 + 32x + 60 = 4 \times x^2 + 4 \times 8 \times x + 4 \times 15$
$= 4(x^2 + 8x + 15) = 4(x + 3)(x + 5)$

i. $6x^2 + 48x + 42 = 6 \times x^2 + 6 \times 8 \times x + 6 \times 7$
$= 6(x^2 + 8x + 7) = 6(x + 1)(x + 7)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-12 Factorización de trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$

Ⓟ Factorice.
$3x^2 + 9x + 6$

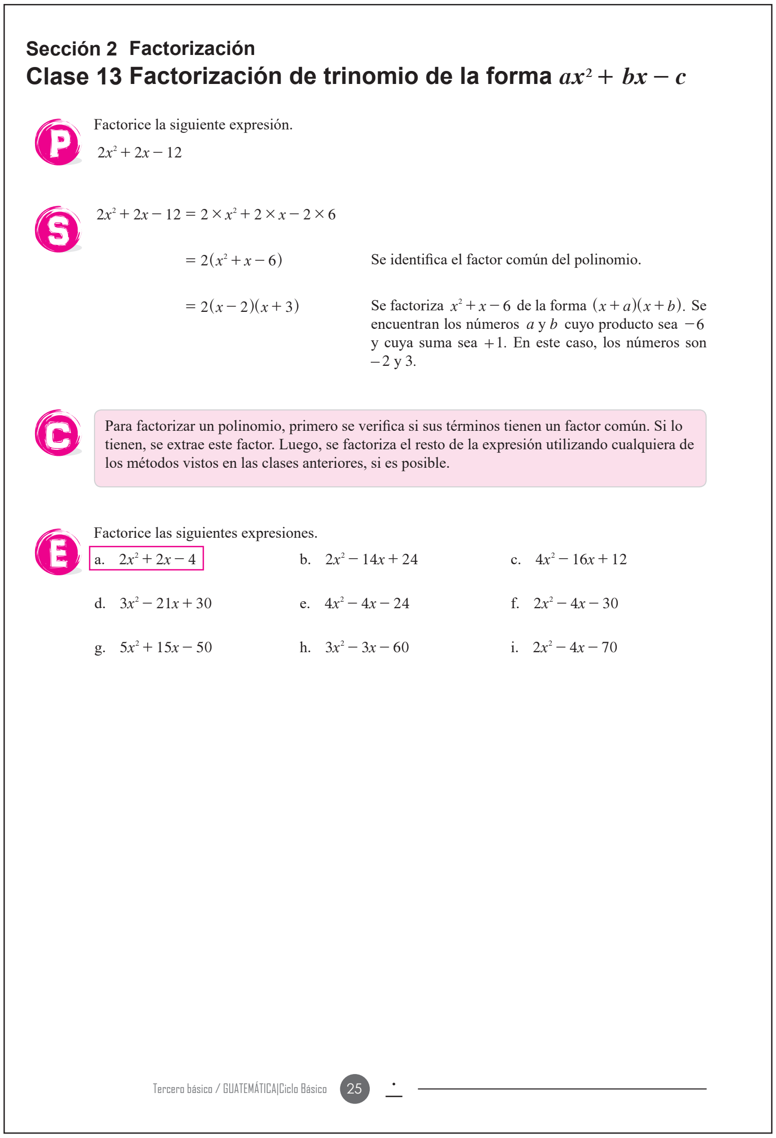
Ⓢ $3x^2 + 9x + 6 = 3 \times x^2 + 3 \times 3 \times x + 3 \times 2$
$= 3(x^2 + 3x + 2)$ Se identifica el factor común.
$= 3(x + 2)(x + 1)$ Se factoriza $x^2 + 3x + 2$ de la forma $(x + a)(x + b)$, buscando dos números a y b que satisfacen:
$ab = 2$
$a + b = 3$

Ⓒ Para factorizar un polinomio:
- Se extrae el factor común, si tiene.
- Se factoriza el resto de la expresión, si es posible.

Ⓔ Factorice.
a. $2x^2 + 18x + 40$
$= 2 \times x^2 + 2 \times 9x + 2 \times 20$
$= 2(x^2 + 9x + 20)$
$= 2(x + 4)(x + 5)$

Sección 2 Factorización
Clase 13 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx-c

Aprendizaje esperado:
Factoriza un trinomio de la forma ax^2+bx-c.



Sección 2 Factorización

Clase 13 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx-c

P Factorice la siguiente expresión.
$2x^2+2x-12$

S $2x^2+2x-12=2\times x^2+2\times x-2\times 6$

$=2(x^2+x-6)$ Se identifica el factor común del polinomio.

$=2(x-2)(x+3)$ Se factoriza x^2+x-6 de la forma $(x+a)(x+b)$. Se encuentran los números a y b cuyo producto sea -6 y cuya suma sea $+1$. En este caso, los números son -2 y 3.

C Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2+2x-4$
b. $2x^2-14x+24$
c. $4x^2-16x+12$
d. $3x^2-21x+30$
e. $4x^2-4x-24$
f. $2x^2-4x-30$
g. $5x^2+15x-50$
h. $3x^2-3x-60$
i. $2x^2-4x-70$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 25

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2+2x-4=2\times x^2+2\times x-2\times 2$
$=2(x^2+x-2)=2(x-1)(x+2)$

b. $2x^2-14x+24=2\times x^2-2\times 7\times x+2\times 12$
$=2(x^2-7x+12)=2(x-3)(x-4)$

c. $4x^2-16x+12=4\times x^2-4\times 4\times x+4\times 3$
$=4(x^2-4x+3)=4(x-1)(x-3)$

d. $3x^2-21x+30=3\times x^2-3\times 7\times x+3\times 10$
$=3(x^2-7x+10)=3(x-2)(x-5)$

e. $4x^2-4x-24=4\times x^2-4\times x-4\times 6$
$=4(x^2-x-6)=4(x+2)(x-3)$

f. $2x^2-4x-30=2\times x^2-2\times 2\times x-2\times 15$
$=2(x^2-2x-15)=2(x+3)(x-5)$

g. $5x^2+15x-50=5\times x^2+5\times 3\times x-5\times 10$
$=5(x^2+3x-10)=5(x-2)(x+5)$

h. $3x^2-3x-60=3\times x^2-3\times x-3\times 20$
$=3(x^2-x-20)=3(x+4)(x-5)$

i. $2x^2-4x-70=2\times x^2-2\times 2\times x-2\times 35$
$=2(x^2-2x-35)=2(x+5)(x-7)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-13 Factorización de trinomio de la forma ax^2+bx-c

Ⓟ Factorice.
$2x^2+2x-12$

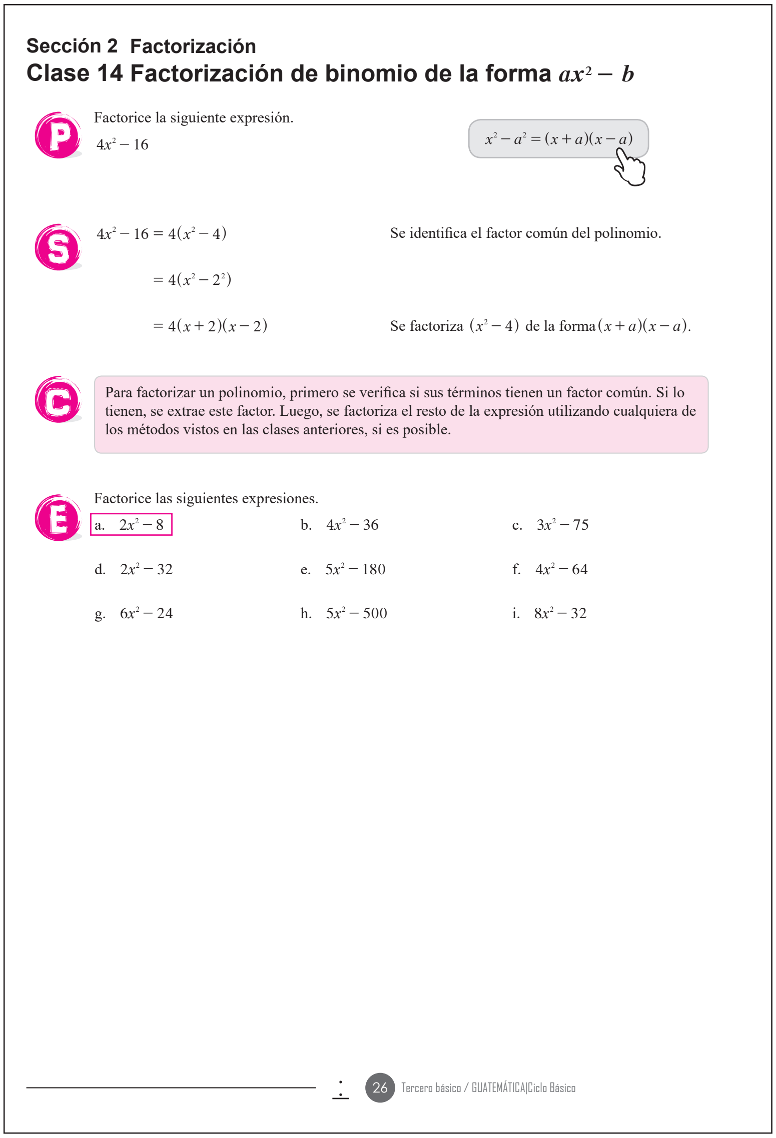
Ⓢ $2x^2+2x-12=2\times x^2+2\times x-2\times 6$
$=2(x^2+x-6)$ Se identifica el factor común.
$=2(x+3)(x-2)$ Se factoriza x^2+x-6 de la forma $(x+a)(x+b)$, buscando dos números a y b que satisfacen:
$ab=-6$
$a+b=+1$

Ⓔ Factorice.

a. $2x^2+2x-4=2\times x^2+2\times x-2\times 2$
$=2(x^2+x-2)$
$=2(x-1)(x+2)$

Sección 2 Factorización
Clase 14 Factorización de binomio de la forma $ax^2 - b$

Aprendizaje esperado:
Factoriza un binomio de la forma $ax^2 - b$.



Sección 2 Factorización
Clase 14 Factorización de binomio de la forma $ax^2 - b$

P Factorice la siguiente expresión.
$4x^2 - 16$

$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

S
$4x^2 - 16 = 4(x^2 - 4)$ Se identifica el factor común del polinomio.
$= 4(x^2 - 2^2)$
$= 4(x+2)(x-2)$ Se factoriza $(x^2 - 4)$ de la forma $(x+a)(x-a)$.

C Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2 - 8$	b. $4x^2 - 36$	c. $3x^2 - 75$
d. $2x^2 - 32$	e. $5x^2 - 180$	f. $4x^2 - 64$
g. $6x^2 - 24$	h. $5x^2 - 500$	i. $8x^2 - 32$

26 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4) = 2(x^2 - 2^2)$
$= 2(x+2)(x-2)$
b. $4x^2 - 36 = 4(x^2 - 9) = 4(x^2 - 3^2)$
$= 4(x+3)(x-3)$
c. $3x^2 - 75 = 3(x^2 - 25) = 3(x^2 - 5^2)$
$= 3(x+5)(x-5)$
d. $2x^2 - 32 = 2(x^2 - 16) = 2(x^2 - 4^2)$
$= 2(x+4)(x-4)$
e. $5x^2 - 180 = 5(x^2 - 36) = 5(x^2 - 6^2)$
$= 5(x+6)(x-6)$
f. $4x^2 - 64 = 4(x^2 - 16) = 4(x^2 - 4^2)$
$= 4(x+4)(x-4)$
g. $6x^2 - 24 = 6(x^2 - 4) = 6(x^2 - 2^2)$
$= 6(x+2)(x-2)$
h. $5x^2 - 500 = 5(x^2 - 100) = 5(x^2 - 10^2)$
$= 5(x+10)(x-10)$
i. $8x^2 - 32 = 8(x^2 - 4) = 8(x^2 - 2^2)$
$= 8(x+2)(x-2)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-14 Factorización de binomio de la forma $ax^2 - b$

Ⓟ Factorice.
$4x^2 - 16$

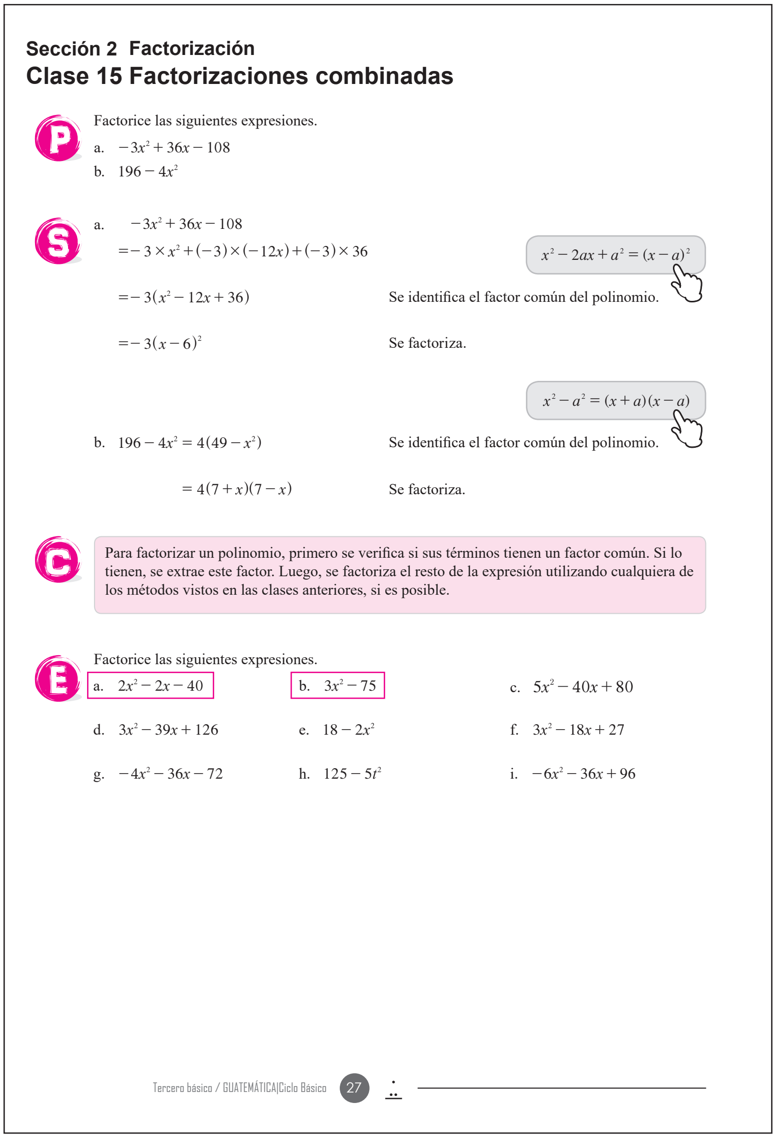
Ⓢ $4x^2 - 16 = 4(x^2 - 4)$ Se identifica el factor común.
$= 4(x^2 - 2^2)$
$= 4(x+2)(x-2)$ Se factoriza $x^2 - 4$ de la forma $(x+a)(x-a)$.

Ⓔ Factorice.

a. $2x^2 - 8 = 2(x^2 - 4)$
$= 2(x^2 - 2^2)$
$= 2(x+2)(x-2)$

Sección 2 Factorización
Clase 15 Factorizaciones combinadas

Aprendizaje esperado:
Factoriza diferentes tipos de expresiones.



Sección 2 Factorización

Clase 15 Factorizaciones combinadas

P Factorice las siguientes expresiones.

a. $-3x^2+36x-108$
b. $196-4x^2$

S a. $-3x^2+36x-108$

$=-3\times x^2+(-3)\times(-12x)+(-3)\times 36$

$x^2-2ax+a^2=(x-a)^2$

$=-3(x^2-12x+36)$ Se identifica el factor común del polinomio.

$=-3(x-6)^2$ Se factoriza.

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

b. $196-4x^2=4(49-x^2)$ Se identifica el factor común del polinomio.

$=4(7+x)(7-x)$ Se factoriza.

C Para factorizar un polinomio, primero se verifica si sus términos tienen un factor común. Si lo tienen, se extrae este factor. Luego, se factoriza el resto de la expresión utilizando cualquiera de los métodos vistos en las clases anteriores, si es posible.

E Factorice las siguientes expresiones.

a. $2x^2-2x-40$	b. $3x^2-75$	c. $5x^2-40x+80$
d. $3x^2-39x+126$	e. $18-2x^2$	f. $3x^2-18x+27$
g. $-4x^2-36x-72$	h. $125-5t^2$	i. $-6x^2-36x+96$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 27

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2-2x-40=2\times x^2-2\times x-2\times 20$
$=2(x^2-x-20)=2(x+4)(x-5)$

b. $3x^2-75=3(x^2-25)=3(x^2-5^2)$
$=3(x+5)(x-5)$

c. $5x^2-40x+80=5\times x^2-5\times 8\times x+5\times 16$
$=5(x^2-8x+16)=5(x-4)^2$

d. $3x^2-39x+126=3\times x^2-3\times 13\times x+3\times 42$
$=3(x^2-13x+42)=3(x-6)(x-7)$

e. $18-2x^2=2(9-x^2)=2(3^2-x^2)$
$=2(3+x)(3-x)$

f. $3x^2-18x+27=3\times x^2-3\times 6\times x+3\times 9$
$=3(x^2-6x+9)=3(x-3)^2$

g. $-4x^2-36x-72=-4\times x^2-4\times 9\times x-4\times 18$
$=-4(x^2+9x+18)=-4(x+3)(x+6)$

h. $125-5t^2=5(25-t^2)=5(5^2-t^2)=5(5+t)(5-t)$

i. $-6x^2-36x+96=-6\times x^2-6\times 6\times x+6\times 16$
$=-6(x^2+6x-16)=-6(x-2)(x+8)$

Fecha: dd – mm – aa
1-2-15 Factorizaciones combinadas

Ⓟ Factorice.

a. $-3x^2+36x-108$
b. $196-4x^2$

Ⓢ a. $-3x^2+36x-108$
$=-3\times x^2+(-3)\times(-12x)+(-3)\times 36$
$=-3(x^2-12x+36)$ Se identifica el factor común.
$=-3(x-6)^2$ Se factoriza.

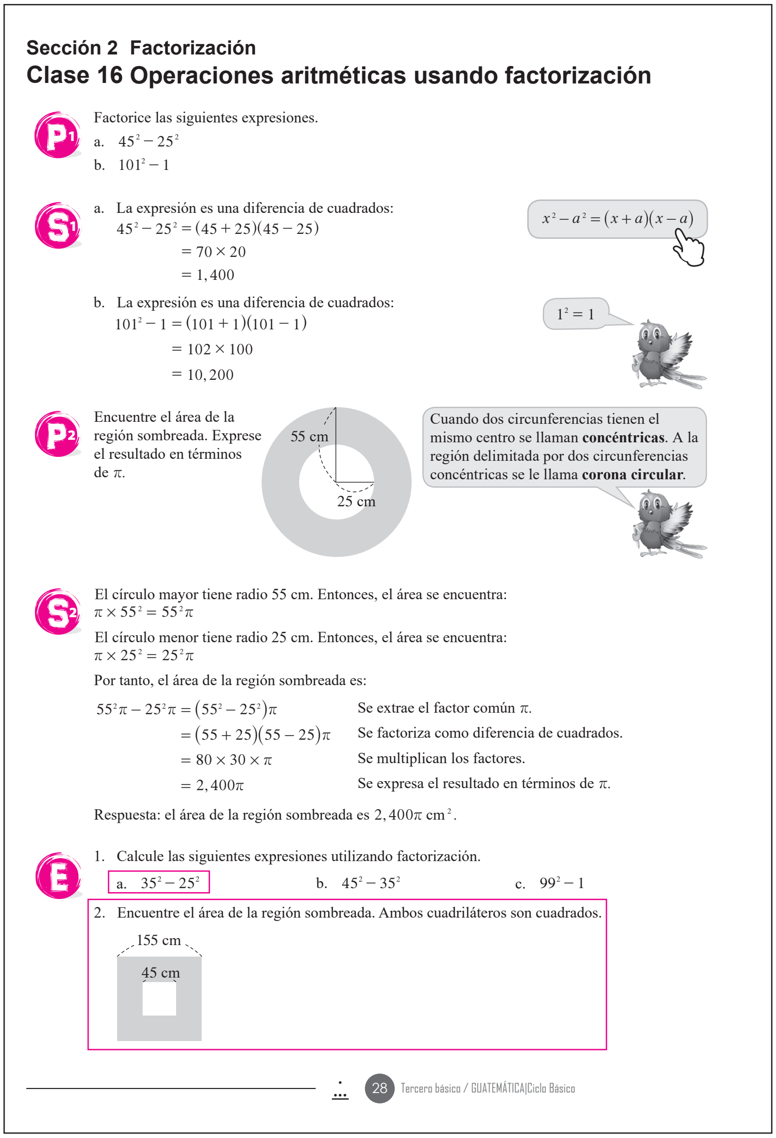
b. $196-4x^2$ Se identifica el factor común.
$=4(49-x^2)$
$=4(7+x)(7-x)$ Se factoriza.

Ⓔ Factorice.
a. $2x^2-2x-40$
$=2\times x^2-2\times x-2\times 20$
$=2(x^2-x-20)$
$=2(x+4)(x-5)$

b. $3x^2-75$
$=3(x^2-25)$
$=3(x+5)(x-5)$

Sección 2 Factorización
Clase 16 Operaciones aritméticas usando factorización

Aprendizaje esperado:
Calcula una expresión usando factorización.



Sección 2 Factorización
Clase 16 Operaciones aritméticas usando factorización

P1 Factorice las siguientes expresiones.
a. 45^2-25^2
b. 101^2-1

S1 a. La expresión es una diferencia de cuadrados:
$45^2-25^2=(45+25)(45-25)$
$=70\times20$
$=1,400$

$x^2-a^2=(x+a)(x-a)$

b. La expresión es una diferencia de cuadrados:
$101^2-1=(101+1)(101-1)$
$=102\times100$
$=10,200$

$1^2=1$

P2 Encuentre el área de la región sombreada. Exprese el resultado en términos de π.

Cuando dos circunferencias tienen el mismo centro se llaman **concéntricas**. A la región delimitada por dos circunferencias concéntricas se le llama **corona circular**.

S2 El círculo mayor tiene radio 55 cm. Entonces, el área se encuentra:
$\pi\times55^2=55^2\pi$
El círculo menor tiene radio 25 cm. Entonces, el área se encuentra:
$\pi\times25^2=25^2\pi$
Por tanto, el área de la región sombreada es:

$55^2\pi-25^2\pi=(55^2-25^2)\pi$ Se extrae el factor común π.
$=(55+25)(55-25)\pi$ Se factoriza como diferencia de cuadrados.
$=80\times30\times\pi$ Se multiplican los factores.
$=2,400\pi$ Se expresa el resultado en términos de π.

Respuesta: el área de la región sombreada es $2,400\pi$ cm^2.

E 1. Calcule las siguientes expresiones utilizando factorización.
a. 35^2-25^2 b. 45^2-35^2 c. 99^2-1

2. Encuentre el área de la región sombreada. Ambos cuadriláteros son cuadrados.

28 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $35^2-25^2=(35+25)(35-25)=60\times10$
$=600$
b. $45^2-35^2=(45+35)(45-35)=80\times10$
$=800$
c. $99^2-1=(99+1)(99-1)=100\times98$
$=9,800$

2. $155^2-45^2=(155+45)(155-45)=200\times110$
$=22,000$
R: $22,000$ cm^2

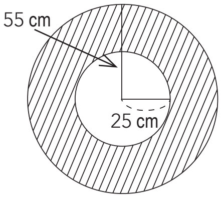
Fecha: dd – mm – aa
1-2-16 Operaciones aritméticas usando factorización

Ⓟ1 Factorice.
a. 45^2-25^2
b. 101^2-1

Ⓢ1 a. $45^2-25^2=(45+25)(45-25)$
$=70\times20$
$=1,400$

b. $101^2-1=(101+1)(101-1)$ $\boxed{1^2=1}$
$=102\times100$
$=10,200$

Ⓟ2 Encuentre el área de la región sombreada. Exprese el resultado en términos de π.



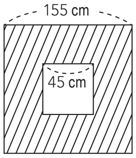
Ⓢ2 Círculo mayor
radio $=55$ (cm)
Área $=\pi\times55^2$
$=55^2\pi$

Círculo menor
radio $=25$ (cm)
Área $=\pi\times25^2$
$=25^2\pi$

Área de la región sombreada:
$55^2\pi-25^2\pi=(55^2-25^2)\pi$ Factor común π
$=(55+25)(55-25)\pi$ Diferencia de cuadrados
$=80\times30\times\pi$
$=2,400\pi$ R: $2,400\pi$ cm^2

Ⓔ 1. Calcule utilizando factorización.
a. $35^2-25^2=(35+25)(35-25)=60\times10=600$

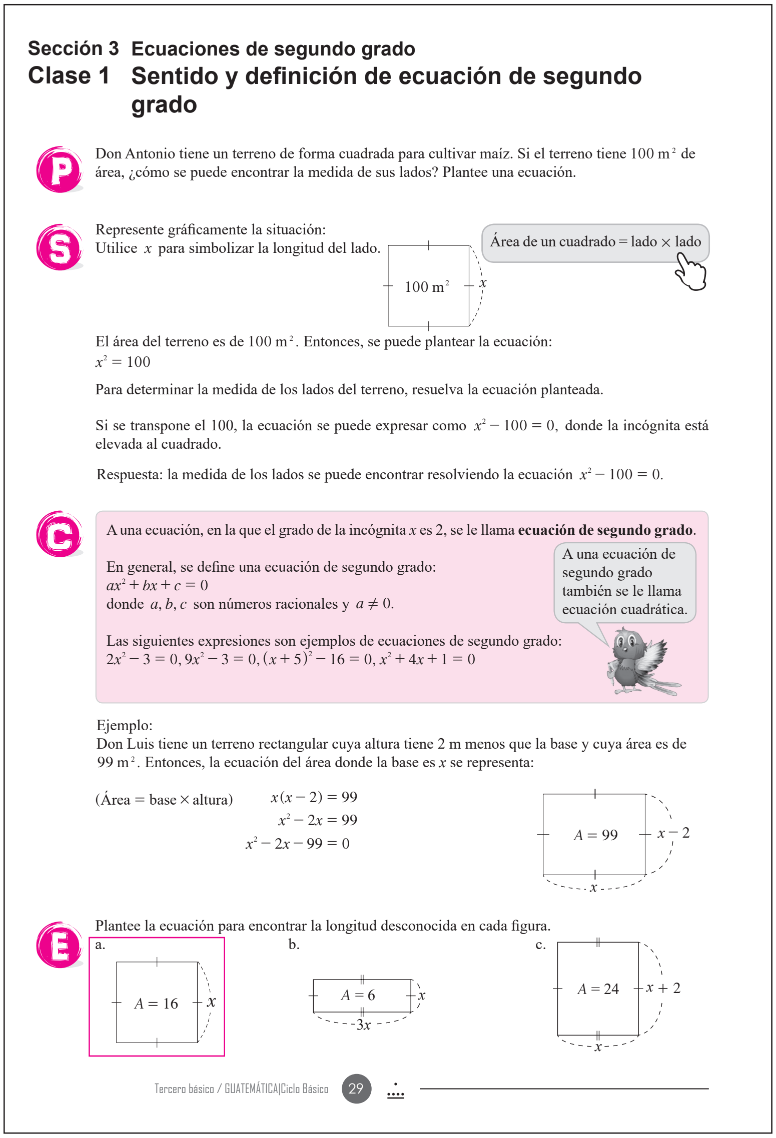
2. Encuentre el área de la región sombreada conformada por cuadrados.



$155^2-45^2=(155+45)(155-45)$
$=200\times110$
$=22,000$
R: $22,000$ cm^2

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Plantea una ecuación de segundo grado.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado

P Don Antonio tiene un terreno de forma cuadrada para cultivar maíz. Si el terreno tiene 100 m² de área, ¿cómo se puede encontrar la medida de sus lados? Plantee una ecuación.

S Represente gráficamente la situación:
Utilice x para simbolizar la longitud del lado.

Área de un cuadrado = lado × lado

100 m²
x

El área del terreno es de 100 m². Entonces, se puede plantear la ecuación:
$x^2 = 100$

Para determinar la medida de los lados del terreno, resuelva la ecuación planteada.

Si se transpone el 100, la ecuación se puede expresar como $x^2 - 100 = 0$, donde la incógnita está elevada al cuadrado.

Respuesta: la medida de los lados se puede encontrar resolviendo la ecuación $x^2 - 100 = 0$.

C A una ecuación, en la que el grado de la incógnita x es 2, se le llama **ecuación de segundo grado**.

En general, se define una ecuación de segundo grado:
$ax^2 + bx + c = 0$
donde a, b, c son números racionales y $a \neq 0$.

A una ecuación de segundo grado también se le llama ecuación cuadrática.

Las siguientes expresiones son ejemplos de ecuaciones de segundo grado:
$2x^2 - 3 = 0, 9x^2 - 3 = 0, (x+5)^2 - 16 = 0, x^2 + 4x + 1 = 0$

Ejemplo:
Don Luis tiene un terreno rectangular cuya altura tiene 2 m menos que la base y cuya área es de 99 m². Entonces, la ecuación del área donde la base es x se representa:

(Área = base × altura)
$$x(x-2) = 99$$
$$x^2 - 2x = 99$$
$$x^2 - 2x - 99 = 0$$

A = 99
$x - 2$
x

E Plantee la ecuación para encontrar la longitud desconocida en cada figura.

a. A = 16, x
b. A = 6, x, $3x$
c. A = 24, $x + 2$, x

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 29

Solucionario de los ejercicios:

a.
$$x^2 = 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$

b.
$$3x \times x = 6$$
$$3x^2 = 6$$
$$3x^2 - 6 = 0$$

c.
$$x(x+2) = 24$$
$$x^2 + 2x = 24$$
$$x^2 + 2x - 24 = 0$$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-1 Sentido y definición de ecuación de segundo grado

Ⓟ Si un terreno de forma cuadrada mide 100 m², ¿cómo se puede encontrar la medida de sus lados? Plantee una ecuación.

Ⓢ Área del terreno: 100 m²
Área del cuadrado: $x \times x = x^2$
Ecuación: $x^2 = 100$

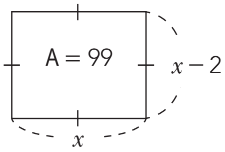
Área de un cuadrado = lado × lado

Le ecuación se puede expresar: $x^2 - 100 = 100 - 100$
$$x^2 - 100 = 0$$

R: La medida de sus lados se puede encontrar resolviendo $x^2 - 100 = 0$

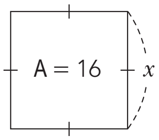
Ⓒ A una ecuación, en la que el grado de la incógnita x es 2, se le llama ecuación de segundo grado o ecuación cuadrática. En general, se define:
$$ax^2 + bx + c = 0$$
donde a, b, c son números racionales y $a \neq 0$.

Ejemplo:
Un terreno rectangular cuya altura tiene 2 m menos que la base y cuya área es de 99 m². Entonces, la ecuación del área donde la base es x:
(Área = base × altura) $x(x-2) = 99$
$$x^2 - 2x = 99$$
$$x^2 - 2x - 99 = 0$$



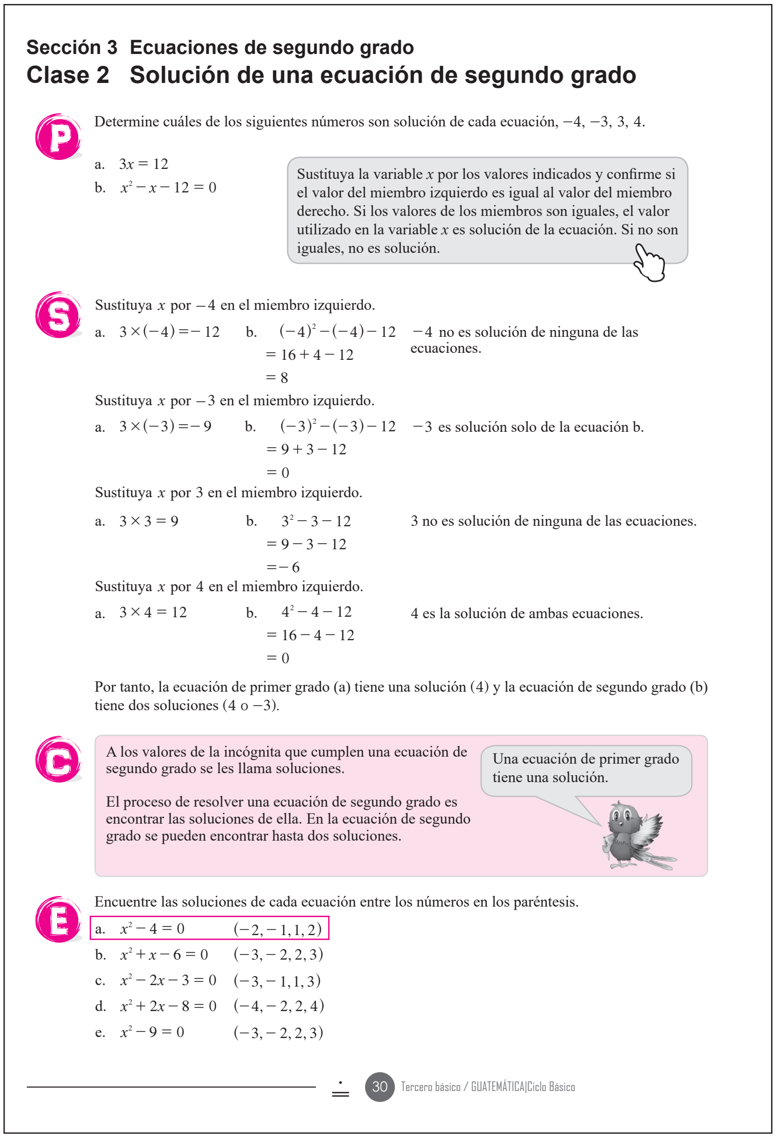
Ⓔ Plantee la ecuación para la longitud desconocida en la figura.

a. $x \times x = x^2$ (Área del cuadrado) = 16
$$x^2 = 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 2 Solución de una ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Encuentra las soluciones de una ecuación de segundo grado al sustituir los valores dados.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 2 Solución de una ecuación de segundo grado

P Determine cuáles de los siguientes números son solución de cada ecuación, −4, −3, 3, 4.

a. $3x = 12$
b. $x^2 - x - 12 = 0$

Sustituya la variable x por los valores indicados y confirme si el valor del miembro izquierdo es igual al valor del miembro derecho. Si los valores de los miembros son iguales, el valor utilizado en la variable x es solución de la ecuación. Si no son iguales, no es solución.

S Sustituya x por −4 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times (-4) = -12$ b. $(-4)^2 - (-4) - 12$ $= 16 + 4 - 12$ $= 8$ −4 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Sustituya x por −3 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times (-3) = -9$ b. $(-3)^2 - (-3) - 12$ $= 9 + 3 - 12$ $= 0$ −3 es solución solo de la ecuación b.

Sustituya x por 3 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times 3 = 9$ b. $3^2 - 3 - 12$ $= 9 - 3 - 12$ $= -6$ 3 no es solución de ninguna de las ecuaciones.

Sustituya x por 4 en el miembro izquierdo.

a. $3 \times 4 = 12$ b. $4^2 - 4 - 12$ $= 16 - 4 - 12$ $= 0$ 4 es la solución de ambas ecuaciones.

Por tanto, la ecuación de primer grado (a) tiene una solución (4) y la ecuación de segundo grado (b) tiene dos soluciones (4 o −3).

C A los valores de la incógnita que cumplen una ecuación de segundo grado se les llama soluciones.

El proceso de resolver una ecuación de segundo grado es encontrar las soluciones de ella. En la ecuación de segundo grado se pueden encontrar hasta dos soluciones.

Una ecuación de primer grado tiene una solución.

E Encuentre las soluciones de cada ecuación entre los números en los paréntesis.

a. $x^2 - 4 = 0$ $(-2, -1, 1, 2)$
b. $x^2 + x - 6 = 0$ $(-3, -2, 2, 3)$
c. $x^2 - 2x - 3 = 0$ $(-3, -1, 1, 3)$
d. $x^2 + 2x - 8 = 0$ $(-4, -2, 2, 4)$
e. $x^2 - 9 = 0$ $(-3, -2, 2, 3)$

30 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Se sustituye x por -2.
$x^2 - 4$
$= (-2)^2 - 4$
$= 4 - 4$
$= 0$
-2 es solución.

Se sustituye x por -1.
$x^2 - 4$
$= (-1)^2 - 4$
$= 1 - 4$
$= -3$
-1 es solución.

Se sustituye x por 1.
$x^2 - 4$
$= 1^2 - 4$
$= 1 - 4$
$= -3$
1 no es solución.
R: -2 y 2

Se sustituye x por 2.
$x^2 - 4$
$= 2^2 - 4$
$= 4 - 4$
$= 0$
2 es solución.

b. Se sustituye x por -3.
$x^2 + x - 6$
$= (-3)^2 + (-3) - 6$
$= 9 - 3 - 6$
$= 0$
-3 es solución.

Se sustituye x por -2.
$x^2 + x - 6$
$= (-2)^2 + (-2) - 6$
$= 4 - 2 - 6$
$= -4$
-2 no es solución.

Se sustituye x por 2.
$x^2 + x - 6$
$= 2^2 + 2 - 6$
$= 4 + 2 - 6$
$= 0$
2 es solución.
R: -3 y 2

Se sustituye x por 3.
$x^2 + x - 6$
$= 3^2 + 3 - 6$
$= 9 + 3 - 6$
$= 6$
3 no es solución.

Ver ejercicios restantes en la página G69.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-2 Solución de una ecuación de segundo grado
Ⓟ Determine cuáles son solución de cada ecuación, $-4, -3, 3, 4$.
a. $3x = 12$ b. $x^2 - x - 12 = 0$
Ⓢ Sustituya x por −4 en el miembro izquierdo.
a. $3 \times (-4) = -12$
-4 no es solución.
b. $(-4)^2 - (-4) - 12$
$= 16 + 4 - 12$
$= 8$
-4 no es solución.

Sustituya x por −3.
a. $3 \times (-3) = -9$
-3 no es solución.
b. $(-3)^2 - (-3) - 12$
$= 9 + 3 - 12$
$= 0$
-3 es solución.

Sustituya x por 3.
a. $3 \times 3 = 9$
3 no es solución.
b. $3^2 - 3 - 12$
$= 9 - 3 - 12$
$= -6$
3 no es solución.

Sustituya x por 4.
a. $3 \times 4 = 12$
4 es solución.
b. $4^2 - 4 - 12$
$= 16 - 4 - 12 = 0$
4 es solución.

Ⓒ A los valores de la incógnita que cumplen una ecuación de segundo grado se les llama soluciones. En la ecuación de segundo grado se puede encontrar hasta dos soluciones.

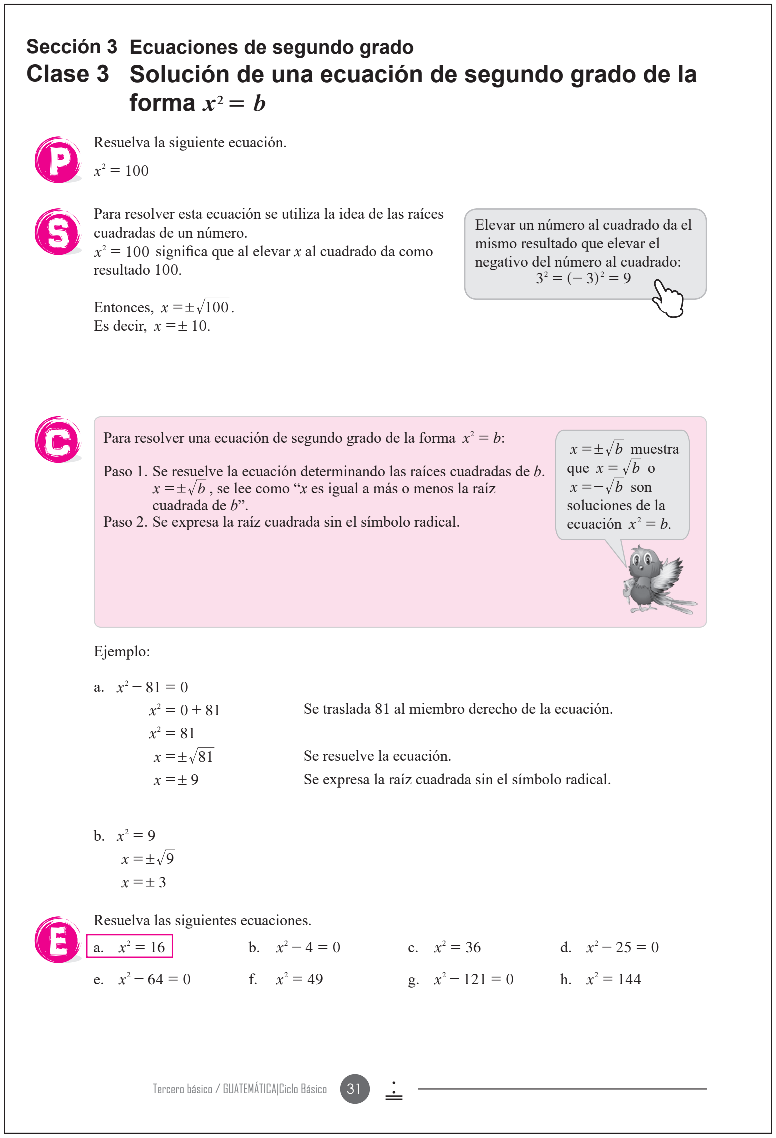
Ⓔ Encuentre las soluciones entre los números en los paréntesis.
a. $x^2 - 4 = 0$ $(-2, -1, 1, 2)$

$(-2)^2 - 4 = 0$ Es solución.
$(-1)^2 - 4 = -3$ No es solución.
$1^2 - 4 = -3$ No es solución.
$2^2 - 4 = 0$ Es solución.

R: Las soluciones son -2 y 2.

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 3 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$.



Sección 3 **Ecuaciones de segundo grado**

Clase 3 **Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$**

P Resuelva la siguiente ecuación.

$x^2 = 100$

S Para resolver esta ecuación se utiliza la idea de las raíces cuadradas de un número.
$x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

Entonces, $x = \pm\sqrt{100}$.
Es decir, $x = \pm 10$.

Elevar un número al cuadrado da el mismo resultado que elevar el negativo del número al cuadrado: $3^2 = (-3)^2 = 9$

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$:

Paso 1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de b. $x = \pm\sqrt{b}$, se lee como "x es igual a más o menos la raíz cuadrada de b".
Paso 2. Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

$x = \pm\sqrt{b}$ muestra que $x = \sqrt{b}$ o $x = -\sqrt{b}$ son soluciones de la ecuación $x^2 = b$.

Ejemplo:

a. $x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 0 + 81$ Se traslada 81 al miembro derecho de la ecuación.
$x^2 = 81$
$x = \pm\sqrt{81}$ Se resuelve la ecuación.
$x = \pm 9$ Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

b. $x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x = \pm 3$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 = 16$	b. $x^2 - 4 = 0$	c. $x^2 = 36$	d. $x^2 - 25 = 0$
e. $x^2 - 64 = 0$	f. $x^2 = 49$	g. $x^2 - 121 = 0$	h. $x^2 = 144$

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x = \pm 4$

b. $x^2 - 4 = 0$
$x^2 = 0 + 4$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$

c. $x^2 = 36$
$x = \pm\sqrt{36}$
$x = \pm 6$

d. $x^2 - 25 = 0$
$x^2 = 0 + 25$
$x^2 = 25$
$x = \pm\sqrt{25}$
$x = \pm 5$

e. $x^2 - 64 = 0$
$x^2 = 0 + 64$
$x^2 = 64$
$x = \pm\sqrt{64}$
$x = \pm 8$

f. $x^2 = 49$
$x = \pm\sqrt{49}$
$x = \pm 7$

g. $x^2 - 121 = 0$
$x^2 = 0 + 121$
$x^2 = 121$
$x = \pm\sqrt{121}$
$x = \pm 11$

h. $x^2 = 144$
$x = \pm\sqrt{144}$
$x = \pm 12$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-3 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 = b$

Ⓟ Resuelva.
$x^2 = 100$

Ⓢ $x^2 = 100$ significa que al elevar x al cuadrado da como resultado 100.

$x = \pm\sqrt{100}$
$x = \pm 10$

Ⓒ Para resolver $x^2 = b$:

Paso 1. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas de b. $x = \pm\sqrt{b}$ se lee como "x es igual a más o menos la raíz cuadrada de b".
Paso 2. Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

Ejemplo:

a. $x^2 - 81 = 0$
$x^2 = 0 + 81$
$x^2 = 81$
$x = \pm\sqrt{81}$
$x = \pm 9$

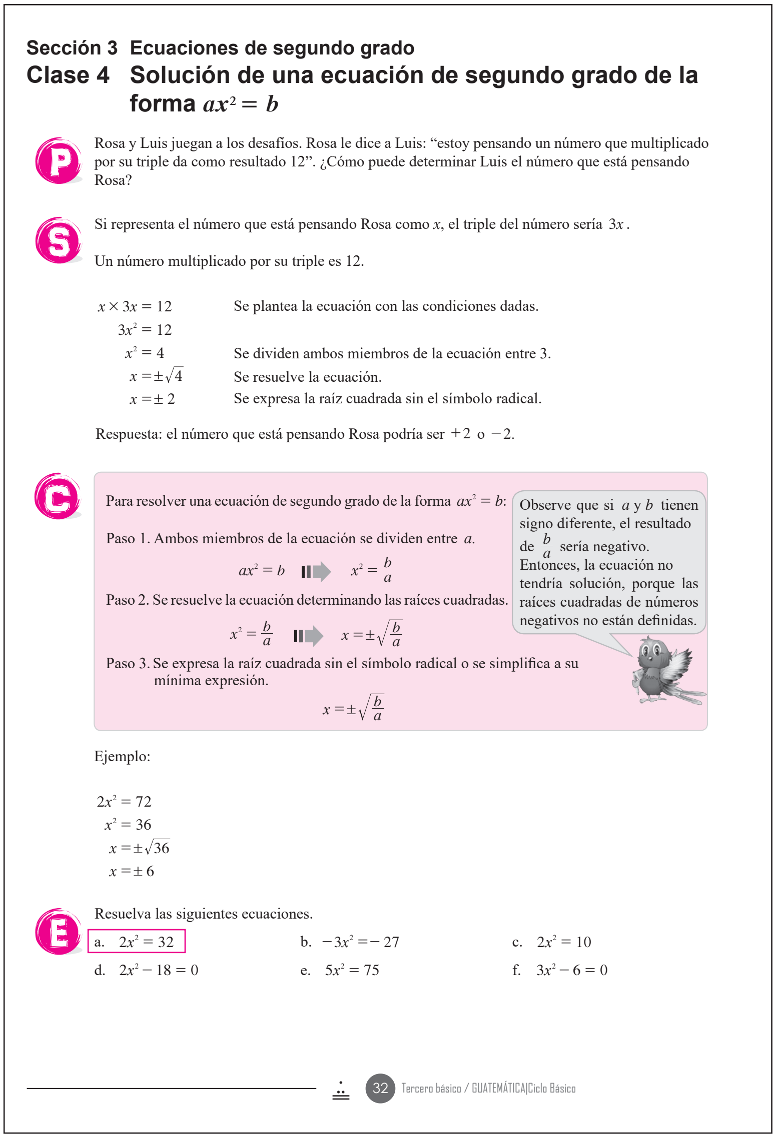
b. $x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x = \pm 3$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x = \pm 4$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$

P Rosa y Luis juegan a los desafíos. Rosa le dice a Luis: "estoy pensando un número que multiplicado por su triple da como resultado 12". ¿Cómo puede determinar Luis el número que está pensando Rosa?

S Si representa el número que está pensando Rosa como x, el triple del número sería $3x$.

Un número multiplicado por su triple es 12.

$x \times 3x = 12$	Se plantea la ecuación con las condiciones dadas.
$3x^2 = 12$	
$x^2 = 4$	Se dividen ambos miembros de la ecuación entre 3.
$x = \pm\sqrt{4}$	Se resuelve la ecuación.
$x = \pm 2$	Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical.

Respuesta: el número que está pensando Rosa podría ser $+2$ o -2.

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$:

Paso 1. Ambos miembros de la ecuación se dividen entre a.

$$ax^2 = b \Rightarrow x^2 = \frac{b}{a}$$

Paso 2. Se resuelve la ecuación determinando las raíces cuadradas.

$$x^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Paso 3. Se expresa la raíz cuadrada sin el símbolo radical o se simplifica a su mínima expresión.

$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

Observe que si a y b tienen signo diferente, el resultado de $\frac{b}{a}$ sería negativo. Entonces, la ecuación no tendría solución, porque las raíces cuadradas de números negativos no están definidas.

Ejemplo:

$2x^2 = 72$
$x^2 = 36$
$x = \pm\sqrt{36}$
$x = \pm 6$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $2x^2 = 32$
b. $-3x^2 = -27$
c. $2x^2 = 10$
d. $2x^2 - 18 = 0$
e. $5x^2 = 75$
f. $3x^2 - 6 = 0$

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2 = 32$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x = \pm 4$

b. $-3x^2 = -27$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x = \pm 3$

c. $2x^2 = 10$
$x^2 = 5$
$x = \pm\sqrt{5}$

d. $2x^2 - 18 = 0$
$2x^2 = 18$
$x^2 = 9$
$x = \pm\sqrt{9}$
$x = \pm 3$

e. $5x^2 = 75$
$x^2 = 15$
$x = \pm\sqrt{15}$

f. $3x^2 - 6 = 0$
$3x^2 = 6$
$x^2 = 2$
$x = \pm\sqrt{2}$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-4 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 = b$

Ⓟ ¿Cuál es el número que multiplicado por su triple da como resultado 12?

Ⓢ Número: x
Triple del número: $3x$

$x \times 3x = 12$
$3x^2 = 12$
$x^2 = 4$
$x = \pm\sqrt{4}$
$x = \pm 2$

R: El número es $+2$ o -2.

Ⓒ Para resolver $ax^2 = b$:

Paso 1. Ambos miembros se dividen entre a. $ax^2 = b \rightarrow x^2 = \frac{b}{a}$

Paso 2. Se resuelve la ecuación. $x^2 = \frac{b}{a} \rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

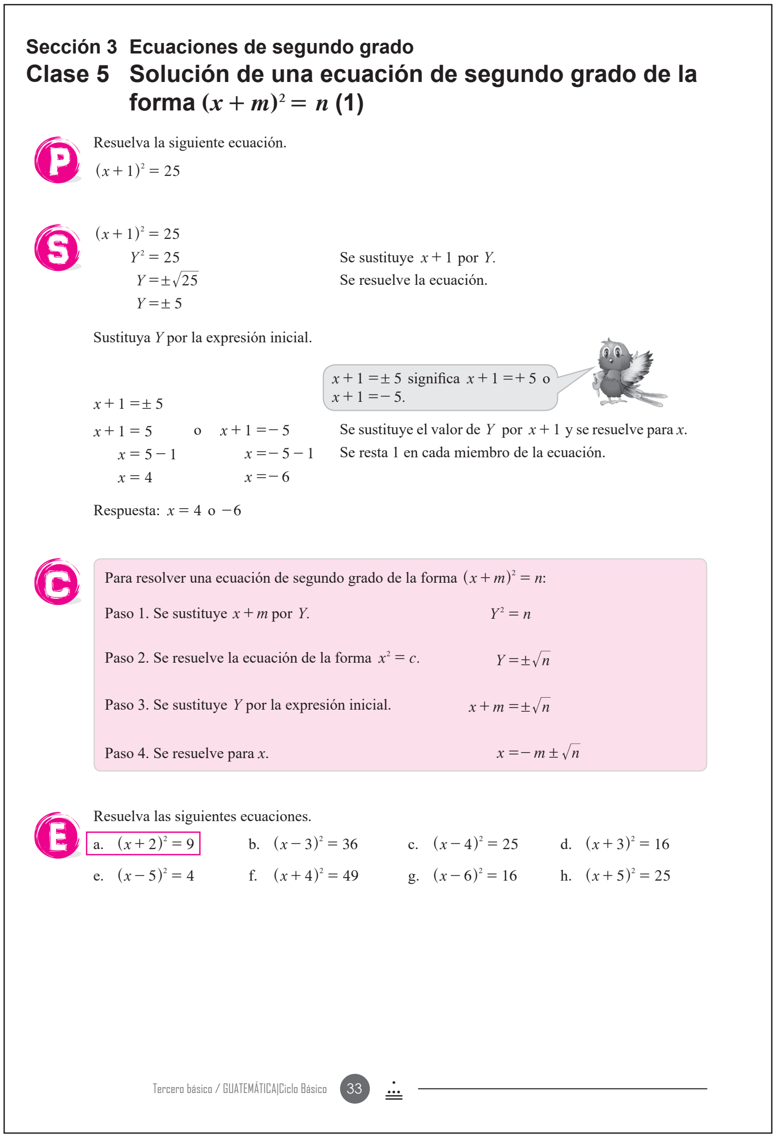
Paso 3. Se expresa sin el símbolo radical o se simplifica. $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$

Ejemplo:
$2x^2 = 72$
$x^2 = 36$
$x = \pm\sqrt{36}$
$x = \pm 6$

Ⓔ Resuelva.
a. $2x^2 = 32$
$x^2 = 16$
$x = \pm\sqrt{16}$
$x = \pm 4$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n$ (1)

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n$, donde n es un cuadrado perfecto.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n$ (1)

P Resuelva la siguiente ecuación.
$(x+1)^2=25$

S $(x+1)^2=25$
$Y^2=25$ Se sustituye $x+1$ por Y.
$Y=\pm\sqrt{25}$ Se resuelve la ecuación.
$Y=\pm 5$

Sustituya Y por la expresión inicial.

$x+1=\pm 5$ significa $x+1=+5$ o $x+1=-5$.

$x+1=\pm 5$
$x+1=5$ o $x+1=-5$ Se sustituye el valor de Y por $x+1$ y se resuelve para x.
$x=5-1$ $x=-5-1$ Se resta 1 en cada miembro de la ecuación.
$x=4$ $x=-6$

Respuesta: $x=4$ o -6

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n$:

Paso 1. Se sustituye $x+m$ por Y. $Y^2=n$
Paso 2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2=c$. $Y=\pm\sqrt{n}$
Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial. $x+m=\pm\sqrt{n}$
Paso 4. Se resuelve para x. $x=-m\pm\sqrt{n}$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.
a. $(x+2)^2=9$ b. $(x-3)^2=36$ c. $(x-4)^2=25$ d. $(x+3)^2=16$
e. $(x-5)^2=4$ f. $(x+4)^2=49$ g. $(x-6)^2=16$ h. $(x+5)^2=25$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 33

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+2)^2=9$
Se sustituye $x+2$ por Y.
$Y^2=9$
$Y=\pm\sqrt{9}$
$Y=\pm 3$
Se sustituye Y por $x+2$.
$x+2=3$ o $x+2=-3$
$x=3-2$ $x=-3-2$
$x=1$ $x=-5$
R: $x=1$ o -5

b. $(x-3)^2=36$
Se sustituye $x-3$ por Y.
$Y^2=36$
$Y=\pm\sqrt{36}$
$Y=\pm 6$
Se sustituye Y por $x-3$.
$x-3=6$ o $x-3=-6$
$x=6+3$ $x=-6+3$
$x=9$ $x=-3$
R: $x=9$ o -3

c. $(x-4)^2=25$
Se sustituye $x-4$ por Y.
$Y^2=25$
$Y=\pm\sqrt{25}$
$Y=\pm 5$
Se sustituye Y por $x-4$.
$x-4=5$ o $x-4=-5$
$x=5+4$ $x=-5+4$
$x=9$ $x=-1$
R: $x=9$ o -1

d. $(x+3)^2=16$
Se sustituye $x+3$ por Y.
$Y^2=16$
$Y=\pm\sqrt{16}$
$Y=\pm 4$
Se sustituye Y por $x+3$.
$x+3=4$ o $x+3=-4$
$x=4-3$ $x=-4-3$
$x=1$ $x=-7$
R: $x=1$ o -7

Ver ejercicios restantes en la página G69.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-5 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2=n$ (1)

Ⓟ Resuelva.
$(x+1)^2=25$

Ⓢ $(x+1)^2=25$
Se sustituye $x+1$ por Y.
$Y^2=25$
$Y=\pm\sqrt{25}$
$Y=\pm 5$
Se sustituye Y por $x+1$.
$x+1=5$ o $x+1=-5$
$x=5-1$ $x=-5-1$
$x=4$ $x=-6$
R: $x=4$ o -6

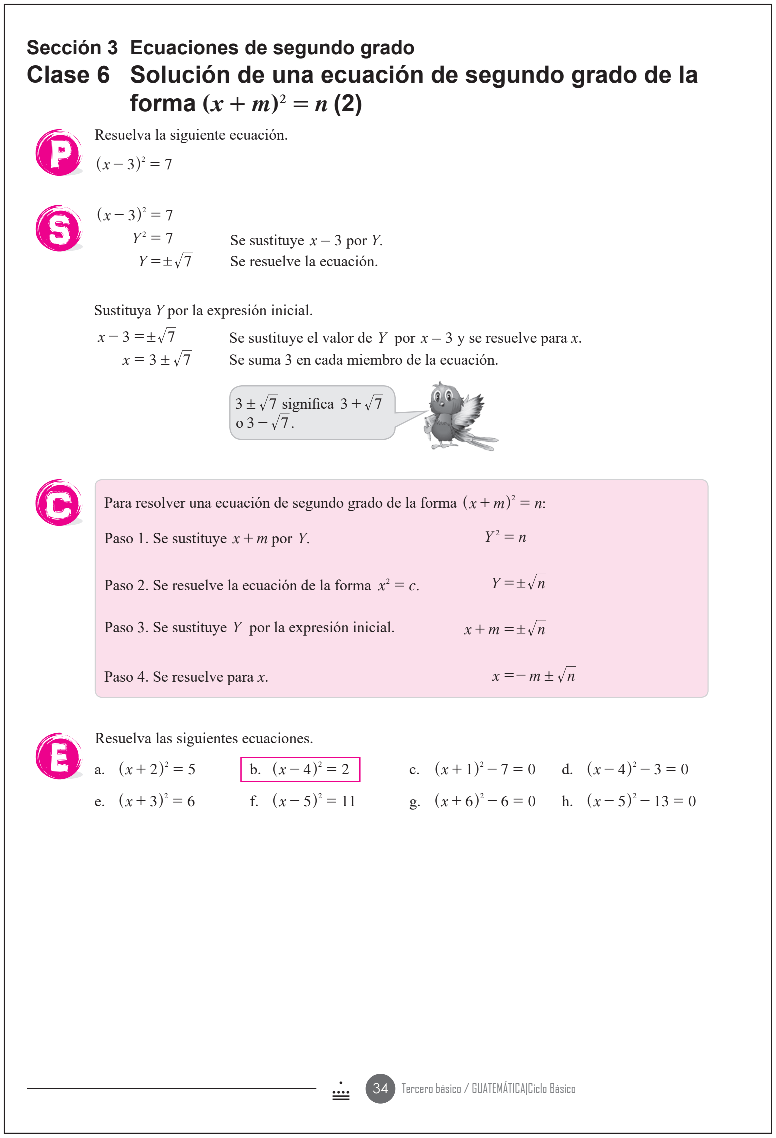
Ⓒ Para resolver $(x+m)^2=n$:
Paso 1. Se sustituye $x+m$ por Y. $Y^2=n$
Paso 2. Se resuelve la ecuación. $Y=\pm\sqrt{n}$
Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial. $x+m=\pm\sqrt{n}$
Paso 4. Se resuelve para x. $x=-m\pm\sqrt{n}$

Ⓔ Resuelva.
a. $(x+2)^2=9$
Se sustituye $x+2$ por Y.
$Y^2=9$
$Y=\pm\sqrt{9}$
$Y=\pm 3$
Se sustituye Y por $x+2$.
$x+2=3$ o $x+2=-3$
$x=3-2$ $x=-3-2$
$x=1$ $x=-5$
R: $x=1$ o -5

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2 = n$ (2)

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2 = n$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2 = n$ (2)

P Resuelva la siguiente ecuación.

$(x-3)^2 = 7$

S $(x-3)^2 = 7$

$Y^2 = 7$ Se sustituye $x-3$ por Y.

$Y = \pm\sqrt{7}$ Se resuelve la ecuación.

Sustituya Y por la expresión inicial.

$x-3 = \pm\sqrt{7}$ Se sustituye el valor de Y por $x-3$ y se resuelve para x.

$x = 3 \pm \sqrt{7}$ Se suma 3 en cada miembro de la ecuación.

$3 \pm \sqrt{7}$ significa $3+\sqrt{7}$ o $3-\sqrt{7}$.

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2 = n$:

Paso 1. Se sustituye $x+m$ por Y. $Y^2 = n$

Paso 2. Se resuelve la ecuación de la forma $x^2 = c$. $Y = \pm\sqrt{n}$

Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial. $x+m = \pm\sqrt{n}$

Paso 4. Se resuelve para x. $x = -m \pm \sqrt{n}$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $(x+2)^2 = 5$ b. $\boxed{(x-4)^2 = 2}$ c. $(x+1)^2 - 7 = 0$ d. $(x-4)^2 - 3 = 0$

e. $(x+3)^2 = 6$ f. $(x-5)^2 = 11$ g. $(x+6)^2 - 6 = 0$ h. $(x-5)^2 - 13 = 0$

34 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+2)^2 = 5$
Se sustituye $x+2$ por Y.
$Y^2 = 5$
$Y = \pm\sqrt{5}$
Se sustituye Y por $x+2$.
$x+2 = \pm\sqrt{5}$
$x = -2 \pm \sqrt{5}$

b. $(x-4)^2 = 2$
Se sustituye $x-4$ por Y.
$Y^2 = 2$
$Y = \pm\sqrt{2}$
Se sustituye Y por $x-4$.
$x-4 = \pm\sqrt{2}$
$x = 4 \pm \sqrt{2}$

c. $(x+1)^2 - 7 = 0$
$(x+1)^2 = 7$
Se sustituye $x+1$ por Y.
$Y^2 = 7$
$Y = \pm\sqrt{7}$
Se sustituye Y por $x+1$.
$x+1 = \pm\sqrt{7}$
$x = -1 \pm \sqrt{7}$

d. $(x-4)^2 - 3 = 0$
$(x-4)^2 = 3$
Se sustituye $x-4$ por Y.
$Y^2 = 3$
$Y = \pm\sqrt{3}$
Se sustituye Y por $x-4$.
$x-4 = \pm\sqrt{3}$
$x = 4 \pm \sqrt{3}$

e. $(x+3)^2 = 6$
Se sustituye $x+3$ por Y.
$Y^2 = 6$
$Y = \pm\sqrt{6}$
Se sustituye Y por $x+3$.
$x+3 = \pm\sqrt{6}$
$x = -3 \pm \sqrt{6}$

f. $(x-5)^2 = 11$
Se sustituye $x-5$ por Y.
$Y^2 = 11$
$Y = \pm\sqrt{11}$
Se sustituye Y por $x-5$.
$x-5 = \pm\sqrt{11}$
$x = 5 \pm \sqrt{11}$

g. $(x+6)^2 - 6 = 0$
$(x+6)^2 = 6$
Se sustituye $x+6$ por Y.
$Y^2 = 6$
$Y = \pm\sqrt{6}$
Se sustituye Y por $x+6$.
$x+6 = \pm\sqrt{6}$
$x = -6 \pm \sqrt{6}$

h. $(x-5)^2 - 13 = 0$
$(x-5)^2 = 13$
Se sustituye $x-5$ por Y.
$Y^2 = 13$
$Y = \pm\sqrt{13}$
Se sustituye Y por $x-5$.
$x-5 = \pm\sqrt{13}$
$x = 5 \pm \sqrt{13}$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-6 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+m)^2 = n$ (2)

Ⓟ Resuelva.
$(x-3)^2 = 7$

Ⓢ $(x-3)^2 = 7$
Se sustituye $x-3$ por Y.
$Y^2 = 7$
$Y = \pm\sqrt{7}$
Se sustituye Y por $x-3$.
$x-3 = \pm\sqrt{7}$
$x = 3 \pm \sqrt{7}$

R: $x = 3 \pm \sqrt{7}$

Ⓒ Para resolver $(x+m)^2 = n$:

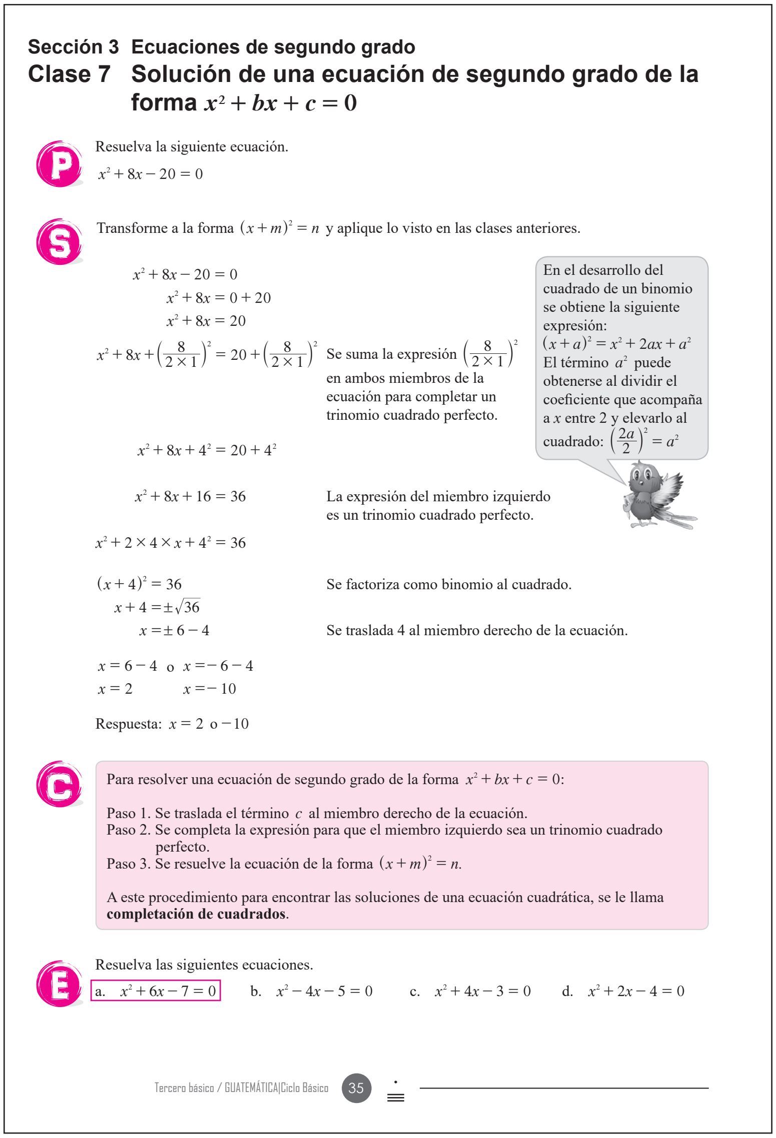
Paso 1. Se sustituye $x+m$ por Y. $Y^2 = n$
Paso 2. Se resuelve la ecuación. $Y = \pm\sqrt{n}$
Paso 3. Se sustituye Y por la expresión inicial. $x+m = \pm\sqrt{n}$
Paso 4. Se resuelve para x. $x = -m \pm \sqrt{n}$

Ⓔ Resuelva.
b. $(x-4)^2 = 2$
Se sustituye $x-4$ por Y.
$Y^2 = 2$
$Y = \pm\sqrt{2}$
Se sustituye Y por $x-4$.
$x-4 = \pm\sqrt{2}$
$x = 4 \pm \sqrt{2}$

R: $x = 4 \pm \sqrt{2}$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$ por completación de cuadrados.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$

P Resuelva la siguiente ecuación.
$x^2+8x-20=0$

S Transforme a la forma $(x+m)^2=n$ y aplique lo visto en las clases anteriores.

$x^2+8x-20=0$
$x^2+8x=0+20$
$x^2+8x=20$
$x^2+8x+\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2=20+\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2$ Se suma la expresión $\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación para completar un trinomio cuadrado perfecto.
$x^2+8x+4^2=20+4^2$
$x^2+8x+16=36$ La expresión del miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.
$x^2+2\times4\times x+4^2=36$
$(x+4)^2=36$ Se factoriza como binomio al cuadrado.
$x+4=\pm\sqrt{36}$
$x=\pm6-4$ Se traslada 4 al miembro derecho de la ecuación.
$x=6-4$ o $x=-6-4$
$x=2$ $x=-10$

Respuesta: $x=2$ o -10

En el desarrollo del cuadrado de un binomio se obtiene la siguiente expresión:
$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$
El término a^2 puede obtenerse al dividir el coeficiente que acompaña a x entre 2 y elevarlo al cuadrado: $\left(\frac{2a}{2}\right)^2=a^2$

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$:

Paso 1. Se traslada el término c al miembro derecho de la ecuación.
Paso 2. Se completa la expresión para que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.
Paso 3. Se resuelve la ecuación de la forma $(x+m)^2=n$.

A este procedimiento para encontrar las soluciones de una ecuación cuadrática, se le llama **completación de cuadrados**.

E Resuelva las siguientes ecuaciones.
$\boxed{\text{a. } x^2+6x-7=0}$ b. $x^2-4x-5=0$ c. $x^2+4x-3=0$ d. $x^2+2x-4=0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 35

Solucionario de los ejercicios:

a.
$$x^2+6x-7=0$$
$$x^2+6x=7$$
$$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=7+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$
$$x^2+6x+3^2=7+3^2$$
$$x^2+6x+9=16$$
$$(x+3)^2=16$$
$$x+3=\pm\sqrt{16}$$
$$x=\pm4-3$$

$x=4-3$ o $x=-4-3$
$x=1$ $x=-7$
R: $x=1$ o -7

b.
$$x^2-4x-5=0$$
$$x^2-4x=5$$
$$x^2-4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=5+\left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2-4x+2^2=5+2^2$$
$$x^2-4x+4=9$$
$$(x-2)^2=9$$
$$x-2=\pm\sqrt{9}$$
$$x=\pm3+2$$

$x=3+2$ o $x=-3+2$
$x=5$ $x=-1$
R: $x=5$ o -1

c.
$$x^2+4x-3=0$$
$$x^2+4x=3$$
$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2=3+\left(\frac{4}{2}\right)^2$$
$$x^2+4x+2^2=3+2^2$$
$$x^2+4x+4=7$$
$$(x+2)^2=7$$
$$x+2=\pm\sqrt{7}$$
$$x=-2\pm\sqrt{7}$$
R: $-2+\sqrt{7}$ o $-2-\sqrt{7}$

Ver ejercicios restantes en la página G69.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-7 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+bx+c=0$

Ⓟ Resuelva.
$x^2+8x-20=0$

Ⓢ Transforme a la forma $(x+m)^2=n$.

$x^2+8x-20=0$
$x^2+8x=0+20$
$x^2+8x+\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2=20+\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2$ Se suma $\left(\frac{8}{2\times1}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación.
$x^2+8x+4^2=20+4^2$
$\underline{x^2+8x+16}=36$ El miembro izquierdo es un trinomio cuadrado perfecto.
$(x+4)^2=36$
$x+4=\pm\sqrt{36}$
$x=\pm6-4$
$x=6-4$ o $x=-6-4$
$x=2$ $x=-10$

R: $x=2$ o -10

Ⓒ Para resolver $x^2+bx+c=0$:
Paso 1. Se traslada el término c al miembro derecho de la ecuación.
Paso 2. Se completa la expresión para que el miembro izquierdo sea un trinomio cuadrado perfecto.
Paso 3. Se resuelve la ecuación de la forma $(x+m)^2=n$.

A este procedimiento se le llama completación de cuadrados.

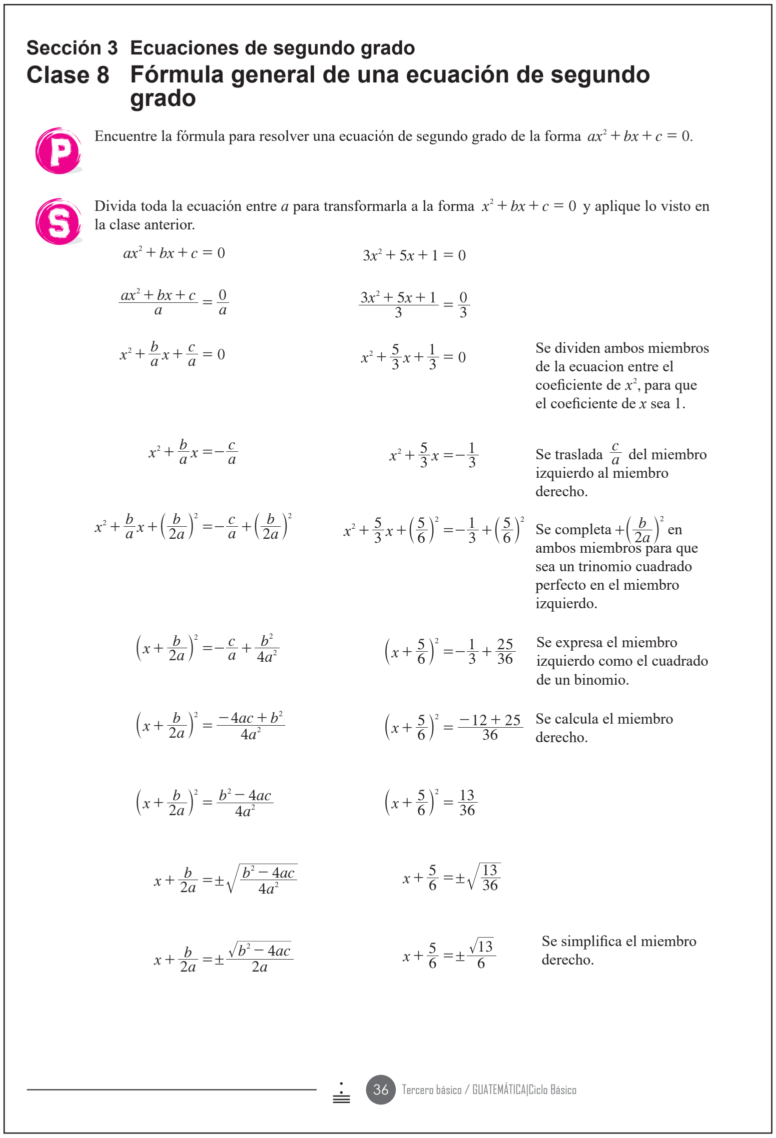
Ⓔ Resuelva.
a. $x^2+6x-7=0$
$x^2+6x=7$
$x^2+6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2=7+\left(\frac{6}{2}\right)^2$
$x^2+6x+3^2=7+3^2$
$x^2+6x+9=7+9$
$(x+3)^2=16$
$x+3=\pm\sqrt{16}$
$x=\pm4-3$

$x=4-3$ o $x=-4-3$
$x=1$ $x=-7$

R: $x=1$ o -7

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado

P Encuentre la fórmula para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$.

S Divida toda la ecuación entre a para transformarla a la forma $x^2+bx+c=0$ y aplique lo visto en la clase anterior.

$ax^2+bx+c=0$	$3x^2+5x+1=0$	
$\frac{ax^2+bx+c}{a}=\frac{0}{a}$	$\frac{3x^2+5x+1}{3}=\frac{0}{3}$	
$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$	$x^2+\frac{5}{3}x+\frac{1}{3}=0$	Se dividen ambos miembros de la ecuacion entre el coeficiente de x^2, para que el coeficiente de x sea 1.
$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$	$x^2+\frac{5}{3}x=-\frac{1}{3}$	Se traslada $\frac{c}{a}$ del miembro izquierdo al miembro derecho.
$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$	$x^2+\frac{5}{3}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\left(\frac{5}{6}\right)^2$	Se completa $+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros para que sea un trinomio cuadrado perfecto en el miembro izquierdo.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$	$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=-\frac{1}{3}+\frac{25}{36}$	Se expresa el miembro izquierdo como el cuadrado de un binomio.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{-4ac+b^2}{4a^2}$	$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{-12+25}{36}$	Se calcula el miembro derecho.
$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$	$\left(x+\frac{5}{6}\right)^2=\frac{13}{36}$	
$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$	$x+\frac{5}{6}=\pm\sqrt{\frac{13}{36}}$	
$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x+\frac{5}{6}=\pm\frac{\sqrt{13}}{6}$	Se simplifica el miembro derecho.

36 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Para resolver $2x^2+3x-1=0$, se sustituye a por 2, b por 3 y c por -1 en la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$

b. Para resolver $2x^2-7x+1=0$, se sustituye a por 2, b por -7 y c por 1 en la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times2\times1}}{2\times2}$$
$$=\frac{7\pm\sqrt{49-8}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{41}}{4}$$

c. Para resolver $x^2-3x-3=0$, se sustituye a por 1, b por -3 y c por -3 en la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{9+12}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$$

d. Para resolver $2x^2+5x-1=0$, se sustituye a por 2, b por 5 y c por -1 en la fórmula general:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{25+8}}{4}=\frac{-5\pm\sqrt{33}}{4}$$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-8 Fórmula general de una ecuación de segundo grado

Ⓟ Encuentre la fórmula para resolver $ax^2+bx+c=0$.

Ⓢ $ax^2+bx+c=0$

$$\frac{\cancel{a}x^2}{\cancel{a}}+\frac{bx}{a}+\frac{c}{a}=0$$
Se dividen entre a.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}-\frac{c}{a}=0-\frac{c}{a}$$
Se resta $\frac{c}{a}$.

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2$$
Se completa para que el miembro izquierdo sea cuadrado perfecto.

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
Se resta $\frac{b}{2a}$ de ambos miembros.

Ⓒ Para resolver $ax^2+bx+c=0$ se puede utilizar:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le llama fórmula general de la ecuación de segundo grado. Para encontrar la solución, se sustituye a, b y c en la fórmula.

Ejemplo:

Para $3x^2+5x+1=0$, se sustituye a por 3, b por 5 y c por 1.

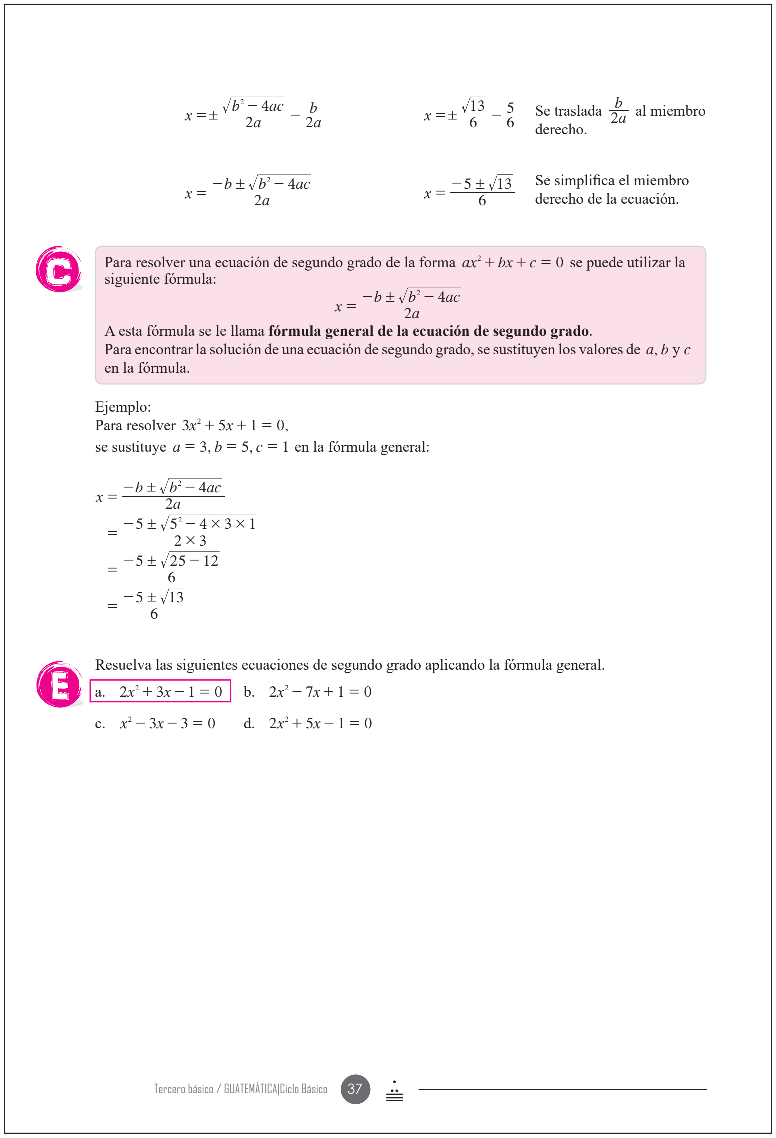
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times1}}{2\times3}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{25-12}}{6}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{6}$$

Ⓔ Resuelva aplicando la fórmula general.

a. $2x^2+3x-1=0$

Se sustituye a por 2, b por 3 y c por -1.

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{9+8}}{4}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{17}}{4}$$



$x = \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \dfrac{b}{2a}$	$x = \pm\dfrac{\sqrt{13}}{6} - \dfrac{5}{6}$	Se traslada $\dfrac{b}{2a}$ al miembro derecho.
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$	Se simplifica el miembro derecho de la ecuación.

C

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ se puede utilizar la siguiente fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

A esta fórmula se le llama **fórmula general de la ecuación de segundo grado**.
Para encontrar la solución de una ecuación de segundo grado, se sustituyen los valores de a, b y c en la fórmula.

Ejemplo:
Para resolver $3x^2 + 5x + 1 = 0$,
se sustituye $a = 3, b = 5, c = 1$ en la fórmula general:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 3 \times 1}}{2 \times 3} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{25-12}}{6} \\ &= \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

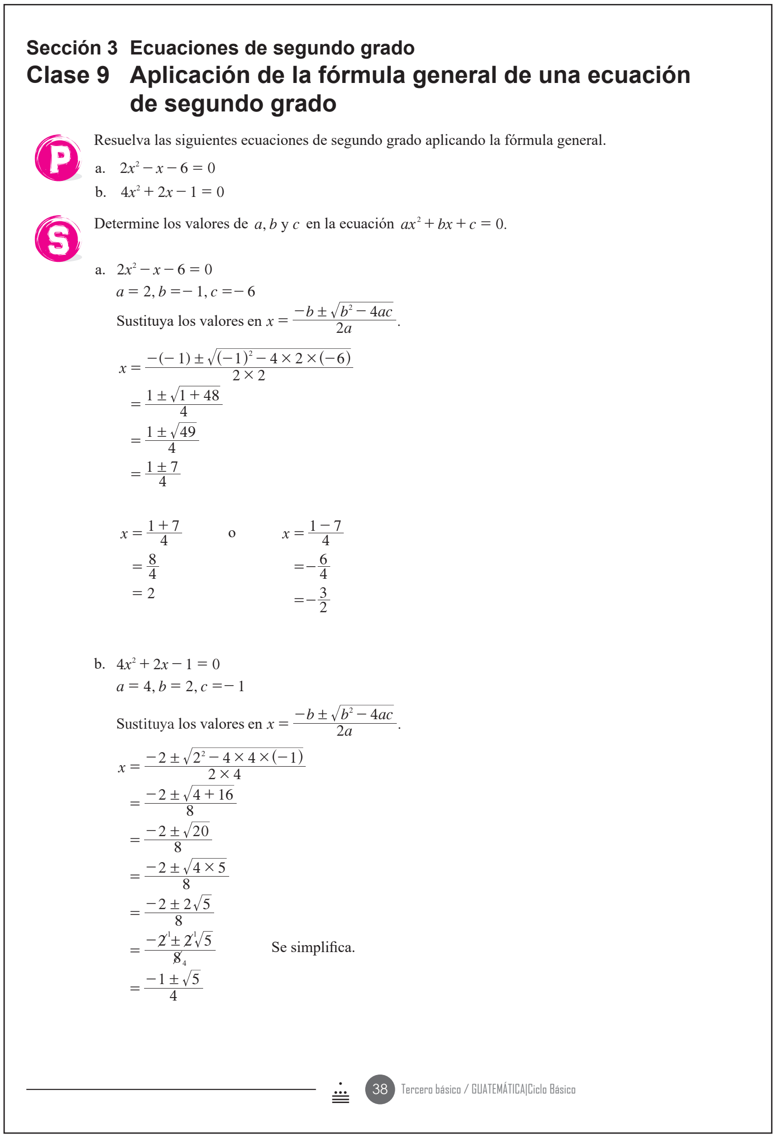
E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 + 3x - 1 = 0$ b. $2x^2 - 7x + 1 = 0$
c. $x^2 - 3x - 3 = 0$ d. $2x^2 + 5x - 1 = 0$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

P Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$

b. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

S Determine los valores de a, b y c en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$

$a = 2, b = -1, c = -6$

Sustituya los valores en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{o} \quad x = \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

b. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

$a = 4, b = 2, c = -1$

Sustituya los valores en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 5}}{8} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{8}$$

$$= \frac{-\cancel{2}^{1} \pm \cancel{2}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{8}_{4}} \qquad \text{Se simplifica.}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

38 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2 + x - 1 = 0$

Se sustituye a por 2, b por 1 y c por -1 en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

b. $4x^2 + 3x - 1 = 0$

Se sustituye a por 4, b por 3 y c por -1 en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 16}}{8} = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{8} = \frac{-3 \pm 5}{8}$$

$$x = \frac{-3+5}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{o} \quad x = \frac{-3-5}{8} = \frac{-8}{8} = -1$$

Fecha: dd – mm – aa

1-3-9 Aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

Ⓟ Resuelva aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 - x - 6 = 0$ b. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

Ⓢ Determine los valores de a, b y c en la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

a. $a = 2, b = -1, c = -6$

Sustituya los valores en $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 48}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{4} = \frac{1 \pm 7}{4}$$

$$x = \frac{1+7}{4} = \frac{8}{4} = 2 \quad \text{o} \quad x = \frac{1-7}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

R: $x = 2$ o $-\frac{3}{2}$

b. $a = 4, b = 2, c = -1$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{8}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{8} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \times 5}}{8} = \frac{-\cancel{2}^{1} \pm \cancel{2}^{1}\sqrt{5}}{\cancel{8}_{4}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

Ⓔ Resuelva.

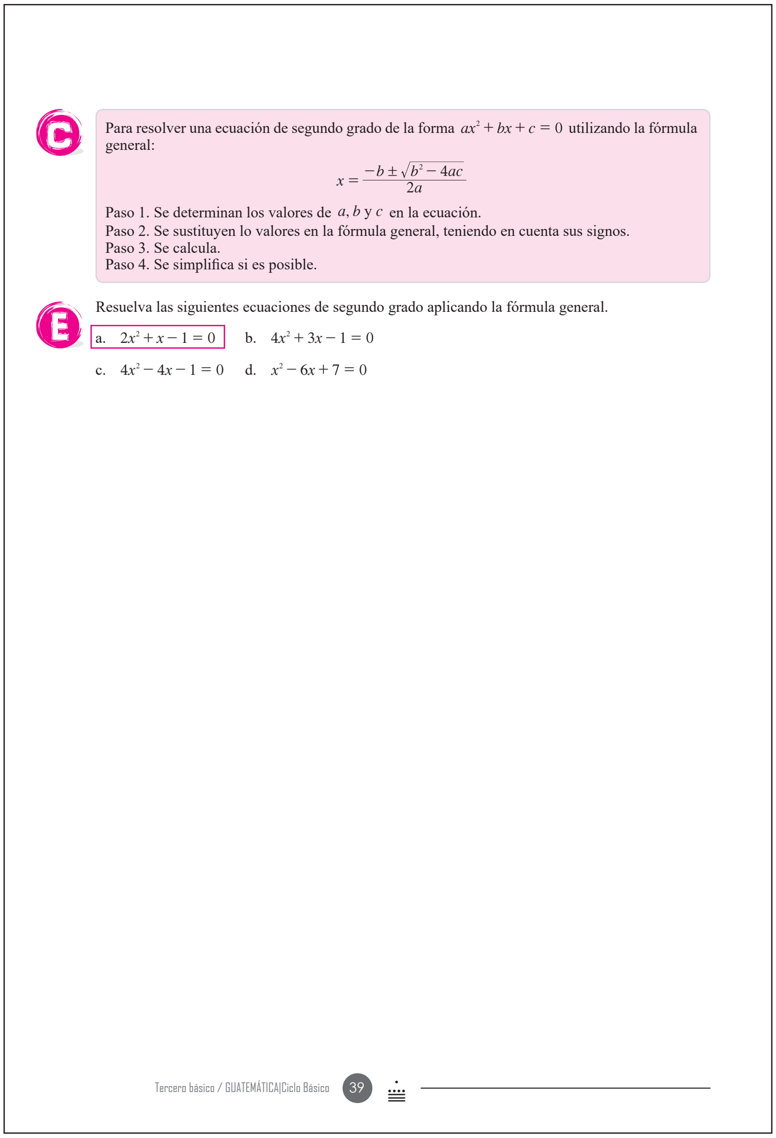
a. $2x^2 + x - 1 = 0$ $a = 2, b = 1, c = -1$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-1)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-1-3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

R: $x = \frac{1}{2}$ o -1



C

Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ utilizando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Paso 1. Se determinan los valores de a, b y c en la ecuación.
Paso 2. Se sustituyen lo valores en la fórmula general, teniendo en cuenta sus signos.
Paso 3. Se calcula.
Paso 4. Se simplifica si es posible.

E

Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $\boxed{2x^2 + x - 1 = 0}$ b. $4x^2 + 3x - 1 = 0$

c. $4x^2 - 4x - 1 = 0$ d. $x^2 - 6x + 7 = 0$

c. $4x^2 - 4x - 1 = 0$

Se sustituye a por 4, b por -4 y c por -1 en $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 4 \times (-1)}}{2 \times 4}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{8}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{32}}{8}$$
$$= \frac{4 \pm \sqrt{4^2 \times 2}}{8}$$
$$= \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{8}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

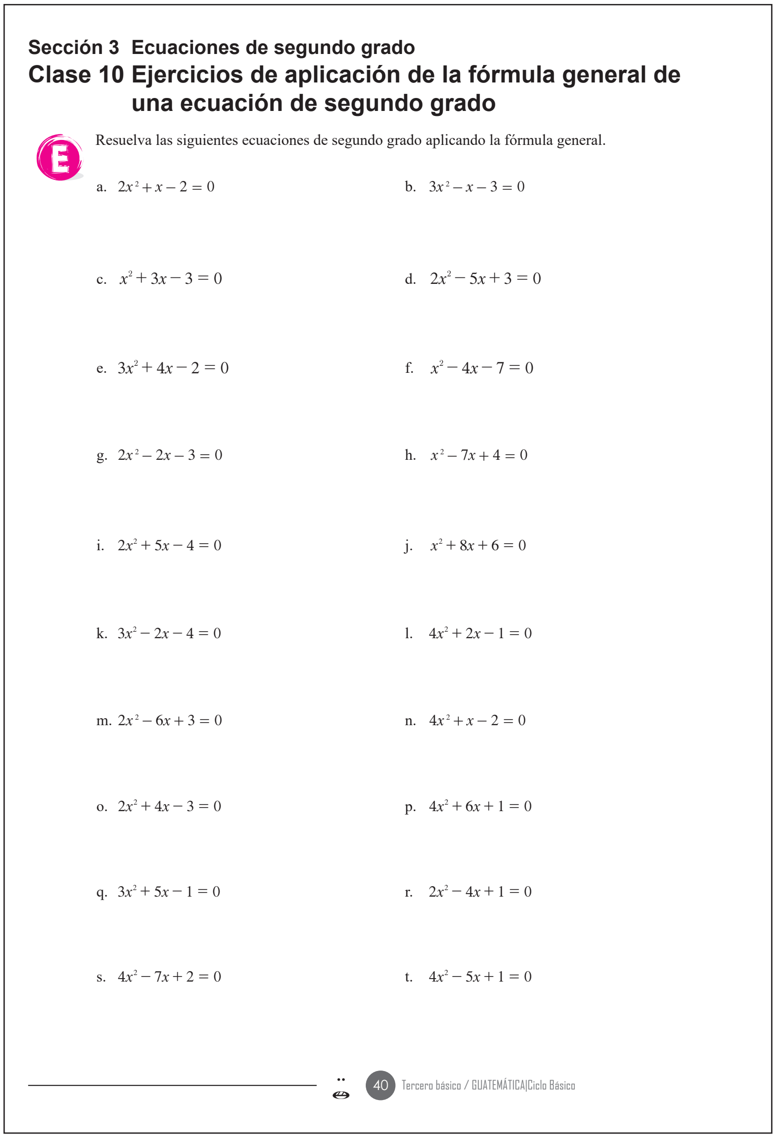
d. $x^2 - 6x + 7 = 0$

Se sustituye a por 1, b por -6 y c por 7 en $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \times 1 \times 7}}{2 \times 1}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 28}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{8}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm \sqrt{2^2 \times 2}}{2}$$
$$= \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$
$$= 3 \pm \sqrt{2}$$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado aplicando la fórmula general.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

E Resuelva las siguientes ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula general.

a. $2x^2 + x - 2 = 0$

b. $3x^2 - x - 3 = 0$

c. $x^2 + 3x - 3 = 0$

d. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

e. $3x^2 + 4x - 2 = 0$

f. $x^2 - 4x - 7 = 0$

g. $2x^2 - 2x - 3 = 0$

h. $x^2 - 7x + 4 = 0$

i. $2x^2 + 5x - 4 = 0$

j. $x^2 + 8x + 6 = 0$

k. $3x^2 - 2x - 4 = 0$

l. $4x^2 + 2x - 1 = 0$

m. $2x^2 - 6x + 3 = 0$

n. $4x^2 + x - 2 = 0$

o. $2x^2 + 4x - 3 = 0$

p. $4x^2 + 6x + 1 = 0$

q. $3x^2 + 5x - 1 = 0$

r. $2x^2 - 4x + 1 = 0$

s. $4x^2 - 7x + 2 = 0$

t. $4x^2 - 5x + 1 = 0$

40 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $2x^2 + x - 2 = 0$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

b. $3x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 36}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

c. $x^2 + 3x - 3 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

d. $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{5 \pm 1}{4}$$

$$x = \frac{5+1}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{5-1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

e. $3x^2 + 4x - 2 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \times 3 \times (-2)}}{2 \times 3} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 24}}{6}$$

$$= \frac{-4 \pm \sqrt{40}}{6} = \frac{-4 \pm \sqrt{2^2 \times 10}}{6} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{6}$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

f. $x^2 - 4x - 7 = 0$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times (-7)}}{2 \times 1} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 28}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{44}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{2^2 \times 11}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{11}}{2} = 2 \pm \sqrt{11}$$

Ver ejercicios restantes en la página G69.

Fecha: dd – mm – aa

1-3-10 Ejercicios de aplicación de la fórmula general de una ecuación de segundo grado

Ⓔ Resuelva aplicando la fórmula general:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

a. $2x^2 + x - 2 = 0$

$a = 2,\ b = 1,\ c = -2$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 2 \times (-2)}}{2 \times 2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$$

b. $3x^2 - x - 3 = 0$

$a = 3,\ b = -1,\ c = -3$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 3 \times (-3)}}{2 \times 3}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 + 36}}{6}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{37}}{6}$$

c. $x^2 + 3x - 3 = 0$

$a = 1,\ b = 3,\ c = -3$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \times 1 \times (-3)}}{2 \times 1}$$

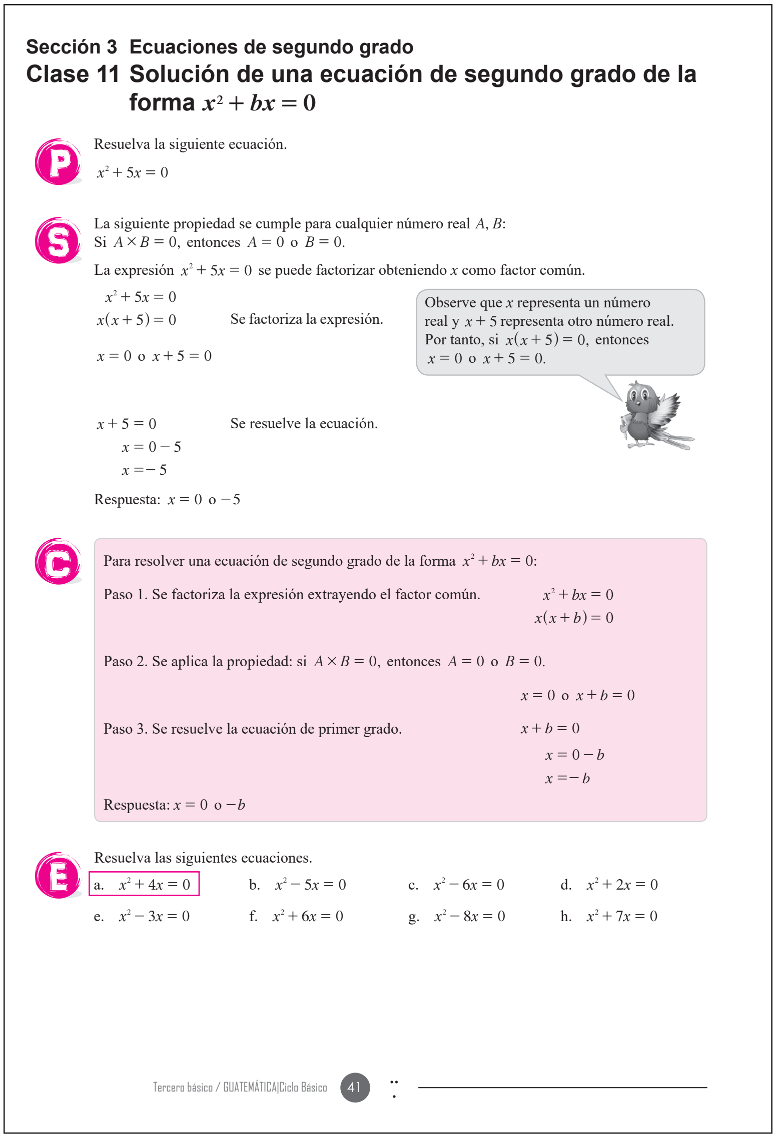
$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{21}}{2}$$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

P Resuelva la siguiente ecuación.

$x^2 + 5x = 0$

S La siguiente propiedad se cumple para cualquier número real A, B:
Si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

La expresión $x^2 + 5x = 0$ se puede factorizar obteniendo x como factor común.

$x^2 + 5x = 0$
$x(x + 5) = 0$ Se factoriza la expresión.
$x = 0$ o $x + 5 = 0$

Observe que x representa un número real y $x + 5$ representa otro número real. Por tanto, si $x(x + 5) = 0$, entonces $x = 0$ o $x + 5 = 0$.

$x + 5 = 0$ Se resuelve la ecuación.
$x = 0 - 5$
$x = -5$

Respuesta: $x = 0$ o -5

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión extrayendo el factor común.
$x^2 + bx = 0$
$x(x + b) = 0$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.
$x = 0$ o $x + b = 0$

Paso 3. Se resuelve la ecuación de primer grado.
$x + b = 0$
$x = 0 - b$
$x = -b$

Respuesta: $x = 0$ o $-b$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 4x = 0$
b. $x^2 - 5x = 0$
c. $x^2 - 6x = 0$
d. $x^2 + 2x = 0$
e. $x^2 - 3x = 0$
f. $x^2 + 6x = 0$
g. $x^2 - 8x = 0$
h. $x^2 + 7x = 0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 41

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 + 4x = 0$
$x(x + 4) = 0$
$x = 0$ o $x + 4 = 0$
$x = 0 - 4$
$x = -4$
R: $x = 0$ o -4

b. $x^2 - 5x = 0$
$x(x - 5) = 0$
$x = 0$ o $x - 5 = 0$
$x = 0 + 5$
$x = 5$
R: $x = 0$ o 5

c. $x^2 - 6x = 0$
$x(x - 6) = 0$
$x = 0$ o $x - 6 = 0$
$x = 0 + 6$
$x = 6$
R: $x = 0$ o 6

d. $x^2 + 2x = 0$
$x(x + 2) = 0$
$x = 0$ o $x + 2 = 0$
$x = 0 - 2$
$x = -2$
R: $x = 0$ o -2

e. $x^2 - 3x = 0$
$x(x - 3) = 0$
$x = 0$ o $x - 3 = 0$
$x = 0 + 3$
$x = 3$
R: $x = 0$ o 3

f. $x^2 + 6x = 0$
$x(x + 6) = 0$
$x = 0$ o $x + 6 = 0$
$x = 0 - 6$
$x = -6$
R: $x = 0$ o -6

Ver ejercicios restantes en la página G70.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-11 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

Ⓟ Resuelva.
$x^2 + 5x = 0$

Ⓢ $x^2 + 5x = 0$
$x(x + 5) = 0$
$x = 0$ o $x + 5 = 0$
$x = 0 - 5$
$x = -5$

Si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

R: $x = 0$ o -5

Ⓒ Para resolver $x^2 + bx = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión extrayendo el factor común. $x(x + b) = 0$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$. $x = 0$ o $x + b = 0$

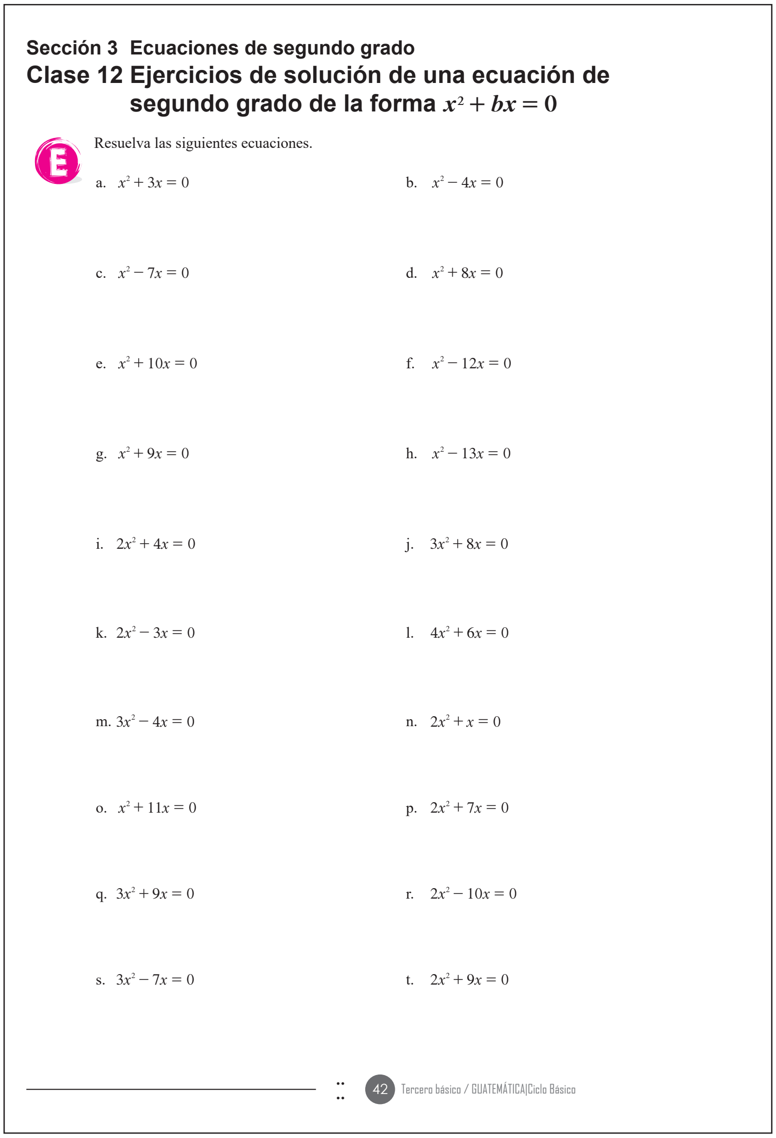
Paso 3. Se resuelve la ecuación de primer grado.
$x + b = 0$
$x = 0 - b$
$x = -b$

R: $x = 0$ o $-b$

Ⓔ Resuelva.
a. $x^2 + 4x = 0$
$x(x + 4) = 0$
$x = 0$ o $x + 4 = 0$
$x = 0 - 4$
$x = -4$
R: $x = 0$ o -4

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 + 3x = 0$
b. $x^2 - 4x = 0$
c. $x^2 - 7x = 0$
d. $x^2 + 8x = 0$
e. $x^2 + 10x = 0$
f. $x^2 - 12x = 0$
g. $x^2 + 9x = 0$
h. $x^2 - 13x = 0$
i. $2x^2 + 4x = 0$
j. $3x^2 + 8x = 0$
k. $2x^2 - 3x = 0$
l. $4x^2 + 6x = 0$
m. $3x^2 - 4x = 0$
n. $2x^2 + x = 0$
o. $x^2 + 11x = 0$
p. $2x^2 + 7x = 0$
q. $3x^2 + 9x = 0$
r. $2x^2 - 10x = 0$
s. $3x^2 - 7x = 0$
t. $2x^2 + 9x = 0$

42 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$x = 0$ o $x + 3 = 0$
$x = 0 - 3$
$x = -3$
R: $x = 0$ o -3

b. $x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ o $x - 4 = 0$
$x = 0 + 4$
$x = 4$
R: $x = 0$ o 4

c. $x^2 - 7x = 0$
$x(x - 7) = 0$
$x = 0$ o $x - 7 = 0$
$x = 0 + 7$
$x = 7$
R: $x = 0$ o 7

d. $x^2 + 8x = 0$
$x(x + 8) = 0$
$x = 0$ o $x + 8 = 0$
$x = 0 - 8$
$x = -8$
R: $x = 0$ o -8

e. $x^2 + 10x = 0$
$x(x + 10) = 0$
$x = 0$ o $x + 10 = 0$
$x = 0 - 10$
$x = -10$
R: $x = 0$ o -10

f. $x^2 - 12x = 0$
$x(x - 12) = 0$
$x = 0$ o $x - 12 = 0$
$x = 0 + 12$
$x = 12$
R: $x = 0$ o 12

g. $x^2 + 9x = 0$
$x(x + 9) = 0$
$x = 0$ o $x + 9 = 0$
$x = 0 - 9$
$x = -9$
R: $x = 0$ o -9

Ver ejercicios restantes en la página G70.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-12 Ejercicios de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + bx = 0$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2 + 3x = 0$
$x(x + 3) = 0$
$x = 0$ o $x + 3 = 0$
$x = 0 - 3$
$x = -3$
R: $x = 0$ o -3

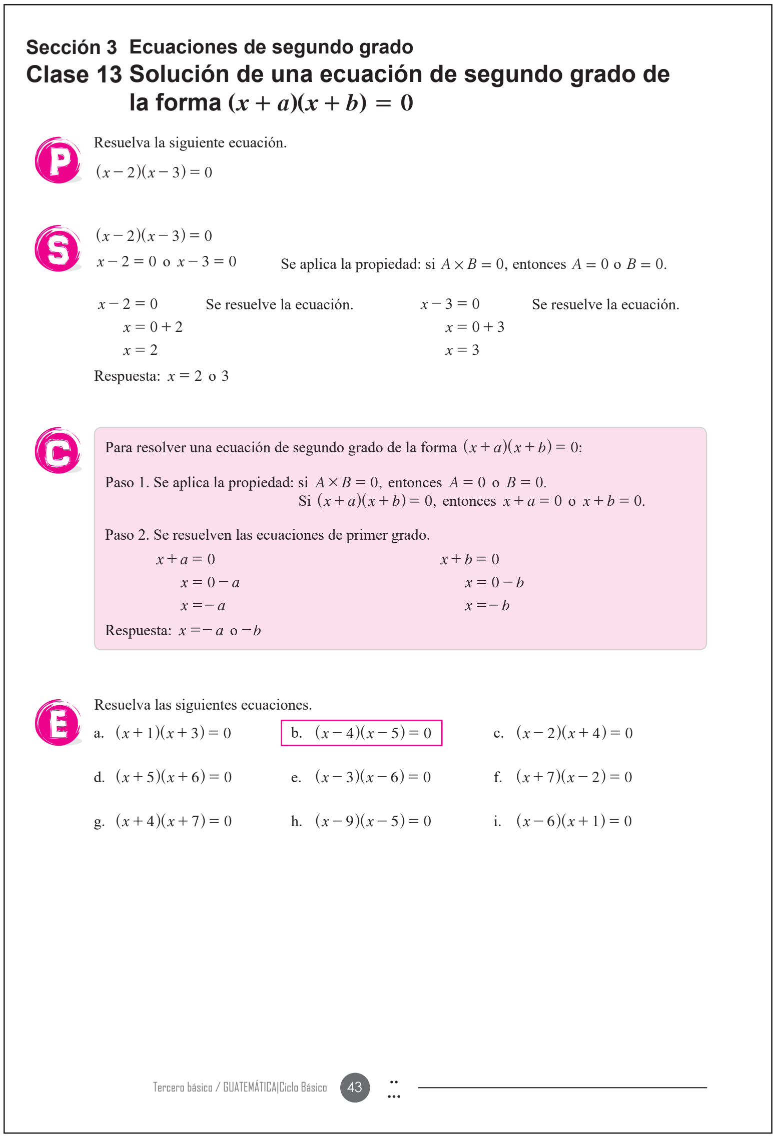
b. $x^2 - 4x = 0$
$x(x - 4) = 0$
$x = 0$ o $x - 4 = 0$
$x = 0 + 4$
$x = 4$
R: $x = 0$ o 4

c. $x^2 - 7x = 0$
$x(x - 7) = 0$
$x = 0$ o $x - 7 = 0$
$x = 0 + 7$
$x = 7$
R: $x = 0$ o 7

d. $x^2 + 8x = 0$
$x(x + 8) = 0$
$x = 0$ o $x + 8 = 0$
$x = 0 - 8$
$x = -8$
R: $x = 0$ o -8

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$

P Resuelva la siguiente ecuación.
$(x-2)(x-3)=0$

S $(x-2)(x-3)=0$
$x-2=0$ o $x-3=0$ Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.

$x-2=0$ Se resuelve la ecuación.
$x=0+2$
$x=2$

$x-3=0$ Se resuelve la ecuación.
$x=0+3$
$x=3$

Respuesta: $x=2$ o 3

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$:

Paso 1. Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.
Si $(x+a)(x+b)=0$, entonces $x+a=0$ o $x+b=0$.

Paso 2. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.

$x+a=0$
$x=0-a$
$x=-a$

$x+b=0$
$x=0-b$
$x=-b$

Respuesta: $x=-a$ o $-b$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $(x+1)(x+3)=0$
b. $(x-4)(x-5)=0$
c. $(x-2)(x+4)=0$
d. $(x+5)(x+6)=0$
e. $(x-3)(x-6)=0$
f. $(x+7)(x-2)=0$
g. $(x+4)(x+7)=0$
h. $(x-9)(x-5)=0$
i. $(x-6)(x+1)=0$

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+1)(x+3)=0$
$x+1=0$ o $x+3=0$
$x=0-1$ $x=0-3$
$x=-1$ $x=-3$
R: $x=-1$ o -3

b. $(x-4)(x-5)=0$
$x-4=0$ o $x-5=0$
$x=0+4$ $x=0+5$
$x=4$ $x=5$
R: $x=4$ o 5

c. $(x-2)(x+4)=0$
$x-2=0$ o $x+4=0$
$x=0+2$ $x=0-4$
$x=2$ $x=-4$
R: $x=2$ o -4

d. $(x+5)(x+6)=0$
$x+5=0$ o $x+6=0$
$x=0-5$ $x=0-6$
$x=-5$ $x=-6$
R: $x=-5$ o -6

e. $(x-3)(x-6)=0$
$x-3=0$ o $x-6=0$
$x=0+3$ $x=0+6$
$x=3$ $x=6$
R: $x=3$ o 6

f. $(x+7)(x-2)=0$
$x+7=0$ o $x-2=0$
$x=0-7$ $x=0+2$
$x=-7$ $x=2$
R: $x=-7$ o 2

Ver ejercicios restantes en la página G71.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-13 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $(x+a)(x+b)=0$

Ⓟ Resuelva.
$(x-2)(x-3)=0$

Ⓢ $x-2=0$ o $x-3=0$
$x=0+2$ $x=0+3$
$x=2$ $x=3$

R: $x=2$ o 3

Ⓒ Para resolver $(x+a)(x+b)=0$:

Paso 1. Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.
Si $(x+a)(x+b)$, entonces $x+a=0$ o $x+b=0$.

Paso 2. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.

$x+a=0$ $x+b=0$
$x=0-a$ $x=0-b$
$x=-a$ $x=-b$

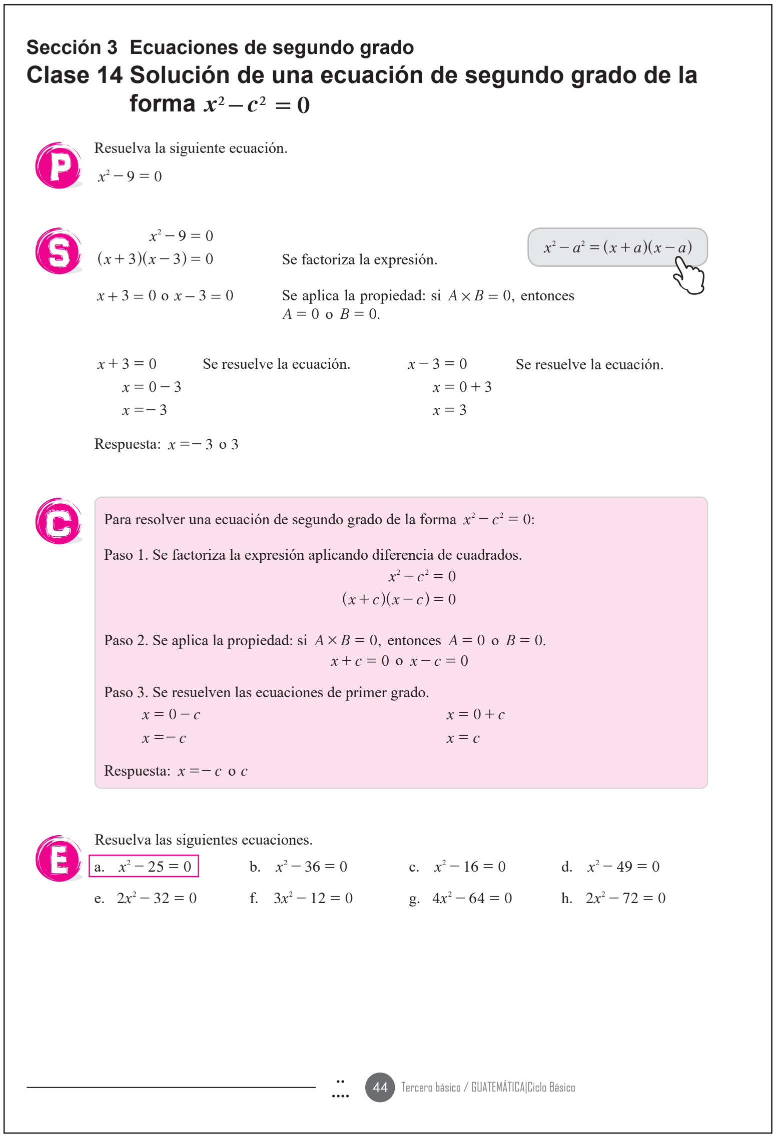
R: $x=-a$ o $x=-b$

Ⓔ Resuelva.
b. $(x-4)(x-5)=0$
$x-4=0$ o $x-5=0$
$x=0+4$ $x=0+5$
$x=4$ $x=5$

R: $x=4$ o 5

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

P Resuelva la siguiente ecuación.

$x^2 - 9 = 0$

S

$x^2 - 9 = 0$

$(x+3)(x-3) = 0$ Se factoriza la expresión.

$x^2 - a^2 = (x+a)(x-a)$

$x+3=0$ o $x-3=0$ Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$x+3=0$ Se resuelve la ecuación.
$x = 0-3$
$x = -3$

$x-3=0$ Se resuelve la ecuación.
$x = 0+3$
$x = 3$

Respuesta: $x = -3$ o 3

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión aplicando diferencia de cuadrados.
$x^2 - c^2 = 0$
$(x+c)(x-c) = 0$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.
$x+c=0$ o $x-c=0$

Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.
$x = 0-c$ $\quad$ $x = 0+c$
$x = -c$ $\quad$ $x = c$

Respuesta: $x = -c$ o c

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 25 = 0$ $\quad$ b. $x^2 - 36 = 0$ $\quad$ c. $x^2 - 16 = 0$ $\quad$ d. $x^2 - 49 = 0$

e. $2x^2 - 32 = 0$ $\quad$ f. $3x^2 - 12 = 0$ $\quad$ g. $4x^2 - 64 = 0$ $\quad$ h. $2x^2 - 72 = 0$

44 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 - 25 = 0$
$(x+5)(x-5) = 0$
$x+5=0$ o $x-5=0$
$x = 0-5$ $\quad$ $x = 0+5$
$x = -5$ $\quad$ $x = 5$
R: $x = -5$ o 5

b. $x^2 - 36 = 0$
$(x+6)(x-6) = 0$
$x+6=0$ o $x-6=0$
$x = 0-6$ $\quad$ $x = 0+6$
$x = -6$ $\quad$ $x = 6$
R: $x = -6$ o 6

c. $x^2 - 16 = 0$
$(x+4)(x-4) = 0$
$x+4=0$ o $x-4=0$
$x = 0-4$ $\quad$ $x = 0+4$
$x = -4$ $\quad$ $x = 4$
R: $x = -4$ o 4

d. $x^2 - 49 = 0$
$(x+7)(x-7) = 0$
$x+7=0$ o $x-7=0$
$x = 0-7$ $\quad$ $x = 0+7$
$x = -7$ $\quad$ $x = 7$
R: $x = -7$ o 7

e. $2x^2 - 32 = 0$
$2(x^2 - 16) = 0$
$2(x+4)(x-4) = 0$
$x+4=0$ o $x-4=0$
$x = 0-4$ $\quad$ $x = 0+4$
$x = -4$ $\quad$ $x = 4$
R: $x = -4$ o 4

f. $3x^2 - 12 = 0$
$3(x^2 - 4) = 0$
$3(x+2)(x-2) = 0$
$x+2=0$ o $x-2=0$
$x = 0-2$ $\quad$ $x = 0+2$
$x = -2$ $\quad$ $x = 2$
R: $x = -2$ o 2

Ver ejercicios restantes en la página G71.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-14 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

Ⓟ Resuelva.
$x^2 - 9 = 0$

Ⓢ $x^2 - 9 = 0$
$(x+3)(x-3) = 0$
$x+3=0$ o $x-3=0$
$x = 0-3$ $\quad$ $x = 0+3$
$x = -3$ $\quad$ $x = 3$
R: $x = -3$ o 3

Ⓒ Para resolver $x^2 - c^2 = 0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión aplicando diferencia de cuadrados.
$(x+c)(x-c) = 0$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.
$x+c=0$ o $x-c=0$

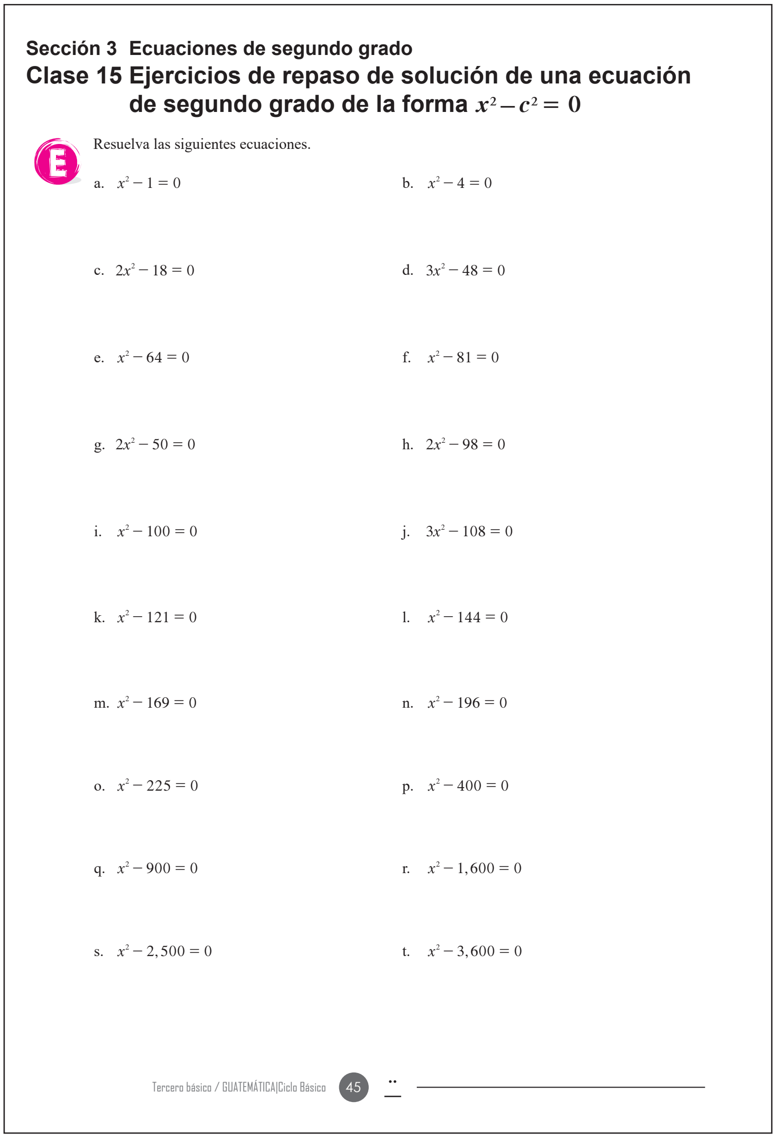
Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.
$x = 0-c$ o $x = 0+c$
$x = -c$ $\quad$ $x = c$
R: $x = -c$ o c

Ⓔ Resuelva.
a. $x^2 - 25 = 0$
$(x+5)(x-5) = 0$
$x+5=0$ o $x-5=0$
$x = 0-5$ $\quad$ $x = 0+5$
$x = -5$ $\quad$ $x = 5$
R: $x = -5$ o 5

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 15 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 15 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2 - 1 = 0$ b. $x^2 - 4 = 0$

c. $2x^2 - 18 = 0$ d. $3x^2 - 48 = 0$

e. $x^2 - 64 = 0$ f. $x^2 - 81 = 0$

g. $2x^2 - 50 = 0$ h. $2x^2 - 98 = 0$

i. $x^2 - 100 = 0$ j. $3x^2 - 108 = 0$

k. $x^2 - 121 = 0$ l. $x^2 - 144 = 0$

m. $x^2 - 169 = 0$ n. $x^2 - 196 = 0$

o. $x^2 - 225 = 0$ p. $x^2 - 400 = 0$

q. $x^2 - 900 = 0$ r. $x^2 - 1,600 = 0$

s. $x^2 - 2,500 = 0$ t. $x^2 - 3,600 = 0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 45

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 - 1 = 0$
$(x+1)(x-1) = 0$
$x+1 = 0$ o $x-1 = 0$
$x = 0-1$ $x = 0+1$
$x = -1$ $x = 1$
R: $x = -1$ o 1

b. $x^2 - 4 = 0$
$(x+2)(x-2) = 0$
$x+2 = 0$ o $x-2 = 0$
$x = 0-2$ $x = 0+2$
$x = -2$ $x = 2$
R: $x = -2$ o 2

c. $2x^2 - 18 = 0$
$2(x^2 - 9) = 0$
$2(x+3)(x-3) = 0$
$x+3 = 0$ o $x-3 = 0$
$x = 0-3$ $x = 0+3$
$x = -3$ $x = 3$
R: $x = -3$ o 3

d. $3x^2 - 48 = 0$
$3(x^2 - 16) = 0$
$3(x+4)(x-4) = 0$
$x+4 = 0$ o $x-4 = 0$
$x = 0-4$ $x = 0+4$
$x = -4$ $x = 4$
R: $x = -4$ o 4

e. $x^2 - 64 = 0$
$(x+8)(x-8) = 0$
$x+8 = 0$ o $x-8 = 0$
$x = 0-8$ $x = 0+8$
$x = -8$ $x = 8$
R: $x = -8$ o 8

f. $x^2 - 81 = 0$
$(x+9)(x-9) = 0$
$x+9 = 0$ o $x-9 = 0$
$x = 0-9$ $x = 0+9$
$x = -9$ $x = 9$
R: $x = -9$ o 9

Ver ejercicios restantes en la página G71.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-15 Ejercicios de repaso de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 - c^2 = 0$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2 - 1 = 0$
$(x+1)(x-1) = 0$
$x+1 = 0$ o $x-1 = 0$
$x = 0-1$ $x = 0+1$
$x = -1$ $x = 1$
R: $x = -1$ o 1

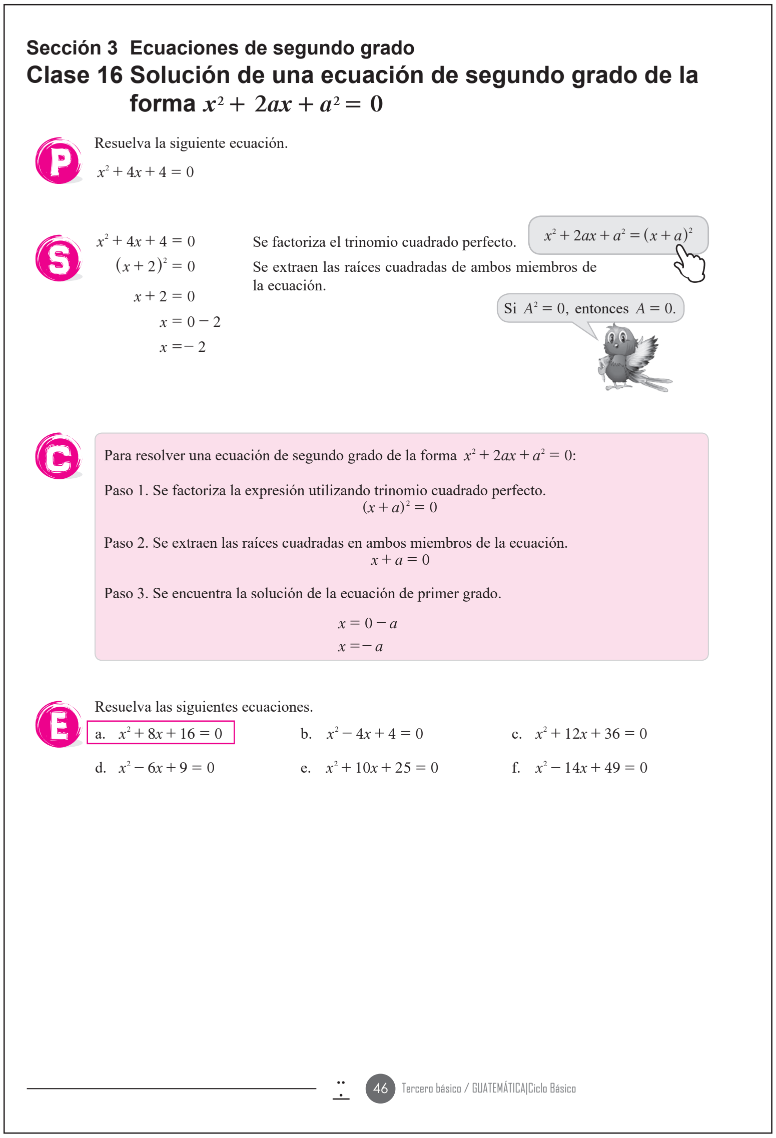
b. $x^2 - 4 = 0$
$(x+2)(x-2) = 0$
$x+2 = 0$ o $x-2 = 0$
$x = 0-2$ $x = 0+2$
$x = -2$ $x = 2$
R: $x = -2$ o 2

c. $2x^2 - 18 = 0$
$2(x^2 - 9) = 0$
$2(x+3)(x-3) = 0$
$x+3 = 0$ o $x-3 = 0$
$x = 0-3$ $x = 0+3$
$x = -3$ $x = 3$
R: $x = -3$ o 3

d. $3x^2 - 48 = 0$
$3(x^2 - 16) = 0$
$3(x+4)(x-4) = 0$
$x+4 = 0$ o $x-4 = 0$
$x = 0-4$ $x = 0+4$
$x = -4$ $x = 4$
R: $x = -4$ o 4

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2 + 2ax + a^2 = 0$

P Resuelva la siguiente ecuación.
$x^2+4x+4=0$

S
$$\begin{aligned} x^2+4x+4&=0\\ (x+2)^2&=0\\ x+2&=0\\ x&=0-2\\ x&=-2 \end{aligned}$$

Se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. $x^2+2ax+a^2=(x+a)^2$

Se extraen las raíces cuadradas de ambos miembros de la ecuación.

Si $A^2=0$, entonces $A=0$.

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión utilizando trinomio cuadrado perfecto.
$$(x+a)^2=0$$

Paso 2. Se extraen las raíces cuadradas en ambos miembros de la ecuación.
$$x+a=0$$

Paso 3. Se encuentra la solución de la ecuación de primer grado.
$$\begin{aligned} x&=0-a\\ x&=-a \end{aligned}$$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2+8x+16=0$ b. $x^2-4x+4=0$ c. $x^2+12x+36=0$
d. $x^2-6x+9=0$ e. $x^2+10x+25=0$ f. $x^2-14x+49=0$

46 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a.
$$\begin{aligned} x^2+8x+16&=0\\ (x+4)^2&=0\\ x+4&=0\\ x&=0-4\\ x&=-4 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} x^2-4x+4&=0\\ (x-2)^2&=0\\ x-2&=0\\ x&=0+2\\ x&=2 \end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned} x^2+12x+36&=0\\ (x+6)^2&=0\\ x+6&=0\\ x&=0-6\\ x&=-6 \end{aligned}$$

d.
$$\begin{aligned} x^2-6x+9&=0\\ (x-3)^2&=0\\ x-3&=0\\ x&=0+3\\ x&=3 \end{aligned}$$

e.
$$\begin{aligned} x^2+10x+25&=0\\ (x+5)^2&=0\\ x+5&=0\\ x&=0-5\\ x&=-5 \end{aligned}$$

f.
$$\begin{aligned} x^2-14x+49&=0\\ (x-7)^2&=0\\ x-7&=0\\ x&=0+7\\ x&=7 \end{aligned}$$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-16 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$

Ⓟ Resuelva.
$x^2+4x+4=0$

Ⓢ
$$\begin{aligned} x^2+4x+4&=0\\ (x+2)^2&=0\\ x+2&=0\\ x&=0-2\\ x&=-2 \end{aligned}$$

Si $A^2=0$, entonces $A=0$.

R: $x=-2$

Ⓒ Para resolver $x^2+2ax+a^2=0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión utilizando el trinomio cuadrado perfecto.
$$(x+a)^2=0$$

Paso 2. Se extraen las raíces cuadradas en ambos miembros de la ecuación.
$$x+a=0$$

Paso 3. Se encuentra la solución de la ecuación de primer grado.
$$\begin{aligned} x&=0-a\\ x&=-a \end{aligned}$$

Ⓔ Resuelva.

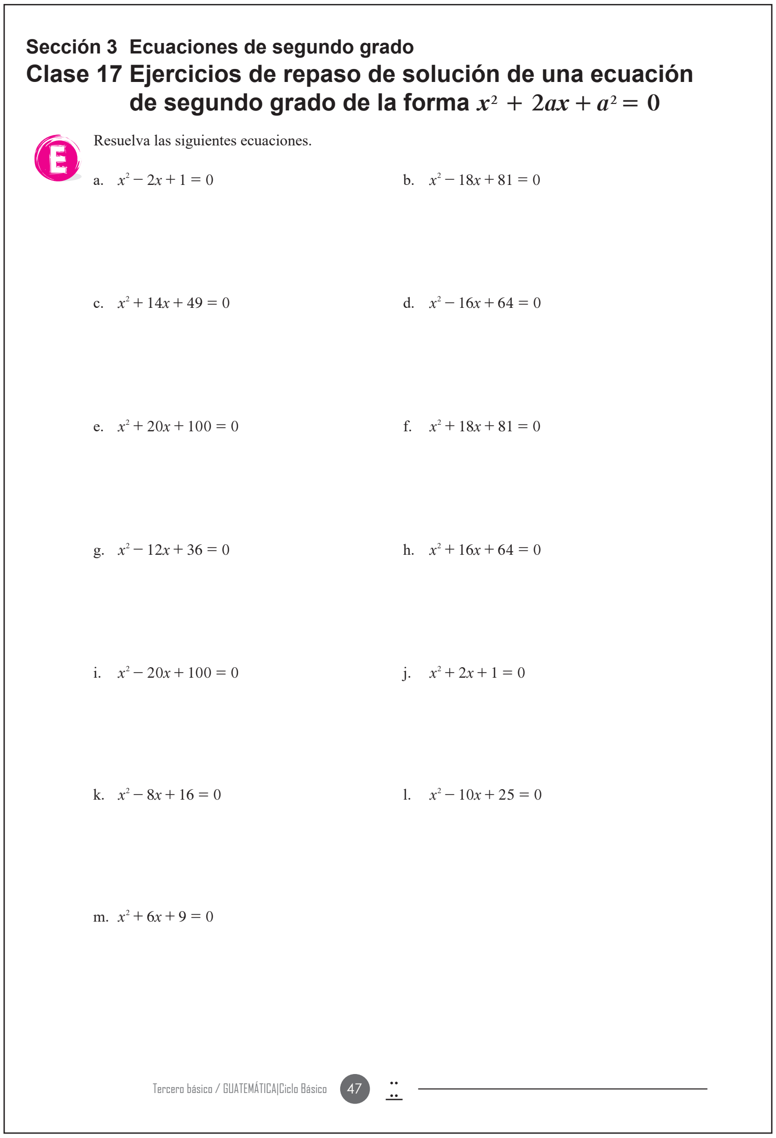
a. $x^2+8x+16=0$
$$\begin{aligned} (x+4)^2&=0\\ x+4&=0\\ x&=0-4\\ x&=-4 \end{aligned}$$

R: $x=-4$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2-2x+1=0$
b. $x^2-18x+81=0$
c. $x^2+14x+49=0$
d. $x^2-16x+64=0$
e. $x^2+20x+100=0$
f. $x^2+18x+81=0$
g. $x^2-12x+36=0$
h. $x^2+16x+64=0$
i. $x^2-20x+100=0$
j. $x^2+2x+1=0$
k. $x^2-8x+16=0$
l. $x^2-10x+25=0$
m. $x^2+6x+9=0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 47

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$x-1=0$
$x=0+1$
$x=1$

b. $x^2-18x+81=0$
$(x-9)^2=0$
$x-9=0$
$x=0+9$
$x=9$

c. $x^2+14x+49=0$
$(x+7)^2=0$
$x+7=0$
$x=0-7$
$x=-7$

d. $x^2-16x+64=0$
$(x-8)^2=0$
$x-8=0$
$x=0+8$
$x=8$

e. $x^2+20x+100=0$
$(x+10)^2=0$
$x+10=0$
$x=0-10$
$x=-10$

f. $x^2+18x+81=0$
$(x+9)^2=0$
$x+9=0$
$x=0-9$
$x=-9$

g. $x^2-12x+36=0$
$(x-6)^2=0$
$x-6=0$
$x=0+6$
$x=6$

h. $x^2+16x+64=0$
$(x+8)^2=0$
$x+8=0$
$x=0-8$
$x=-8$

i. $x^2-20x+100=0$
$(x-10)^2=0$
$x-10=0$
$x=0+10$
$x=10$

j. $x^2+2x+1=0$
$(x+1)^2=0$
$x+1=0$
$x=0-1$
$x=-1$

k. $x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$
$x-4=0$
$x=0+4$
$x=4$

l. $x^2-10x+25=0$
$(x-5)^2=0$
$x-5=0$
$x=0+5$
$x=5$

m. $x^2+6x+9=0$
$(x+3)^2=0$
$x+3=0$
$x=0-3$
$x=-3$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-17 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+2ax+a^2=0$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$x-1=0$
$x=0+1$
$x=1$
R: $x=1$

b. $x^2-18x+81=0$
$(x-9)^2=0$
$x-9=0$
$x=0+9$
$x=9$
R: $x=9$

c. $x^2+14x+49=0$
$(x+7)^2=0$
$x+7=0$
$x=0-7$
$x=-7$
R: $x=-7$

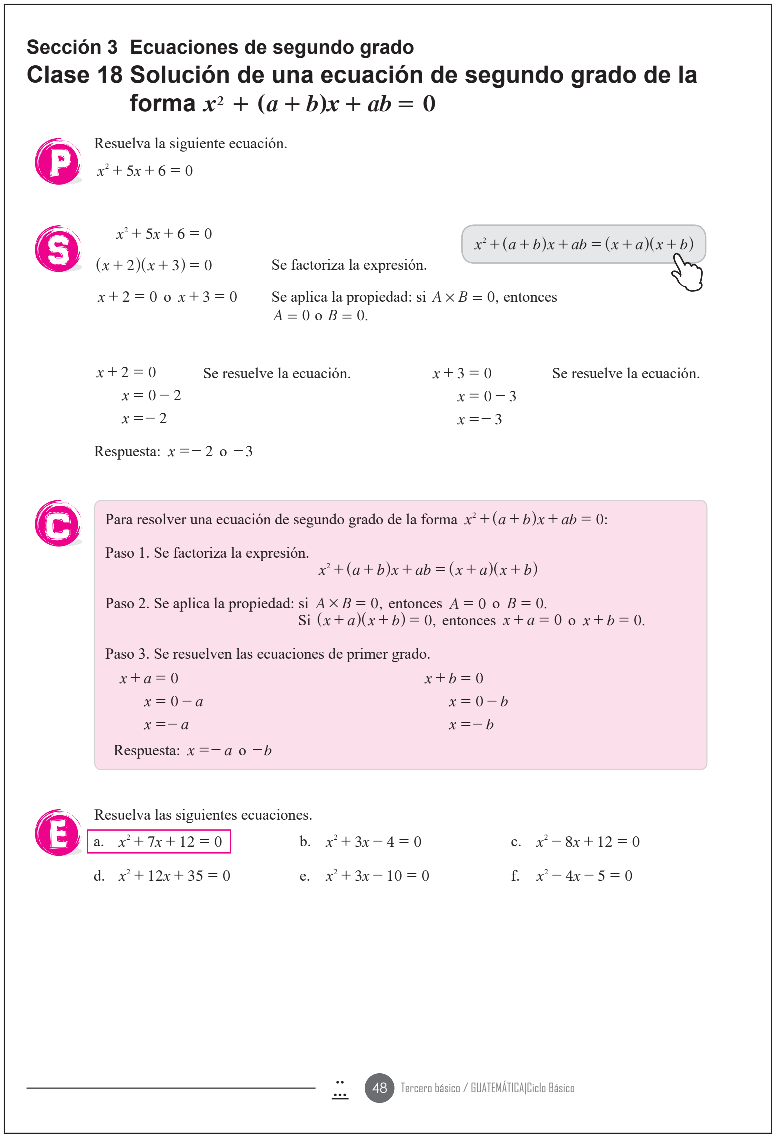
d. $x^2-16x+64=0$
$(x-8)^2=0$
$x-8=0$
$x=0+8$
$x=8$
R: $x=8$

e. $x^2+20x+100=0$
$(x+10)^2=0$
$x+10=0$
$x=0-10$
$x=-10$
R: $x=-10$

f. $x^2+18+81=0$
$(x+9)^2=0$
$x+9=0$
$x=0-9$
$x=-9$
R: $x=-9$

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

P Resuelva la siguiente ecuación.
$x^2+5x+6=0$

S $x^2+5x+6=0$
$(x+2)(x+3)=0$ Se factoriza la expresión.
$x+2=0$ o $x+3=0$ Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.

$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

$x+2=0$ Se resuelve la ecuación. $x+3=0$ Se resuelve la ecuación.
$x=0-2$ $\qquad$ $x=0-3$
$x=-2$ $\qquad$ $x=-3$

Respuesta: $x=-2$ o -3

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$:

Paso 1. Se factoriza la expresión.
$x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.
Si $(x+a)(x+b)=0$, entonces $x+a=0$ o $x+b=0$.

Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.
$x+a=0$ $\qquad$ $x+b=0$
$x=0-a$ $\qquad$ $x=0-b$
$x=-a$ $\qquad$ $x=-b$
Respuesta: $x=-a$ o $-b$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.
a. $x^2+7x+12=0$ $\qquad$ b. $x^2+3x-4=0$ $\qquad$ c. $x^2-8x+12=0$
d. $x^2+12x+35=0$ $\qquad$ e. $x^2+3x-10=0$ $\qquad$ f. $x^2-4x-5=0$

48 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2+7x+12=0$
$(x+3)(x+4)=0$
$x+3=0$ o $x+4=0$
$x=0-3$ $\qquad$ $x=0-4$
$x=-3$ $\qquad$ $x=-4$
R: $x=-3$ o -4

b. $x^2+3x-4=0$
$(x-1)(x+4)=0$
$x-1=0$ o $x+4=0$
$x=0+1$ $\qquad$ $x=0-4$
$x=1$ $\qquad$ $x=-4$
R: $x=1$ o -4

c. $x^2-8x+12=0$
$(x-2)(x-6)=0$
$x-2=0$ o $x-6=0$
$x=0+2$ $\qquad$ $x=0+6$
$x=2$ $\qquad$ $x=6$
R: $x=2$ o 6

d. $x^2+12x+35=0$
$(x+5)(x+7)=0$
$x+5=0$ o $x+7=0$
$x=0-5$ $\qquad$ $x=0-7$
$x=-5$ $\qquad$ $x=-7$
R: $x=-5$ o -7

e. $x^2+3x-10=0$
$(x-2)(x+5)=0$
$x-2=0$ o $x+5=0$
$x=0+2$ $\qquad$ $x=0-5$
$x=2$ $\qquad$ $x=-5$
R: $x=2$ o -5

f. $x^2-4x-5=0$
$(x+1)(x-5)=0$
$x+1=0$ o $x-5=0$
$x=0-1$ $\qquad$ $x=0+5$
$x=-1$ $\qquad$ $x=5$
R: $x=-1$ o 5

Fecha: dd – mm – aa
1-3-18 Solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

Ⓟ Resuelva.
$x^2+5x+6=0$

Ⓢ $x^2+5x+6=0$
$(x+3)(x+2)=0$
$x+3=0$ o $x+2=0$
$x=0-3$ $\qquad$ $x=0-2$
$x=-3$ $\qquad$ $x=-2$

R: $x=-3$ o -2

Ⓒ Para resolver $x^2+(a+b)x+ab=0$:

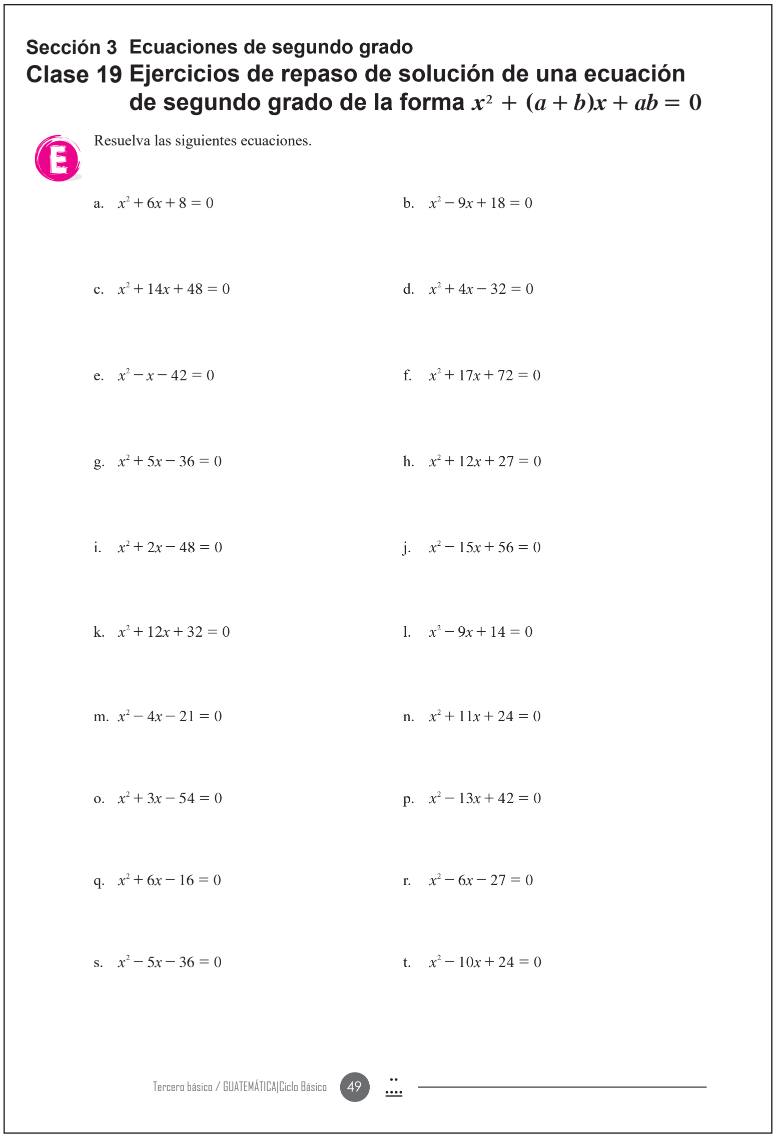
Paso 1. Se factoriza. $x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$
Paso 2. Se aplica la propiedad: si $A\times B=0$, entonces $A=0$ o $B=0$.
Si $(x+a)(x+b)=0$, entonces $x+a=0$ o $x+b=0$.
Paso 3. Se resuelven las ecuaciones de primer grado.
$x+a=0$ o $x+b=0$
$x=0-a$ $\qquad$ $x=0-b$
$x=-a$ $\qquad$ $x=-b$
R: $x=-a$ o $-b$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2+7x+12=0$
$(x+3)(x+4)=0$
$x+3=0$ o $x+4=0$
$x=0-3$ $\qquad$ $x=0-4$
$x=-3$ $\qquad$ $x=-4$
R: $x=-3$ o -4

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2+6x+8=0$
b. $x^2-9x+18=0$
c. $x^2+14x+48=0$
d. $x^2+4x-32=0$
e. $x^2-x-42=0$
f. $x^2+17x+72=0$
g. $x^2+5x-36=0$
h. $x^2+12x+27=0$
i. $x^2+2x-48=0$
j. $x^2-15x+56=0$
k. $x^2+12x+32=0$
l. $x^2-9x+14=0$
m. $x^2-4x-21=0$
n. $x^2+11x+24=0$
o. $x^2+3x-54=0$
p. $x^2-13x+42=0$
q. $x^2+6x-16=0$
r. $x^2-6x-27=0$
s. $x^2-5x-36=0$
t. $x^2-10x+24=0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 49

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2+6x+8=0$
$(x+2)(x+4)=0$
$x+2=0$ o $x+4=0$
$x=0-2$ $x=0-4$
$x=-2$ $x=-4$
R: $x=-2$ o -4

b. $x^2-9x+18=0$
$(x-3)(x-6)=0$
$x-3=0$ o $x-6=0$
$x=0+3$ $x=0+6$
$x=3$ $x=6$
R: $x=3$ o 6

c. $x^2+14x+48=0$
$(x+6)(x+8)=0$
$x+6=0$ o $x+8=0$
$x=0-6$ $x=0-8$
$x=-6$ $x=-8$
R: $x=-6$ o -8

d. $x^2+4x-32=0$
$(x-4)(x+8)=0$
$x-4=0$ o $x+8=0$
$x=0+4$ $x=0-8$
$x=4$ $x=-8$
R: $x=4$ o -8

e. $x^2-x-42=0$
$(x+6)(x-7)=0$
$x+6=0$ o $x-7=0$
$x=0-6$ $x=0+7$
$x=-6$ $x=7$
R: $x=-6$ o 7

f. $x^2+17x+72=0$
$(x+8)(x+9)=0$
$x+8=0$ o $x+9=0$
$x=0-8$ $x=0-9$
$x=-8$ $x=-9$
R: $x=-8$ o -9

Ver ejercicios restantes en la página G72.

Fecha: dd – mm – aa
1-3-19 Ejercicios de repaso de solución de una ecuación de segundo grado de la forma $x^2+(a+b)x+ab=0$

Ⓔ Resuelva.

a. $x^2+6x+8=0$
$(x+2)(x+4)=0$
$x+2=0$ o $x+4=0$
$x=0-2$ $x=0-4$
$x=-2$ $x=-4$
R: $x=-2$ o -4

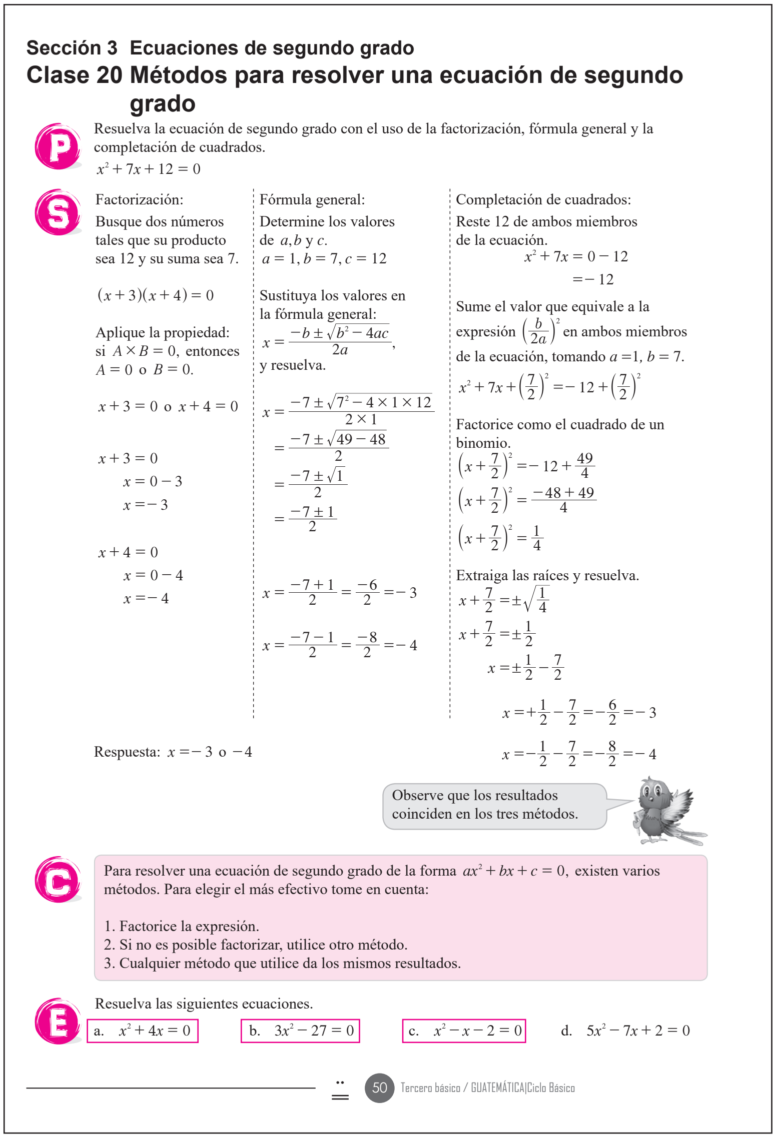
b. $x^2-9x+18=0$
$(x-3)(x-6)=0$
$x-3=0$ o $x-6=0$
$x=0+3$ $x=0+6$
$x=3$ $x=6$
R: $x=3$ o 6

c. $x^2+14x+48=0$
$(x+6)(x+8)=0$
$x+6=0$ o $x+8=0$
$x=0-6$ $x=0-8$
$x=-6$ $x=-8$
R: $x=-6$ o -8

d. $x^2+4x-32=0$
$(x-4)(x+8)=0$
$x-4=0$ o $x+8=0$
$x=0+4$ $x=0-8$
$x=4$ $x=-8$
R: $x=4$ o -8

Sección 3 Ecuaciones de segundo grado
Clase 20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Resuelve una ecuación de segundo grado usando factorización, fórmula general o completación de cuadrados.



Sección 3 Ecuaciones de segundo grado

Clase 20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado

P Resuelva la ecuación de segundo grado con el uso de la factorización, fórmula general y la completación de cuadrados.

$x^2 + 7x + 12 = 0$

S Factorización:

Busque dos números tales que su producto sea 12 y su suma sea 7.

$(x+3)(x+4) = 0$

Aplique la propiedad: si $A \times B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

$x+3=0$ o $x+4=0$

$x+3=0$
$x=0-3$
$x=-3$

$x+4=0$
$x=0-4$
$x=-4$

Fórmula general:

Determine los valores de a, b y c.
$a=1, b=7, c=12$

Sustituya los valores en la fórmula general:
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$,
y resuelva.

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \times 1 \times 12}}{2 \times 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}$$

$$x = \frac{-7+1}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

$$x = \frac{-7-1}{2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Completación de cuadrados:

Reste 12 de ambos miembros de la ecuación.

$$x^2 + 7x = 0 - 12$$
$$= -12$$

Sume el valor que equivale a la expresión $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación, tomando $a=1$, $b=7$.

$$x^2 + 7x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

Factorice como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = -12 + \frac{49}{4}$$
$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{-48+49}{4}$$
$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Extraiga las raíces y resuelva.

$$x+\frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x+\frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{2} - \frac{7}{2}$$
$$x = +\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$
$$x = -\frac{1}{2} - \frac{7}{2} = -\frac{8}{2} = -4$$

Respuesta: $x = -3$ o -4

Observe que los resultados coinciden en los tres métodos.

C Para resolver una ecuación de segundo grado de la forma $ax^2+bx+c=0$, existen varios métodos. Para elegir el más efectivo tome en cuenta:

1. Factorice la expresión.
2. Si no es posible factorizar, utilice otro método.
3. Cualquier método que utilice da los mismos resultados.

E Resuelva las siguientes ecuaciones.

a. $x^2+4x=0$
b. $3x^2-27=0$
c. $x^2-x-2=0$
d. $5x^2-7x+2=0$

50 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a.
$x^2+4x=0$
$x(x+4)=0$
$x=0$ o $x+4=0$
$x=0-4$
$x=-4$
R: $x = 0$ o -4

b.
$3x^2-27=0$
$3(x^2-9)=0$
$3(x+3)(x-3)=0$
$x+3=0$ o $x-3=0$
$x=0-3$ o $x=0+3$
$x=-3$ o $x=3$
R: $x=-3$ o 3

c.
$x^2-x-2=0$
$(x+1)(x-2)=0$
$x+1=0$ o $x-2=0$
$x=0-1$ o $x=0+2$
$x=-1$ o $x=2$
R: $x=-1$ o 2

d.
$5x^2-7x+2=0$
$$x = \frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times5\times2}}{2\times5} = \frac{7\pm\sqrt{49-40}}{10}$$
$$= \frac{7\pm\sqrt{9}}{10} = \frac{7\pm3}{10}$$
$$x = \frac{7+3}{10} = \frac{10}{10} = 1 \quad \text{o} \quad x = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$
R: $x = 1$ o $\frac{2}{5}$

Fecha: dd – mm – aa
1-3-20 Métodos para resolver una ecuación de segundo grado

P Resuelva con el uso de factorización, fórmula general y completación de cuadrados.
$x^2+7x+12=0$

S Factorización
$(x+3)(x+4)=0$

$x+3=0$ o $x+4=0$
$x=0-3$ o $x=0-4$
$x=-3$ o $x=-4$
R: $x=-3$ o -4

Fórmula general
$a=1, b=7, c=12$
$$x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$x = \frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\times1\times12}}{2\times1}$$
$$x = \frac{-7\pm\sqrt{49-48}}{2}$$
$$= \frac{-7\pm\sqrt{1}}{2}$$
$$= \frac{-7\pm1}{2}$$
$$x = \frac{-7+1}{2} \quad \text{o} \quad x = \frac{-7-1}{2}$$
$$= \frac{-6}{2} = -3 \qquad = \frac{-8}{2} = -4$$
R: $x=-3$ o -4

Completación de cuadrados
$$x^2+7x=0-12$$
$$x^2+7x=-12$$
$$x^2+7x+\left(\frac{7}{2}\right)^2 = -12+\left(\frac{7}{2}\right)^2$$
$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = -12+\frac{49}{4}$$
$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$x+\frac{7}{2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}}$$
$$x+\frac{7}{2} = \pm\frac{1}{2}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}-\frac{7}{2}$$
$$x = +\frac{1}{2}-\frac{7}{2} \quad \text{o} \quad x = -\frac{1}{2}-\frac{7}{2}$$
$$= -\frac{6}{2} = -3 \qquad = -\frac{8}{2} = -4$$
R: $x=-3$ o -4

E Resuelva.
a. $x^2+4x=0$
b. $3x^2-27=0$
c. $x^2-x-2=0$

Ver solucionario.

Complemento de solucionario de los ejercicios

Sección 2, clase 7

s. $x^2 - 16x + 63 = [x + (-7)][x + (-9)]$
$= (x - 7)(x - 9)$

t. $x^2 - 12x + 27 = [x + (-3)][x + (-9)]$
$= (x - 3)(x - 9)$

Sección 3, clase 2

c. Se sustituye x por -3.
$x^2 - 2x - 3$
$= (-3)^2 - 2 \times (-3) - 3$
$= 9 + 6 - 3$
$= 12$
-3 no es solución.

Se sustituye x por -1.
$x^2 - 2x - 3$
$= (-1)^2 - 2 \times (-1) - 3$
$= 1 + 2 - 3$
$= 0$
-1 es solución.

Se sustituye x por 1.
$x^2 - 2x - 3$
$= 1^2 - 2 \times 1 - 3$
$= 1 - 2 - 3$
$= -4$
1 no es solución.
R: -1 y 3

Se sustituye x por 3.
$x^2 - 2x - 3$
$= 3^2 - 2 \times 3 - 3$
$= 9 - 6 - 3$
$= 0$
3 es solución.

d. Se sustituye x por -4.
$x^2 + 2x - 8$
$= (-4)^2 + 2 \times (-4) - 8$
$= 16 - 8 - 8$
$= 0$
-4 es solución.

Se sustituye x por -2.
$x^2 + 2x - 8$
$= (-2)^2 + 2 \times (-2) - 8$
$= 4 - 4 - 8$
$= -8$
-2 no es solución.

Se sustituye x por 2.
$x^2 + 2x - 8$
$= 2^2 + 2 \times 2 - 8$
$= 4 + 4 - 8$
$= 0$
2 es solución.
R: -4 y 2

Se sustituye x por 4.
$x^2 + 2x - 8$
$= 4^2 + 2 \times 4 - 8$
$= 16 + 8 - 8$
$= 16$
4 no es solución.

e. Se sustituye x por -3.
$x^2 - 9$
$= (-3)^2 - 9$
$= 9 - 9$
$= 0$
-3 es solución.

Se sustituye x por -2.
$x^2 - 9$
$= (-2)^2 - 9$
$= 4 - 9$
$= -5$
-2 no es solución.

Se sustituye x por 2.
$x^2 - 9$
$= 2^2 + 9$
$= 4 - 9$
$= -5$
2 no es solución.
R: -3 y 3

Se sustituye x por 3.
$x^2 - 9$
$= 3^2 - 9$
$= 9 - 9$
$= 0$
3 es solución.

Sección 3, clase 5

e. $(x - 5)^2 = 4$
Se sustituye $x - 5$ por Y.
$Y^2 = 4$
$Y = \pm\sqrt{4}$
$Y = \pm 2$
Se sustituye Y por $x - 5$.
$x - 5 = 2$ o $x - 5 = -2$
$x = 2 + 5$ $x = -2 + 5$
$x = 7$ $x = 3$
R: $x = 7$ o 3

f. $(x + 4)^2 = 49$
Se sustituye $x + 4$ por Y.
$Y^2 = 49$
$Y = \pm\sqrt{49}$
$Y = \pm 7$
Se sustituye Y por $x + 4$.
$x + 4 = 7$ o $x + 4 = -7$
$x = 7 - 4$ $x = -7 - 4$
$x = 3$ $x = -11$
R: $x = 3$ o -11

g. $(x - 6)^2 = 16$
Se sustituye $x - 6$ por Y.
$Y^2 = 16$
$Y = \pm\sqrt{16}$
$Y = \pm 4$
Se sustituye Y por $x - 6$.
$x - 6 = 4$ o $x - 6 = -4$
$x = 4 + 6$ $x = -4 + 6$
$x = 10$ $x = 2$
R: $x = 10$ o 2

h. $(x + 5)^2 = 25$
Se sustituye $x + 5$ por Y.
$Y^2 = 25$
$Y = \pm\sqrt{25}$
$Y = \pm 5$
Se sustituye Y por $x + 5$.
$x + 5 = 5$ o $x + 5 = -5$
$x = 5 - 5$ $x = -5 - 5$
$x = 0$ $x = -10$
R: $x = 0$ o -10

Sección 3, clase 7

d.
$$x^2 + 2x - 4 = 0$$
$$x^2 + 2x = 4$$
$$x^2 + 2x + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 4 + \left(\frac{2}{2}\right)^2$$
$$x^2 + 2x + 1^2 = 4 + 1^2$$
$$x^2 + 2x + 1 = 5$$
$$(x + 1)^2 = 5$$
$$x + 1 = \pm\sqrt{5}$$
$$x = \pm\sqrt{5} - 1$$
R: $\sqrt{5} - 1$ o $-\sqrt{5} - 1$

Sección 3, clase 10

g. $2x^2 - 2x - 3 = 0$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3)}}{2 \times 2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 24}}{4}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{28}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \times 7}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{7}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$

h. $x^2 - 7x + 4 = 0$
$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 1 \times 4}}{2 \times 1} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 16}}{2}$$
$$= \frac{7 \pm \sqrt{33}}{2}$$

i. $2x^2 + 5x - 4 = 0$
$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-4)}}{2 \times 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 32}}{4}$$
$$= \frac{-5 \pm \sqrt{57}}{4}$$

j. $x^2 + 8x + 6 = 0$
$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \times 1 \times 6}}{2 \times 1} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 24}}{2}$$
$$= \frac{-8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{-8 \pm \sqrt{2^2 \times 10}}{2}$$
$$= \frac{-8 \pm 2\sqrt{10}}{2} = -4 \pm \sqrt{10}$$

k. $3x^2 - 2x - 4 = 0$
$$x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 3 \times (-4)}}{2 \times 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 48}}{6}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{52}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 \times 13}}{6} = \frac{2 \pm 2\sqrt{13}}{6}$$
$$= \frac{1 \pm \sqrt{13}}{3}$$

l. $4x^2+2x-1=0$

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times4\times(-1)}}{2\times4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+16}}{8}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2\times5}}{8}=\frac{-2\pm2\sqrt{5}}{8}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}$$

m. $2x^2-6x+3=0$

$$x=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\times2\times3}}{2\times2}=\frac{6\pm\sqrt{36-24}}{4}$$
$$=\frac{6\pm\sqrt{12}}{4}=\frac{6\pm\sqrt{2^2\times3}}{4}=\frac{6\pm2\sqrt{3}}{4}$$
$$=\frac{3\pm\sqrt{3}}{2}$$

n. $4x^2+x-2=0$

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times4\times(-2)}}{2\times4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+32}}{8}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{8}$$

o. $2x^2+4x-3=0$

$$x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times2\times(-3)}}{2\times2}=\frac{-4\pm\sqrt{16+24}}{4}$$
$$=\frac{-4\pm\sqrt{40}}{4}=\frac{-4\pm\sqrt{2^2\times10}}{4}=\frac{-4\pm2\sqrt{10}}{4}$$
$$=\frac{-2\pm\sqrt{10}}{2}$$

p. $4x^2+6x+1=0$

$$x=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\times4\times1}}{2\times4}=\frac{-6\pm\sqrt{36-16}}{8}$$
$$=\frac{-6\pm\sqrt{20}}{8}=\frac{-6\pm\sqrt{2^2\times5}}{8}=\frac{-6\pm2\sqrt{5}}{8}$$
$$=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{4}$$

q. $3x^2+5x-1=0$

$$x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times3\times(-1)}}{2\times3}=\frac{-5\pm\sqrt{25+12}}{6}$$
$$=\frac{-5\pm\sqrt{37}}{6}$$

r. $2x^2-4x+1=0$

$$x=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\times2\times1}}{2\times2}=\frac{4\pm\sqrt{16-8}}{4}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{8}}{4}=\frac{4\pm\sqrt{2^2\times2}}{4}=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

s. $4x^2-7x+2=0$

$$x=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\times4\times2}}{2\times4}=\frac{7\pm\sqrt{49-32}}{8}$$
$$=\frac{7\pm\sqrt{17}}{8}$$

t. $4x^2-5x+1=0$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times4\times1}}{2\times4}=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{8}$$
$$=\frac{5\pm\sqrt{9}}{8}=\frac{5\pm3}{8}$$
$$x=\frac{5+3}{8}=\frac{8}{8}=1 \quad \text{o} \quad x=\frac{5-3}{8}=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

Sección 3, clase 11

g. $x^2-8x=0$
$x(x-8)=0$
$x=0$ o $x-8=0$
$x=0+8$
$x=8$
R: $x=0$ o 8

h. $x^2+7x=0$
$x(x+7)=0$
$x=0$ o $x+7=0$
$x=0-7$
$x=-7$
R: $x=0$ o -7

Sección 3, clase 12

h. $x^2-13x=0$
$x(x-13)=0$
$x=0$ o $x-13=0$
$x=0+13$
$x=13$
R: $x=0$ o 13

i. $2x^2+4x=0$
$2x(x+2)=0$
$x=0$ o $x+2=0$
$x=0-2$
$x=-2$
R: $x=0$ o -2

j. $3x^2+8x=0$
$x(3x+8)=0$
$x=0$ o $3x+8=0$
$3x=-8$
$x=-\frac{8}{3}$
R: $x=0$ o $-\frac{8}{3}$

k. $2x^2-3x=0$
$x(2x-3)=0$
$x=0$ o $2x-3=0$
$2x=3$
$x=\frac{3}{2}$
R: $x=0$ o $\frac{3}{2}$

l. $4x^2+6x=0$
$2x(2x+3)=0$
$x=0$ o $2x+3=0$
$2x=-3$
$x=-\frac{3}{2}$
R: $x=0$ o $-\frac{3}{2}$

m. $3x^2-4x=0$
$x(3x-4)=0$
$x=0$ o $3x-4=0$
$3x=4$
$x=\frac{4}{3}$
R: $x=0$ o $\frac{4}{3}$

n. $2x^2+x=0$
$x(2x+1)=0$
$x=0$ o $2x+1=0$
$2x=-1$
$x=-\frac{1}{2}$
R: $x=0$ o $-\frac{1}{2}$

o. $x^2+11x=0$
$x(x+11)=0$
$x=0$ o $x+11=0$
$x=0-11$
$x=-11$
R: $x=0$ o -11

p. $2x^2+7x=0$
$x(2x+7)=0$
$x=0$ o $2x+7=0$
$2x=-7$
$x=-\frac{7}{2}$
R: $x=0$ o $-\frac{7}{2}$

q. $3x^2+9x=0$
$3x(x+3)=0$
$x=0$ o $x+3=0$
$x=0-3$
$x=-3$
R: $x=0$ o -3

r. $2x^2 - 10x = 0$
$2x(x-5) = 0$
$x = 0$ o $x - 5 = 0$
$x = 0 + 5$
$x = 5$
R: $x = 0$ o 5

s. $3x^2 - 7x = 0$
$x(3x-7) = 0$
$x = 0$ o $3x - 7 = 0$
$3x = 7$
$x = \frac{7}{3}$
R: $x = 0$ o $\frac{7}{3}$

t. $2x^2 + 9x = 0$
$x(2x+9) = 0$
$x = 0$ o $2x + 9 = 0$
$2x = -9$
$x = -\frac{9}{2}$
R: $x = 0$ o $-\frac{9}{2}$

Sección 3, clase 13

g. $(x+4)(x+7) = 0$
$x + 4 = 0$ o $x + 7 = 0$
$x = 0 - 4$ $\quad$ $x = 0 - 7$
$x = -4$ $\quad$ $x = -7$
R: $x = -4$ o -7

h. $(x-9)(x-5) = 0$
$x - 9 = 0$ o $x - 5 = 0$
$x = 0 + 9$ $\quad$ $x = 0 + 5$
$x = 9$ $\quad$ $x = 5$
R: $x = 9$ o 5

i. $(x-6)(x+1) = 0$
$x - 6 = 0$ o $x + 1 = 0$
$x = 0 + 6$ $\quad$ $x = 0 - 1$
$x = 6$ $\quad$ $x = -1$
R: $x = 6$ o -1

Sección 3, clase 14

g. $4x^2 - 64 = 0$
$4(x^2 - 16) = 0$
$4(x+4)(x-4) = 0$
$x + 4 = 0$ o $x - 4 = 0$
$x = 0 - 4$ $\quad$ $x = 0 + 4$
$x = -4$ $\quad$ $x = 4$
R: $x = -4$ o 4

h. $2x^2 - 72 = 0$
$2(x^2 - 36) = 0$
$2(x+6)(x-6) = 0$
$x + 6 = 0$ o $x - 6 = 0$
$x = 0 - 6$ $\quad$ $x = 0 + 6$
$x = -6$ $\quad$ $x = 6$
R: $x = -6$ o 6

Sección 3, clase 15

g. $2x^2 - 50 = 0$
$2(x^2 - 25) = 0$
$2(x+5)(x-5) = 0$
$x + 5 = 0$ o $x - 5 = 0$
$x = 0 - 5$ $\quad$ $x = 0 + 5$
$x = -5$ $\quad$ $x = 5$
R: $x = -5$ o 5

h. $2x^2 - 98 = 0$
$2(x^2 - 49) = 0$
$2(x+7)(x-7) = 0$
$x + 7 = 0$ o $x - 7 = 0$
$x = 0 - 7$ $\quad$ $x = 0 + 7$
$x = -7$ $\quad$ $x = 7$
R: $x = -7$ o 7

i. $x^2 - 100 = 0$
$(x+10)(x-10) = 0$
$x + 10 = 0$ o $x - 10 = 0$
$x = 0 - 10$ $\quad$ $x = 0 + 10$
$x = -10$ $\quad$ $x = 10$
R: $x = -10$ o 10

j. $3x^2 - 108 = 0$
$3(x^2 - 36) = 0$
$3(x+6)(x-6) = 0$
$x + 6 = 0$ o $x - 6 = 0$
$x = 0 - 6$ $\quad$ $x = 0 + 6$
$x = -6$ $\quad$ $x = 6$
R: $x = -6$ o 6

k. $x^2 - 121 = 0$
$(x+11)(x-11) = 0$
$x + 11 = 0$ o $x - 11 = 0$
$x = 0 - 11$ $\quad$ $x = 0 + 11$
$x = -11$ $\quad$ $x = 11$
R: $x = -11$ o 11

l. $x^2 - 144 = 0$
$(x+12)(x-12) = 0$
$x + 12 = 0$ o $x - 12 = 0$
$x = 0 - 12$ $\quad$ $x = 0 + 12$
$x = -12$ $\quad$ $x = 12$
R: $x = -12$ o 12

m. $x^2 - 169 = 0$
$(x+13)(x-13) = 0$
$x + 13 = 0$ o $x - 13 = 0$
$x = 0 - 13$ $\quad$ $x = 0 + 13$
$x = -13$ $\quad$ $x = 13$
R: $x = -13$ o 13

n. $x^2 - 196 = 0$
$(x+14)(x-14) = 0$
$x + 14 = 0$ o $x - 14 = 0$
$x = 0 - 14$ $\quad$ $x = 0 + 14$
$x = -14$ $\quad$ $x = 14$
R: $x = -14$ o 14

o. $x^2 - 225 = 0$
$(x+15)(x-15) = 0$
$x + 15 = 0$ o $x - 15 = 0$
$x = 0 - 15$ $\quad$ $x = 0 + 15$
$x = -15$ $\quad$ $x = 15$
R: $x = -15$ o 15

p. $x^2 - 400 = 0$
$(x+20)(x-20) = 0$
$x + 20 = 0$ o $x - 20 = 0$
$x = 0 - 20$ $\quad$ $x = 0 + 20$
$x = -20$ $\quad$ $x = 20$
R: $x = -20$ o 20

q. $x^2 - 900 = 0$
$(x+30)(x-30) = 0$
$x + 30 = 0$ o $x - 30 = 0$
$x = 0 - 30$ $\quad$ $x = 0 + 30$
$x = -30$ $\quad$ $x = 30$
R: $x = -30$ o 30

r. $x^2 - 1{,}600 = 0$
$(x+40)(x-40) = 0$
$x + 40 = 0$ o $x - 40 = 0$
$x = 0 - 40$ $\quad$ $x = 0 + 40$
$x = -40$ $\quad$ $x = 40$
R: $x = -40$ o 40

s. $x^2-2,500=0$
$(x+50)(x-50)=0$
$x+50=0$ o $x-50=0$
$x=0-50$ $x=0+50$
$x=-50$ $x=50$
R: $x=-50$ o 50

t. $x^2-3,600=0$
$(x+60)(x-60)=0$
$x+60=0$ o $x-60=0$
$x=0-60$ $x=0+60$
$x=-60$ $x=60$
R: $x=-60$ o 60

Sección 3, clase 19

g. $x^2+5x-36=0$
$(x-4)(x+9)=0$
$x-4=0$ o $x+9=0$
$x=0+4$ $x=0-9$
$x=4$ $x=-9$
R: $x=4$ o -9

h. $x^2+12x+27=0$
$(x+3)(x+9)=0$
$x+3=0$ o $x+9=0$
$x=0-3$ $x=0-9$
$x=-3$ $x=-9$
R: $x=-3$ o -9

i. $x^2+2x-48=0$
$(x-6)(x+8)=0$
$x-6=0$ o $x+8=0$
$x=0+6$ $x=0-8$
$x=6$ $x=-8$
R: $x=6$ o -8

j. $x^2-15x+56=0$
$(x-7)(x-8)=0$
$x-7=0$ o $x-8=0$
$x=0+7$ $x=0+8$
$x=7$ $x=8$
R: $x=7$ o 8

k. $x^2+12x+32=0$
$(x+4)(x+8)=0$
$x+4=0$ o $x+8=0$
$x=0-4$ $x=0-8$
$x=-4$ $x=-8$
R: $x=-4$ o -8

l. $x^2-9x+14=0$
$(x-2)(x-7)=0$
$x+2=0$ o $x-7=0$
$x=0+2$ $x=0+7$
$x=2$ $x=7$
R: $x=2$ o 7

m. $x^2-4x-21=0$
$(x+3)(x-7)=0$
$x+3=0$ o $x-7=0$
$x=0-3$ $x=0+7$
$x=-3$ $x=7$
R: $x=-3$ o 7

n. $x^2+11x+24=0$
$(x+3)(x+8)=0$
$x+3=0$ o $x+8=0$
$x=0-3$ $x=0-8$
$x=-3$ $x=-8$
R: $x=-3$ o -8

o. $x^2+3x-54=0$
$(x-6)(x+9)=0$
$x-6=0$ o $x+9=0$
$x=0+6$ $x=0-9$
$x=6$ $x=-9$
R: $x=6$ o -9

p. $x^2-13x+42=0$
$(x-6)(x-7)=0$
$x-6=0$ o $x-7=0$
$x=0+6$ $x=0+7$
$x=6$ $x=7$
R: $x=6$ o 7

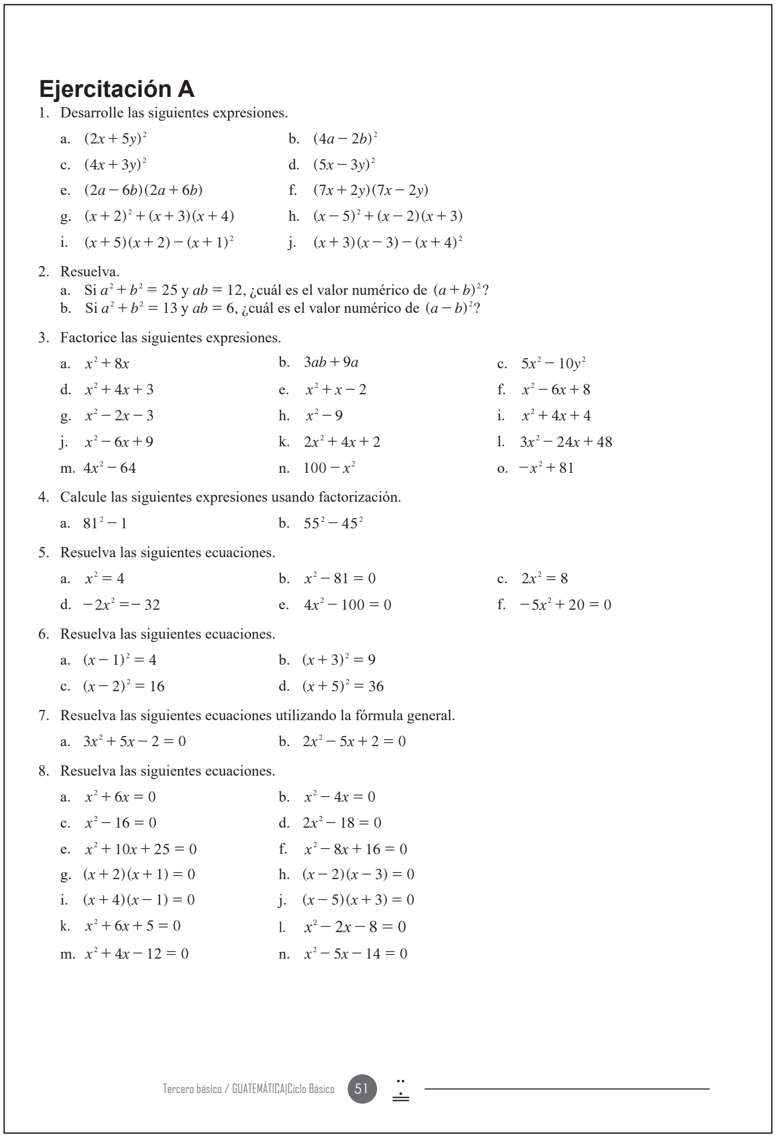
q. $x^2+6x-16=0$
$(x-2)(x+8)=0$
$x-2=0$ o $x+8=0$
$x=0+2$ $x=0-8$
$x=2$ $x=-8$
R: $x=2$ o -8

r. $x^2-6x-27=0$
$(x+3)(x-9)=0$
$x+3=0$ o $x-9=0$
$x=0-3$ $x=0+9$
$x=-3$ $x=9$
R: $x=-3$ o 9

s. $x^2-5x-36=0$
$(x+4)(x-9)=0$
$x+4=0$ o $x-9=0$
$x=0-4$ $x=0+9$
$x=-4$ $x=9$
R: $x=-4$ o 9

t. $x^2-10x+24=0$
$(x-4)(x-6)=0$
$x-4=0$ o $x-6=0$
$x=0+4$ $x=0+6$
$x=4$ $x=6$
R: $x=4$ o 6

Ejercitación A



Ejercitación A

1. Desarrolle las siguientes expresiones.
   - a. $(2x+5y)^2$
   - b. $(4a-2b)^2$
   - c. $(4x+3y)^2$
   - d. $(5x-3y)^2$
   - e. $(2a-6b)(2a+6b)$
   - f. $(7x+2y)(7x-2y)$
   - g. $(x+2)^2+(x+3)(x+4)$
   - h. $(x-5)^2+(x-2)(x+3)$
   - i. $(x+5)(x+2)-(x+1)^2$
   - j. $(x+3)(x-3)-(x+4)^2$
2. Resuelva.
   - a. Si $a^2+b^2=25$ y $ab=12$, ¿cuál es el valor numérico de $(a+b)^2$?
   - b. Si $a^2+b^2=13$ y $ab=6$, ¿cuál es el valor numérico de $(a-b)^2$?
3. Factorice las siguientes expresiones.
   - a. x^2+8x
   - b. $3ab+9a$
   - c. $5x^2-10y^2$
   - d. x^2+4x+3
   - e. x^2+x-2
   - f. x^2-6x+8
   - g. x^2-2x-3
   - h. x^2-9
   - i. x^2+4x+4
   - j. x^2-6x+9
   - k. $2x^2+4x+2$
   - l. $3x^2-24x+48$
   - m. $4x^2-64$
   - n. $100-x^2$
   - o. $-x^2+81$
4. Calcule las siguientes expresiones usando factorización.
   - a. 81^2-1
   - b. 55^2-45^2
5. Resuelva las siguientes ecuaciones.
   - a. $x^2=4$
   - b. $x^2-81=0$
   - c. $2x^2=8$
   - d. $-2x^2=-32$
   - e. $4x^2-100=0$
   - f. $-5x^2+20=0$
6. Resuelva las siguientes ecuaciones.
   - a. $(x-1)^2=4$
   - b. $(x+3)^2=9$
   - c. $(x-2)^2=16$
   - d. $(x+5)^2=36$
7. Resuelva las siguientes ecuaciones utilizando la fórmula general.
   - a. $3x^2+5x-2=0$
   - b. $2x^2-5x+2=0$
8. Resuelva las siguientes ecuaciones.
   - a. $x^2+6x=0$
   - b. $x^2-4x=0$
   - c. $x^2-16=0$
   - d. $2x^2-18=0$
   - e. $x^2+10x+25=0$
   - f. $x^2-8x+16=0$
   - g. $(x+2)(x+1)=0$
   - h. $(x-2)(x-3)=0$
   - i. $(x+4)(x-1)=0$
   - j. $(x-5)(x+3)=0$
   - k. $x^2+6x+5=0$
   - l. $x^2-2x-8=0$
   - m. $x^2+4x-12=0$
   - n. $x^2-5x-14=0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 51

Solucionario:

1\. a. $(2x+5y)^2=(2x)^2+2\times 2x\times 5y+(5y)^2$

$=2^2\times x^2+20xy+5^2\times y^2$

$=4x^2+20xy+25y^2$

b. $(4a-2b)^2=(4a)^2-2\times 4a\times 2b+(2b)^2$

$=4^2\times a^2-16ab+2^2\times b^2$

$=16a^2-16ab+4b^2$

c. $(4x+3y)^2=(4x)^2+2\times 4x\times 3y+(3y)^2$

$=4^2\times x^2+24xy+3^2\times y^2$

$=16x^2+24xy+9y^2$

d. $(5x-3y)^2=(5x)^2-2\times 5x\times 3y+(3y)^2$

$=5^2\times x^2-30xy+3^2\times y^2$

$=25x^2-30xy+9y^2$

e. $(2a-6b)(2a+6b)=(2a)^2-(6b)^2$

$=2^2\times a^2-6^2\times b^2$

$=4a^2-36b^2$

f. $(7x+2y)(7x-2y)=(7x)^2-(2y)^2$

$=7^2\times x^2-2^2\times y^2$

$=49x^2-4y^2$

g. $(x+2)^2+(x+3)(x+4)$

$=x^2+2\times 2\times x+2^2+x^2+(3+4)x+3\times 4$

$=x^2+4x+4+x^2+7x+12$

$=2x^2+11x+16$

h. $(x-5)^2+(x-2)(x+3)$

$=x^2-2\times 5\times x+5^2+x^2+(-2+3)x+(-2)\times 3$

$=x^2-10x+25+x^2+x-6$

$=2x^2-9x+19$

i. $(x+5)(x+2)-(x+1)^2$

$=x^2+(5+2)x+5\times 2-(x^2+2\times 1\times x+1^2)$

$=x^2+7x+10-(x^2+2x+1)$

$=x^2+7x+10-x^2-2x-1$

$=5x+9$

j. $(x+3)(x-3)-(x+4)^2$

$=x^2-3^2-(x^2+2\times 4\times x+4^2)$

$=x^2-9-(x^2+8x+16)$

$=x^2-9-x^2-8x-16$

$=-8x-25$

2\. a. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$=(a^2+b^2)+2ab$

$=25+2\times 12$

$=49$

b. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

$=(a^2+b^2)-2ab$

$=13-2\times 6$

$=1$

3\. a. $x^2+8x=x\times x+8\times x$

$=x(x+8)$

b. $3ab+9a=3\times a\times b+3\times 3\times a$

$=3a(b+3)$

c. $5x^2-10y^2=5\times x\times x-2\times 5\times y\times y$

$=5(x^2-2y^2)$

d. $x^2+4x+3=(x+1)(x+3)$

e. $x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

f. $x^2-6x+8=(x-2)(x-4)$

g. $x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$

h. $x^2-9=x^2-3^2$

$=(x+3)(x-3)$

i. $$\begin{aligned} x^2+4x+4 &= x^2+2\times 2\times x+2^2 \\ &= (x+2)^2 \end{aligned}$$

j. $$\begin{aligned} x^2-6x+9 &= x^2-2\times 3\times x+3^2 \\ &= (x-3)^2 \end{aligned}$$

k. $$\begin{aligned} 2x^2+4x+2 &= 2\times x^2+2\times 2\times x+2\times 1 \\ &= 2(x^2+2x+1) \\ &= 2(x+1)^2 \end{aligned}$$

l. $$\begin{aligned} 3x^2-24x+48 &= 3\times x^2-3\times 8\times x+3\times 16 \\ &= 3(x^2-8x+16) \\ &= 3(x-4)^2 \end{aligned}$$

m. $$\begin{aligned} 4x^2-64 &= 4(x^2-16) \\ &= 4(x^2-4^2) \\ &= 4(x+4)(x-4) \end{aligned}$$

n. $100-x^2=10^2-x^2=(10+x)(10-x)$

o. $$\begin{aligned} -x^2+81 &= -(x^2-81) \\ &= -(x^2-9^2) \\ &= -(x+9)(x-9) \end{aligned}$$

4. a. $$\begin{aligned} 81^2-1 &= 81^2-1^2 \\ &= (81+1)(81-1) \\ &= 82\times 80 \\ &= 6,560 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} 55^2-45^2 &= (55+45)(55-45) \\ &= 100\times 10 \\ &= 1,000 \end{aligned}$$

5. a. $$\begin{aligned} x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned} x^2-81 &= 0 \\ x^2 &= 0+81 \\ x^2 &= 81 \\ x &= \pm\sqrt{81} \\ x &= \pm 9 \end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned} 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned} -2x^2 &= -32 \\ x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned} 4x^2-100 &= 0 \\ 4x^2 &= 100 \\ x^2 &= 25 \\ x &= \pm\sqrt{25} \\ x &= \pm 5 \end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned} -5x^2+20 &= 0 \\ -5x^2 &= -20 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

6. a. $(x-1)^2=4$

Se sustituye $x-1$ por Y.

$$\begin{aligned} Y^2 &= 4 \\ Y &= \pm\sqrt{4} \\ Y &= \pm 2 \end{aligned}$$

Se sustituye Y por $x-1$.

$$\begin{array}{lcl} x-1=2 & \text{o} & x-1=-2 \\ x=2+1 & & x=-2+1 \\ x=3 & & x=-1 \end{array}$$

R: $x=3$ o -1

b. $(x+3)^2=9$

Se sustituye $x+3$ por Y.

$$\begin{aligned} Y^2 &= 9 \\ Y &= \pm\sqrt{9} \\ Y &= \pm 3 \end{aligned}$$

Se sustituye Y por $x+3$.

$$\begin{array}{lcl} x+3=3 & \text{o} & x+3=-3 \\ x=3-3 & & x=-3-3 \\ x=0 & & x=-6 \end{array}$$

R: $x=0$ o -6

c. $(x-2)^2=16$

Se sustituye $x-2$ por Y.

$$\begin{aligned} Y^2 &= 16 \\ Y &= \pm\sqrt{16} \\ Y &= \pm 4 \end{aligned}$$

Se sustituye Y por $x-2$.

$$\begin{array}{lcl} x-2=4 & \text{o} & x-2=-4 \\ x=4+2 & & x=-4+2 \\ x=6 & & x=-2 \end{array}$$

R: $x=6$ o -2

d. $(x+5)^2=36$

Se sustituye $x+5$ por Y.

$$\begin{aligned} Y^2 &= 36 \\ Y &= \pm\sqrt{36} \\ Y &= \pm 6 \end{aligned}$$

Se sustituye Y por $x+5$.

$$\begin{array}{lcl} x+5=6 & \text{o} & x+5=-6 \\ x=6-5 & & x=-6-5 \\ x=1 & & x=-11 \end{array}$$

R: $x=1$ o -11

7. a. $3x^2+5x-2=0$

Se sustituye a por 3, b por 5 y c por -2 en $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times 3\times(-2)}}{2\times 3} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{25+24}}{6} \\ &= \frac{-5\pm\sqrt{49}}{6} \\ &= \frac{-5\pm 7}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} x=\dfrac{-5+7}{6} & \text{o} & x=\dfrac{-5-7}{6} \\ \quad=\dfrac{2}{6} & & \quad=\dfrac{-12}{6} \\ \quad=\dfrac{1}{3} & & \quad=-2 \end{array}$$

R: $x=\frac{1}{3}$ o -2

b. $2x^2-5x+2=0$

Se sustituye a por 2, b por -5 y c por 2 en $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4\times 2\times 2}}{2\times 2} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4} \\ &= \frac{5\pm\sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{5\pm 3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lcl} x=\dfrac{5+3}{4} & \text{o} & x=\dfrac{5-3}{4} \\ \quad=\dfrac{8}{4} & & \quad=\dfrac{2}{4} \\ \quad=2 & & \quad=\dfrac{1}{2} \end{array}$$

R: $x=2$ o $\frac{1}{2}$

8. a. $x^2+6x=0$
$x(x+6)=0$
$x=0$ o $x+6=0$
$x=0-6$
$x=-6$
R: $x=0$ o -6

b. $x^2-4x=0$
$x(x-4)=0$
$x=0$ o $x-4=0$
$x=0+4$
$x=4$
R: $x=0$ o 4

c. $x^2-16=0$
$(x+4)(x-4)=0$
$x+4=0$ o $x-4=0$
$x=0-4$ $\quad$ $x=0+4$
$x=-4$ $\quad$ $x=4$
R: $x=-4$ o 4

d. $2x^2-18=0$
$2(x^2-9)=0$
$2(x+3)(x-3)=0$
$x+3=0$ o $x-3=0$
$x=0-3$ $\quad$ $x=0+3$
$x=-3$ $\quad$ $x=3$
R: $x=-3$ o 3

e. $x^2+10x+25=0$
$(x+5)^2=0$
$x+5=0$
$x=0-5$
$x=-5$
R: $x=-5$

f. $x^2-8x+16=0$
$(x-4)^2=0$
$x-4=0$
$x=0+4$
$x=4$
R: $x=4$

g. $(x+2)(x+1)=0$
$x+2=0$ o $x+1=0$
$x=0-2$ $\quad$ $x=0-1$
$x=-2$ $\quad$ $x=-1$
R: $x=-2$ o -1

h. $(x-2)(x-3)=0$
$x-2=0$ o $x-3=0$
$x=0+2$ $\quad$ $x=0+3$
$x=2$ $\quad$ $x=3$
R: $x=2$ o 3

i. $(x+4)(x-1)=0$
$x+4=0$ o $x-1=0$
$x=0-4$ $\quad$ $x=0+1$
$x=-4$ $\quad$ $x=1$
R: $x=-4$ o 1

j. $(x-5)(x+3)=0$
$x-5=0$ o $x+3=0$
$x=0+5$ $\quad$ $x=0-3$
$x=5$ $\quad$ $x=-3$
R: $x=5$ o -3

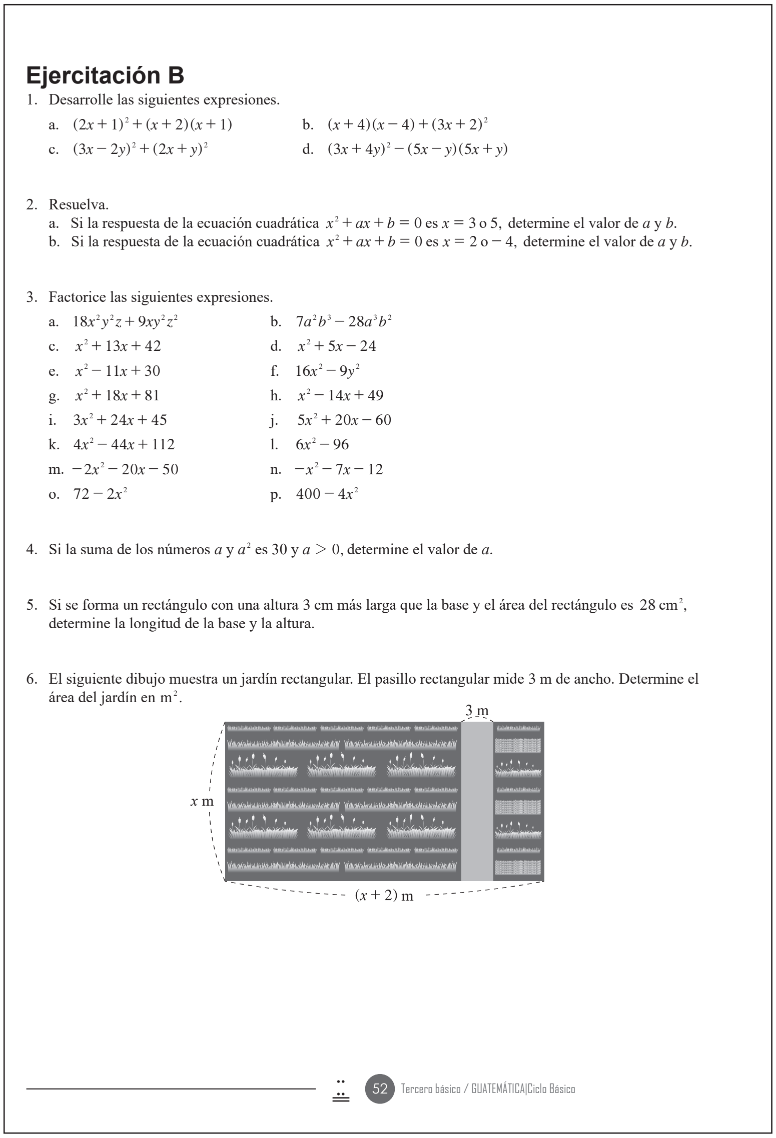
k. $x^2+6x+5=0$
$(x+5)(x+1)=0$
$x+5=0$ o $x+1=0$
$x=0-5$ $\quad$ $x=0-1$
$x=-5$ $\quad$ $x=-1$
R: $x=-5$ o -1

l. $x^2-2x-8=0$
$(x-4)(x+2)=0$
$x-4=0$ o $x+2=0$
$x=0+4$ $\quad$ $x=0-2$
$x=4$ $\quad$ $x=-2$
R: $x=4$ o -2

m. $x^2+4x-12=0$
$(x+6)(x-2)=0$
$x+6=0$ o $x-2=0$
$x=0-6$ $\quad$ $x=0+2$
$x=-6$ $\quad$ $x=2$
R: $x=-6$ o 2

n. $x^2-5x-14=0$
$(x-7)(x+2)=0$
$x-7=0$ o $x+2=0$
$x=0+7$ $\quad$ $x=0-2$
$x=7$ $\quad$ $x=-2$
R: $x=7$ o -2

Ejercitación B



Ejercitación B

1. Desarrolle las siguientes expresiones.
   - a. $(2x+1)^2+(x+2)(x+1)$
   - b. $(x+4)(x-4)+(3x+2)^2$
   - c. $(3x-2y)^2+(2x+y)^2$
   - d. $(3x+4y)^2-(5x-y)(5x+y)$

2. Resuelva.
   - a. Si la respuesta de la ecuación cuadrática $x^2+ax+b=0$ es $x=3$ o 5, determine el valor de a y b.
   - b. Si la respuesta de la ecuación cuadrática $x^2+ax+b=0$ es $x=2$ o -4, determine el valor de a y b.

3. Factorice las siguientes expresiones.
   - a. $18x^2y^2z+9xy^2z^2$
   - b. $7a^2b^3-28a^3b^2$
   - c. $x^2+13x+42$
   - d. $x^2+5x-24$
   - e. $x^2-11x+30$
   - f. $16x^2-9y^2$
   - g. $x^2+18x+81$
   - h. $x^2-14x+49$
   - i. $3x^2+24x+45$
   - j. $5x^2+20x-60$
   - k. $4x^2-44x+112$
   - l. $6x^2-96$
   - m. $-2x^2-20x-50$
   - n. $-x^2-7x-12$
   - o. $72-2x^2$
   - p. $400-4x^2$

4. Si la suma de los números a y a^2 es 30 y $a>0$, determine el valor de a.

5. Si se forma un rectángulo con una altura 3 cm más larga que la base y el área del rectángulo es 28 cm^2, determine la longitud de la base y la altura.

6. El siguiente dibujo muestra un jardín rectangular. El pasillo rectangular mide 3 m de ancho. Determine el área del jardín en m^2.

52 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario:

1\. a.

$$\begin{aligned}
&(2x+1)^2+(x+2)(x+1)\\
&=(2x)^2+2\times 2x\times 1+1^2+x^2+(2+1)x+2\times 1\\
&=4x^2+4x+1+x^2+3x+2\\
&=5x^2+7x+3
\end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned}
&(x+4)(x-4)+(3x+2)^2\\
&=x^2-4^2+(3x)^2+2\times 3x\times 2+2^2\\
&=x^2-16+9x^2+12x+4\\
&=10x^2+12x-12
\end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned}
&(3x-2y)^2+(2x+y)^2\\
&=(3x)^2-2\times 3x\times 2y+(2y)^2+(2x)^2+2\times 2x\times y+y^2\\
&=9x^2-12xy+4y^2+4x^2+4xy+y^2\\
&=13x^2-8xy+5y^2
\end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned}
&(3x+4y)^2-(5x-y)(5x+y)\\
&=(3x)^2+2\times 3x\times 4y+(4y)^2-[(5x)^2-y^2]\\
&=9x^2+24xy+16y^2-(25x^2-y^2)\\
&=9x^2+24xy+16y^2-25x^2+y^2\\
&=-16x^2+24xy+17y^2
\end{aligned}$$

2\. a. Se sustituye x por 3 en $x^2+ax+b=0$.

$$9+3a+b=0$$
$$3a+b=-9 \quad ①$$

Se sustituye x por 5 en $x^2+ax+b=0$.

$$25+5a+b=0$$
$$5a+b=-25 \quad ②$$

$$\begin{cases}3a+b=-9 & ①\\ 5a+b=-25 & ②\end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 3a+b & = & -9 \quad ①\\
(-) & 5a+b & = & -25 \quad ②\\
\hline
 & -2a & = & 16\\
 & a & = & -8
\end{array}$$

Se sustituye a por -8 en la ecuación ①.

$$3\times(-8)+b=-9$$
$$-24+b=-9$$
$$b=15$$

R: $a=-8$ y $b=15$

b. Se sustituye x por 2 en $x^2+ax+b=0$.

$$4+2a+b=0$$
$$2a+b=-4 \quad ①$$

Se sustituye x por -4 en $x^2+ax+b=0$.

$$16-4a+b=0$$
$$-4a+b=-16 \quad ②$$

$$\begin{cases}2a+b=-4 & ①\\ -4a+b=-16 & ②\end{cases}$$

$$\begin{array}{rrcl}
 & 2a+b & = & -4 \quad ①\\
(-) & -4a+b & = & -16 \quad ②\\
\hline
 & 6a & = & 12\\
 & a & = & 2
\end{array}$$

Se sustituye a por 2 en la ecuación ①.

$$2\times 2+b=-4$$
$$4+b=-4$$
$$b=-8$$

R: $a=2$ y $b=-8$

3. a. $18x^2y^2z+9xy^2z^2$

$=9\times 2\times x\times x\times y\times y\times z+9\times x\times y\times y\times z\times z$

$=9xy^2z(2x+z)$

b. $7a^2b^3-28a^3b^2$

$=7\times a\times a\times b\times b\times b-7\times 4\times a\times a\times a\times b\times b$

$=7a^2b^2(b-4a)$

c. $x^2+13x+42=(x+6)(x+7)$

d. $x^2+5x-24=(x-3)(x+8)$

e. $x^2-11x+30=(x-5)(x-6)$

f. $16x^2-9y^2=(4x)^2-(3y)^2$

$=(4x+3y)(4x-3y)$

g. $x^2+18x+81=x^2+2\times 9\times x+9^2$

$=(x+9)^2$

h. $x^2-14x+49=x^2-2\times 7\times x+7^2$

$=(x-7)^2$

i. $3x^2+24x+45=3\times x^2+3\times 8\times x+3\times 15$

$=3(x^2+8x+15)$

$=3(x+3)(x+5)$

j. $5x^2+20x-60=5\times x^2+5\times 4\times x-5\times 12$

$=5(x^2+4x-12)$

$=5(x-2)(x+6)$

k. $4x^2-44x+112=4\times x^2-4\times 11\times x+4\times 28$

$=4(x^2-11x+28)$

$=4(x-4)(x-7)$

l. $6x^2-96=6(x^2-16)$

$=6(x+4)(x-4)$

m. $-2x^2-20x-50=-2\times x^2-2\times 10\times x-2\times 25$

$=-2(x^2+10x+25)$

$=-2(x+5)^2$

n. $-x^2-7x-12=-1\times x^2-1\times 7\times x-1\times 12$

$=-(x^2+7x+12)$

$=-(x+3)(x+4)$

o. $72-2x^2=2(36-x^2)$

$=2(6+x)(6-x)$

p. $400-4x^2=4(100-x^2)$

$=4(10+x)(10-x)$

4. $a+a^2=30$

$a^2+a-30=0$

$(a-5)(a+6)=0$

$a-5=0$ o $a+6=0$

$a=0+5$ $a=0-6$

$a=5$ $a=-6$

Siendo $a>0$, $a=5$

R: $a=5$

5. Siendo x cm la base, la altura se puede expresar como $x+3$ cm. Dado que el área es 28 cm^2, se pueden expresar estas relaciones como: $x(x+3)=28$

$x^2+3x=28$

$x^2+3x-28=0$

$(x-4)(x+7)=0$

$x-4=0$ o $x+7=0$

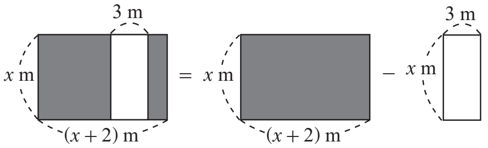
$x=0+4$ $x=0-7$

$x=4$ $x=-7$

Siendo $x>0$, $x=4$

R: La base es 4 cm y la altura es 7 cm.

6.



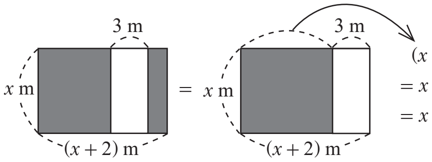
$A=(x+2)\times x-3\times x$

$=x^2+2x-3x$

$=x^2-x$

R: El área del jardín es x^2-x m².

(*Solución alternativa*)



$(x+2)-3$

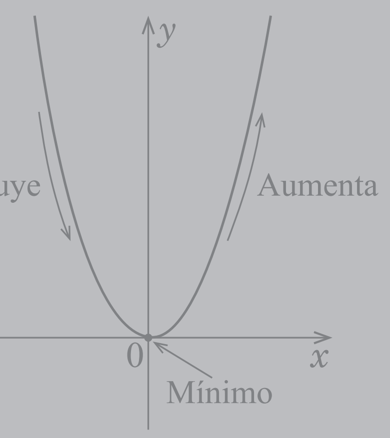
$=x+2-3$

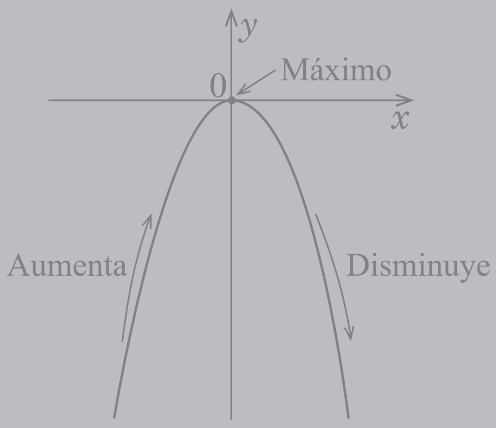
$=x-1\,(\text{m})$

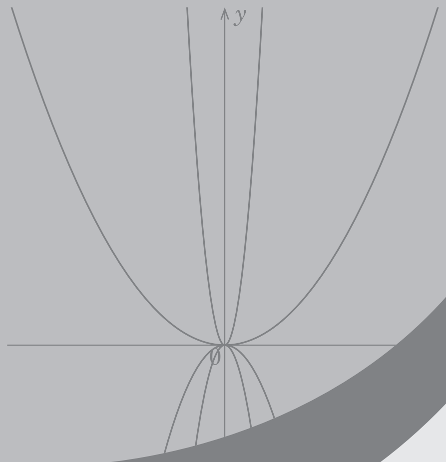
$A=(x-1)\times x$

$=x(x-1)$

R: El área del jardín es $x(x-1)$ m².







Unidad 2 ••

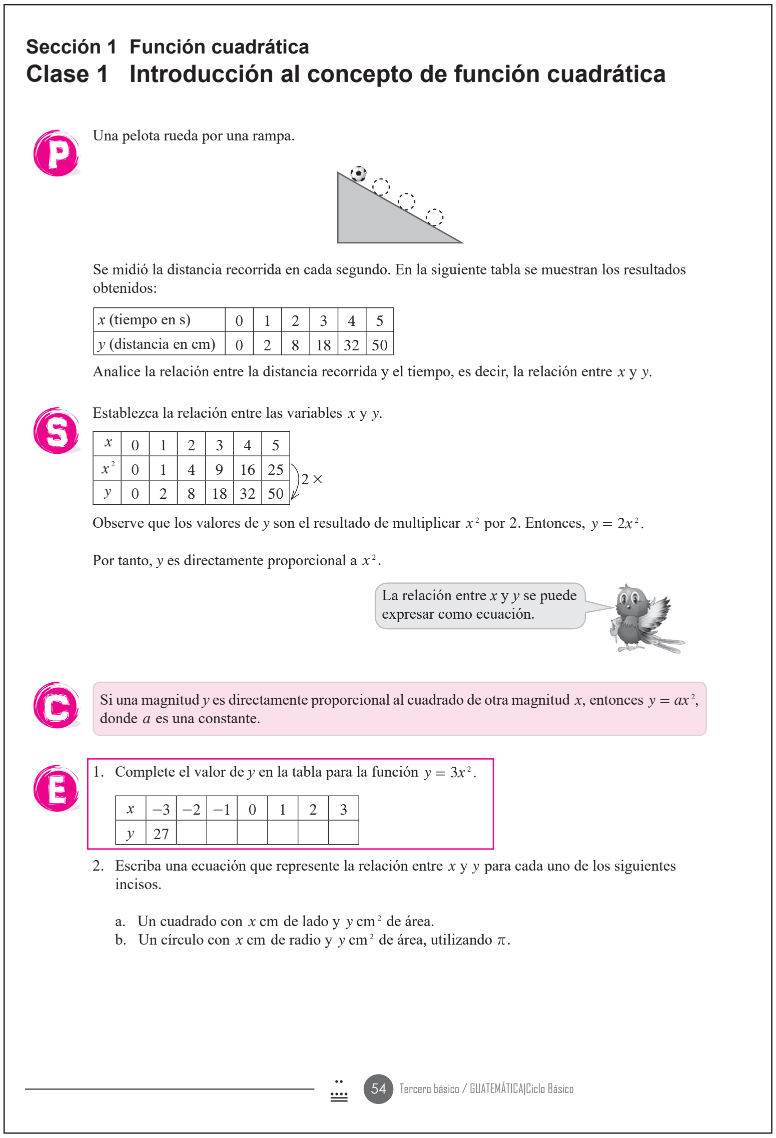
Función

Plan de estudio - Unidad 2 Función -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
2. Construye modelos matemáticos para el análisis y representación de las relaciones.	2.3 Utiliza funciones para representar y resolver problemas.	1. Función cuadrática	1.1 Introducción al concepto de función cuadrática	Completa la tabla de una función cuadrática. Representa la ecuación de una función cuadrática.
			1.2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$	Encuentra las características de una función cuadrática $y = ax^2$, donde $a = 1$.
			1.3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$	Grafica una función $y = ax^2$, donde $a > 1$.
			1.4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$	Grafica una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$.
			1.5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a =- 1$	Grafica una función $y = ax^2$, donde $a =- 1$.
			1.6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a <- 1$	Identifica la gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a <- 1$.
			1.7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$	Grafica una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$.
			1.8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$	Identifica la gráfica de una función cuadrática.
			1.9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$	Identifica el comportamiento de la gráfica $y = ax^2$.
			1.10 Rango de una función $y = ax^2$	Encuentra el rango de una función $y = ax^2$.
			1.11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$	Encuentra la razón de cambio de una función $y = ax^2$.
			1.12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$	Grafica una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$.
			1.13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$	Grafica una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$.
		2. Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa	2.1 Función inyectiva	Determina si una función es inyectiva.
			2.2 Función sobreyectiva	Determina si una función es sobreyectiva.
			2.3 Función biyectiva	Determina si una función es biyectiva.
			2.4 Función inversa	Determina si una función es inversa de otra.

Sección 1 Función cuadrática
Clase 1 Introducción al concepto de función cuadrática

Aprendizaje esperado:
Completa la tabla de una función cuadrática.
Representa la ecuación de una función cuadrática.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 1 Introducción al concepto de función cuadrática

P Una pelota rueda por una rampa.

Se midió la distancia recorrida en cada segundo. En la siguiente tabla se muestran los resultados obtenidos:

x (tiempo en s)	0	1	2	3	4	5
y (distancia en cm)	0	2	8	18	32	50

Analice la relación entre la distancia recorrida y el tiempo, es decir, la relación entre x y y.

S Establezca la relación entre las variables x y y.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	2	8	18	32	50

2 ×

Observe que los valores de y son el resultado de multiplicar x^2 por 2. Entonces, $y = 2x^2$.

Por tanto, y es directamente proporcional a x^2.

La relación entre x y y se puede expresar como ecuación.

C Si una magnitud y es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud x, entonces $y = ax^2$, donde a es una constante.

E 1. Complete el valor de y en la tabla para la función $y = 3x^2$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27						

2. Escriba una ecuación que represente la relación entre x y y para cada uno de los siguientes incisos.
   a. Un cuadrado con x cm de lado y y cm^2 de área.
   b. Un círculo con x cm de radio y y cm^2 de área, utilizando π.

54 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

2. a. $y = x \times x = x^2$
   R: $y = x^2$

   b. $y = x \times x \times \pi = \pi x^2$
   R: $y = \pi x^2$

Fecha: dd – mm – aa
2-1-1 Introducción al concepto de función cuadrática

Ⓟ Una pelota rueda por una rampa. Se midió la distancia recorrida en cada segundo.

x (tiempo en s)	0	1	2	3	4	5
y (distancia en cm)	0	2	8	18	32	50

Analice la relación entre x (el tiempo) y y (la distancia recorrida).

Ⓢ

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
y	0	2	8	18	32	50

2 ×

$y = 2x^2$

Por tanto, y es directamente proporcional a x^2.

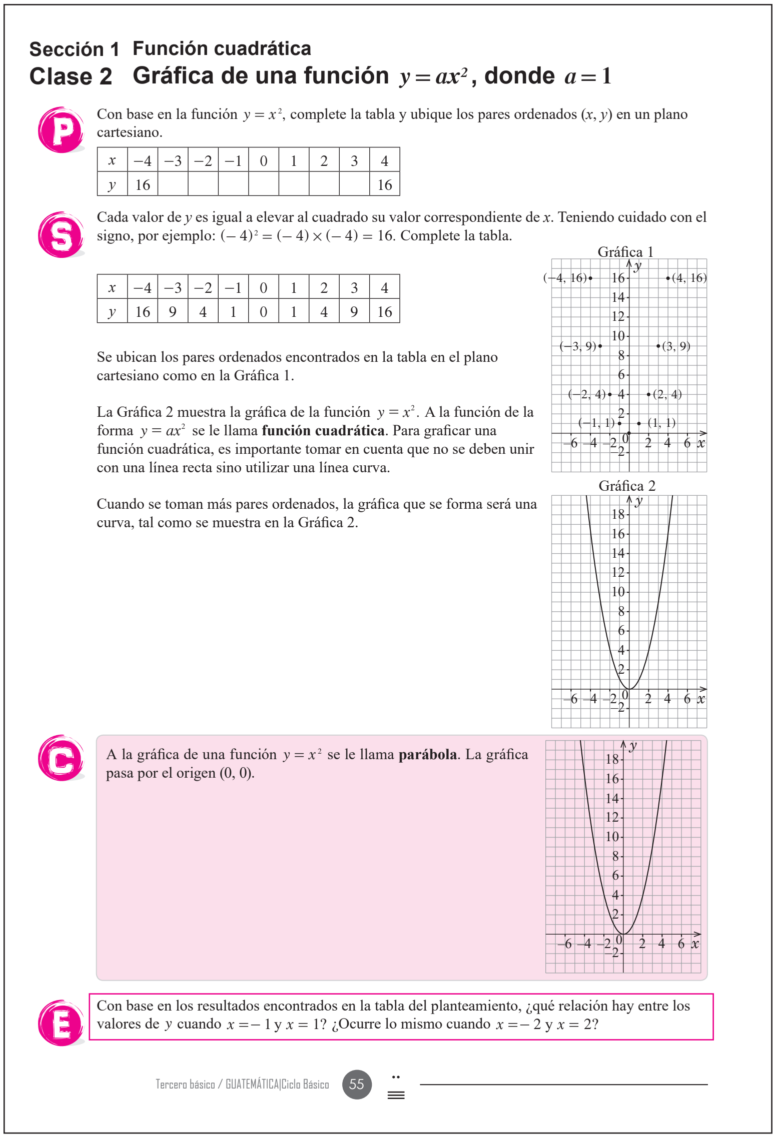
Ⓒ Si una magnitud y es directamente proporcional al cuadrado de otra magnitud x, entonces $y = ax^2$, donde a es una constante.

Ⓔ 1. Complete el valor de y para $y = 3x^2$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

Sección 1 Función cuadrática
Clase 2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$

Aprendizaje esperado:
Encuentra las características de una función cuadrática $y = ax^2$, donde $a = 1$.



Sección 1 **Función cuadrática**
Clase 2 **Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$**

P Con base en la función $y = x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados (x, y) en un plano cartesiano.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16								16

S Cada valor de y es igual a elevar al cuadrado su valor correspondiente de x. Teniendo cuidado con el signo, por ejemplo: $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$. Complete la tabla.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Se ubican los pares ordenados encontrados en la tabla en el plano cartesiano como en la Gráfica 1.

La Gráfica 2 muestra la gráfica de la función $y = x^2$. A la función de la forma $y = ax^2$ se le llama **función cuadrática**. Para graficar una función cuadrática, es importante tomar en cuenta que no se deben unir con una línea recta sino utilizar una línea curva.

Cuando se toman más pares ordenados, la gráfica que se forma será una curva, tal como se muestra en la Gráfica 2.

Gráfica 1

Gráfica 2

C A la gráfica de una función $y = x^2$ se le llama **parábola**. La gráfica pasa por el origen (0, 0).

E Con base en los resultados encontrados en la tabla del planteamiento, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Ocurre lo mismo cuando $x = -2$ y $x = 2$?

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 55

Solucionario del ejercicio:

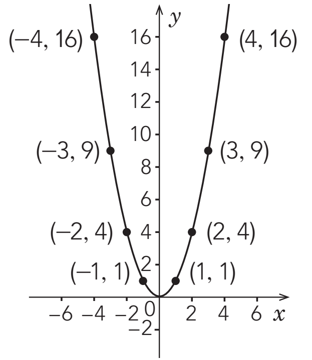
Cuando $x = -1$, el valor de y es 1.
Cuando $x = 1$, el valor de y es 1.
Es decir, los valores de y son iguales.
Los valores de y también son iguales cuando $x = -2$ y $x = 2$.

Fecha: dd – mm – aa
2-1-2 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = 1$

Ⓟ Con base en $y = x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados en un plano cartesiano.

Ⓢ

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16



Para graficar utilice una línea curva.

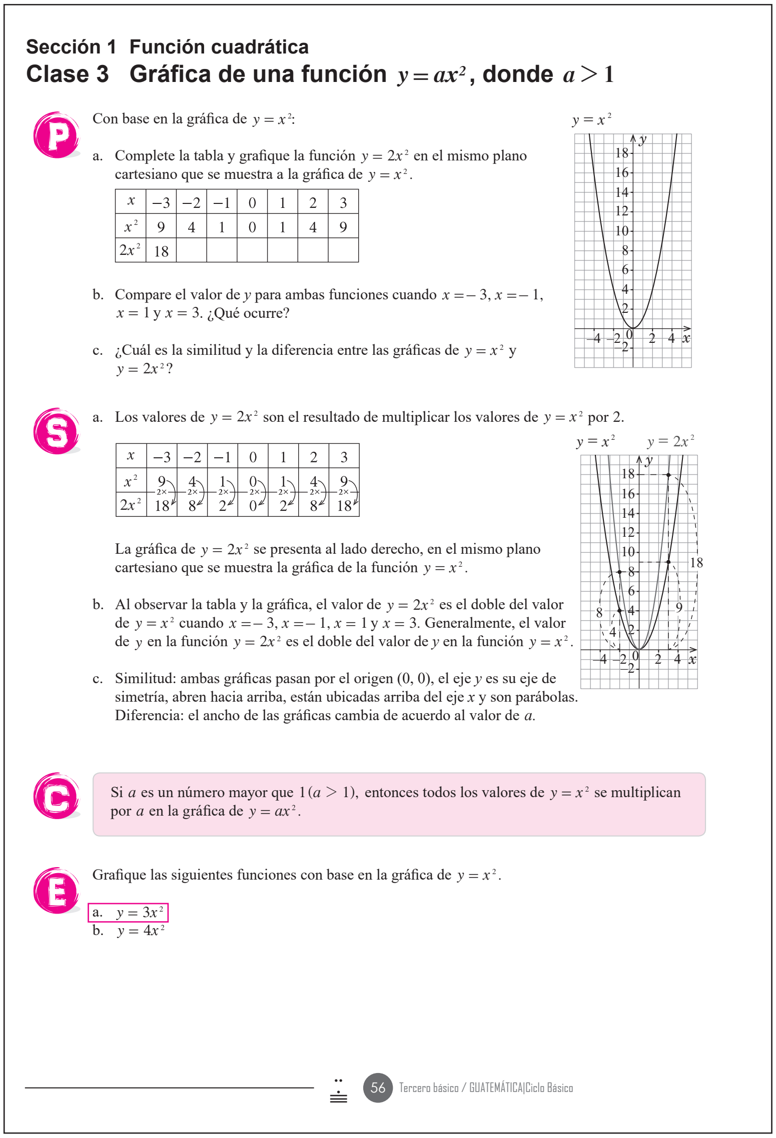
Ⓒ A la gráfica de $y = x^2$ se le llama parábola.
La gráfica pasa por el origen (0, 0).

Ⓔ Con base en la tabla de Ⓟ, ¿qué relación hay entre los valores de y cuando $x = -1$ y $x = 1$? ¿Ocurre lo mismo cuando $x = -2$ y $x = 2$?

R: Cuando $x = -1$, el valor de y es 1. Cuando $x = 1$, el valor de y es 1. Es decir, los valores de y son iguales. Cuando $x = -2$ y $x = 2$, los valores de y también son iguales a $y = 4$.

Sección 1 Función cuadrática
Clase 3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2$, donde $a > 1$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$

P Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = 2x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra a la gráfica de $y = x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18						

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x^2$?

S a. Los valores de $y = 2x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por 2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

La gráfica de $y = 2x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = 2x^2$ es el doble del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de y en la función $y = 2x^2$ es el doble del valor de y en la función $y = x^2$.

c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen (0, 0), el eje y es su eje de simetría, abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas.
Diferencia: el ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a.

C Si a es un número mayor que $1\,(a > 1)$, entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.

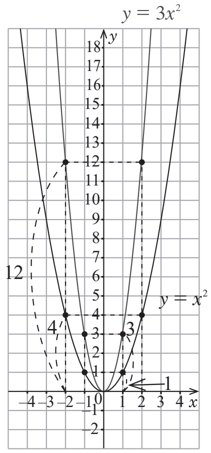
E Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = x^2$.

a. $y = 3x^2$
b. $y = 4x^2$

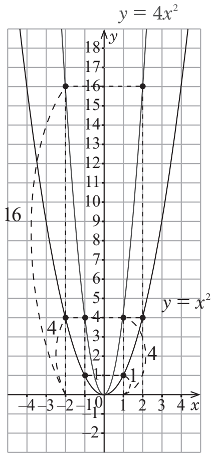
56 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a.



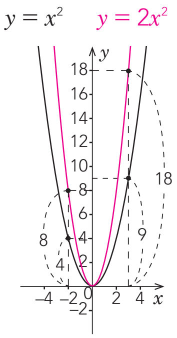
b.



Fecha: dd – mm – aa
2-1-3 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a > 1$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique $y = 2x^2$ en el mismo plano cartesiano.
b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = 2x^2$?



Ⓢ a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$2x^2$	18	8	2	0	2	8	18

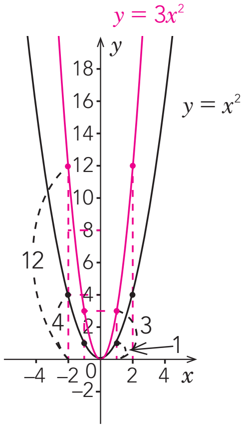
2 ×

b. El valor de $y = 2x^2$ es el doble del valor de $y = x^2$.

c. Similitud:
- Pasan por el origen (0, 0).
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia arriba.
- Están ubicadas arriba del eje x.
- Son parábolas.

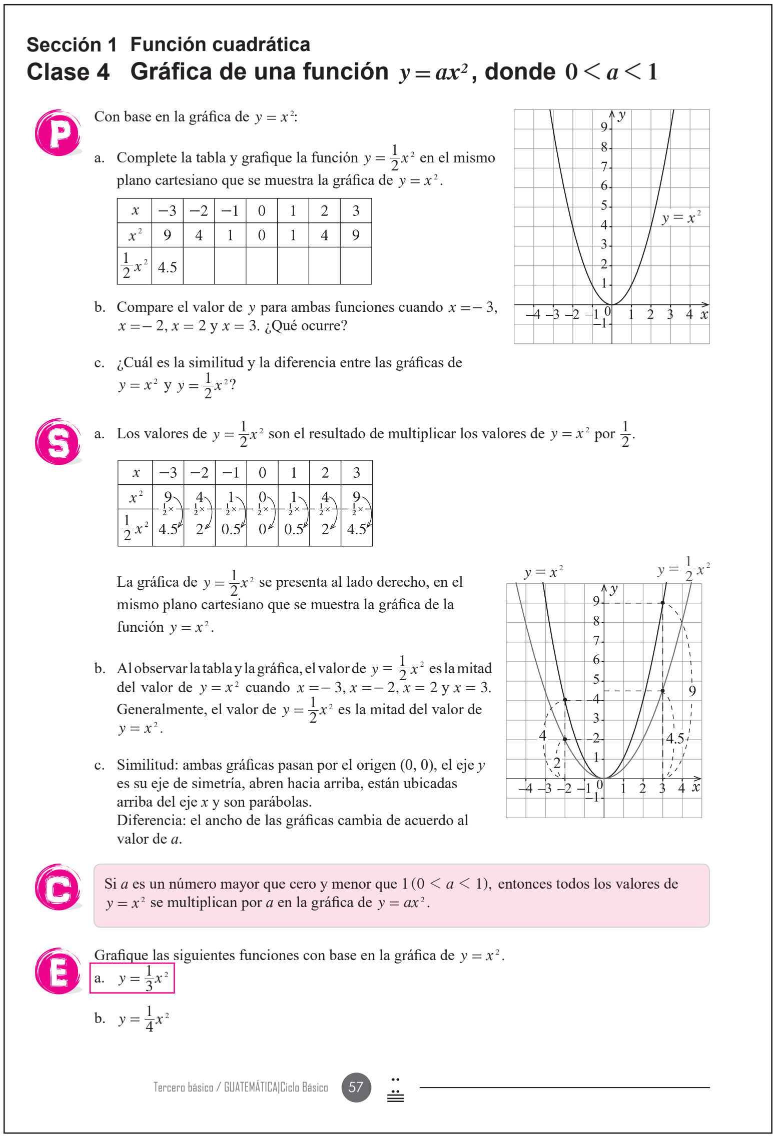
Diferencia:
- El ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a.

Ⓔ Grafique la función con base en la gráfica $y = x^2$.
a. $y = 3x^2$



Sección 1 Función cuadrática
Clase 4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$

P Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = x^2$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5						

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$?

S a. Los valores de $y = \frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por $\frac{1}{2}$.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

La gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$.

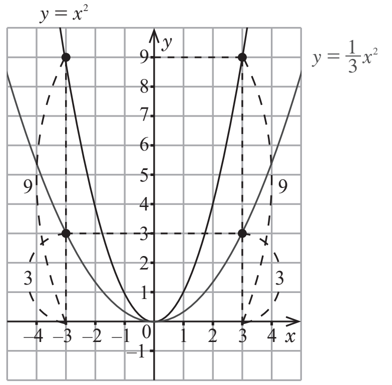
c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen (0, 0), el eje y es su eje de simetría, abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas.
Diferencia: el ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a.

C Si a es un número mayor que cero y menor que 1 $(0 < a < 1)$, entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.

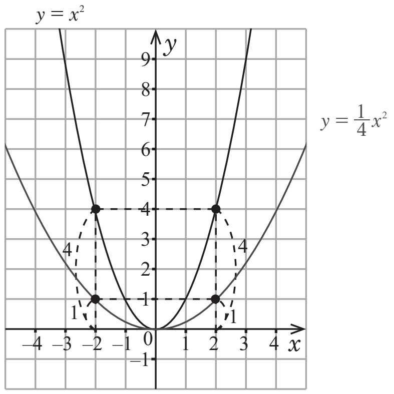
E Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = x^2$.
a. $y = \frac{1}{3}x^2$
b. $y = \frac{1}{4}x^2$

Solucionario del ejercicio:

a.



b.



Fecha: dd – mm – aa
2-1-4 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $0 < a < 1$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:
a. Complete la tabla y grafique $y = \frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano.
b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$.
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = \frac{1}{2}x^2$?

Ⓢ a.

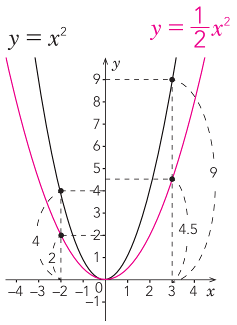
x	–3	–2	–1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$\frac{1}{2}x^2$	4.5	2	0.5	0	0.5	2	4.5

$\frac{1}{2}\times$

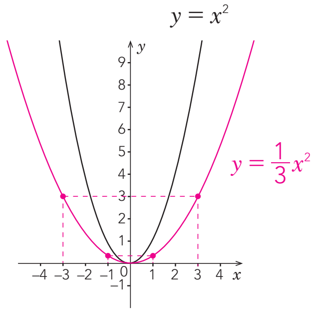
b. El valor de $y = \frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = x^2$.

c. Similitud:
- Pasan por el origen (0, 0).
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia arriba.
- Están ubicadas arriba del eje x.
- Son parábolas.

Diferencia:
- El ancho de las gráficas cambia de acuerdo al valor de a.



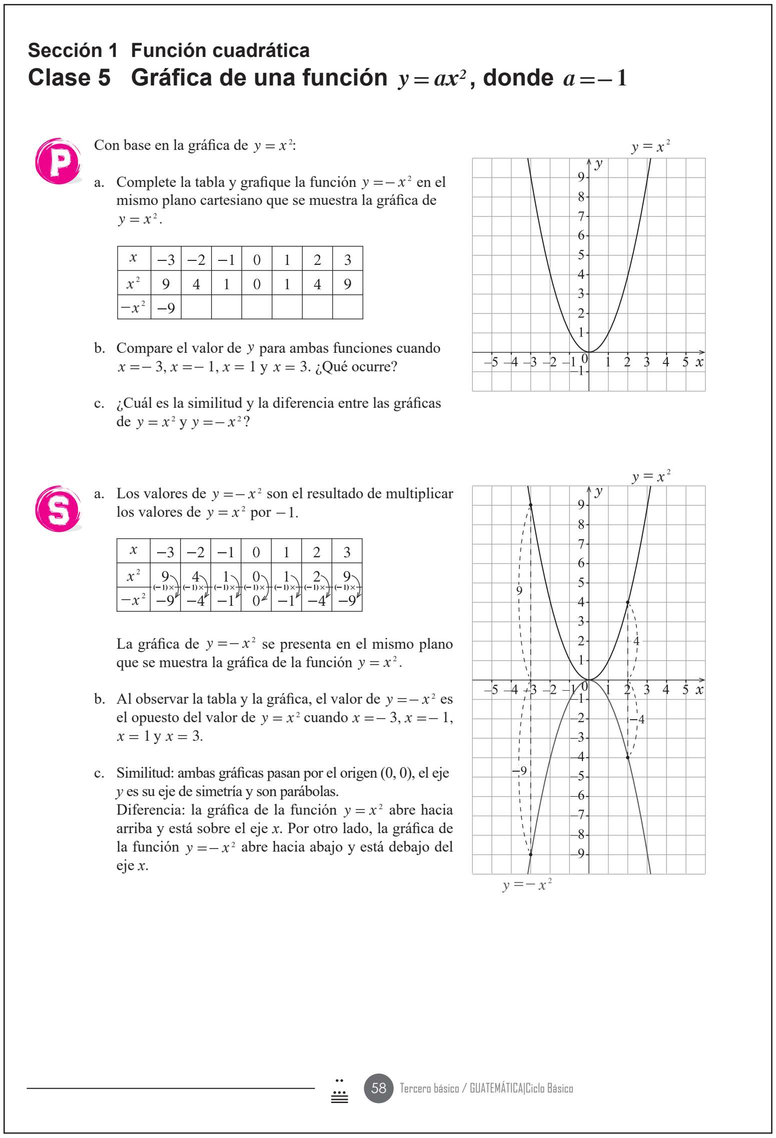
Ⓔ Grafique la función con base en la gráfica $y = x^2$.
a. $y = \frac{1}{3}x^2$



Sección 1 Función cuadrática

Clase 5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = -1$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2$, donde $a = -1$.



Sección 1 Función cuadrática

Clase 5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = -1$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = -x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = x^2$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	−9						

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$?

Ⓢ a. Los valores de $y = -x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = x^2$ por -1.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	2	9
	(−1)×	(−1)×	(−1)×	(−1)×	(−1)×	(−1)×	(−1)×
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

La gráfica de $y = -x^2$ se presenta en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = x^2$.

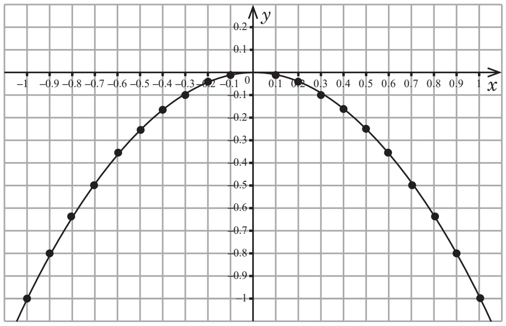
b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -x^2$ es el opuesto del valor de $y = x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen (0, 0), el eje y es su eje de simetría y son parábolas.
Diferencia: la gráfica de la función $y = x^2$ abre hacia arriba y está sobre el eje x. Por otro lado, la gráfica de la función $y = -x^2$ abre hacia abajo y está debajo del eje x.

Solucionario de los ejercicios:

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0
x^2	−1	−0.81	−0.64	−0.49	−0.36	−0.25	−0.16	−0.09	−0.04	−0.01	0

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
x^2	−0.01	−0.04	−0.09	−0.16	−0.25	−0.36	−0.49	−0.64	−0.81	−1



Fecha: dd – mm – aa

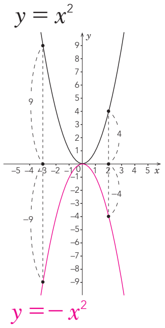
2-1-5 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a = -1$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique $y = -x^2$ en el mismo plano cartesiano.

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = -x^2$?



Ⓢ a.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
x^2	9	4	1	0	1	4	9
$-x^2$	−9	−4	−1	0	−1	−4	−9

(− 1) ×

b. El valor de y en $y = -x^2$ es el opuesto del valor de y en $y = x^2$.

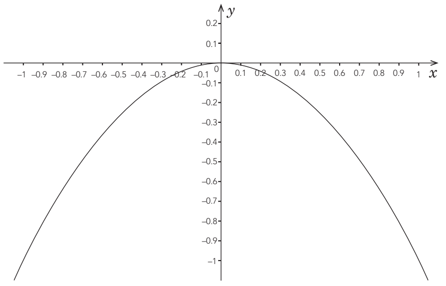
c. Similitud:
- Pasan por el origen (0, 0).
- El eje y es su eje de simetría.
- Son parábolas.

Diferencia:
- La gráfica $y = x^2$ abre hacia arriba y está sobre el eje x. Por otro lado, la gráfica $y = -x^2$ abre hacia abajo y está debajo del eje x.

Ⓔ Para la función $y = -x^2$, complete la tabla y ubique los pares ordenados en el plano. ¿Cómo es la gráfica que se forma?

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0
y	−1	−0.81	−0.64	−0.49	−0.36	−0.25	−0.16	−0.09	−0.04	−0.01	0

0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
−0.01	−0.04	−0.09	−0.16	−0.25	−0.36	−0.49	−0.64	−0.81	−1



C

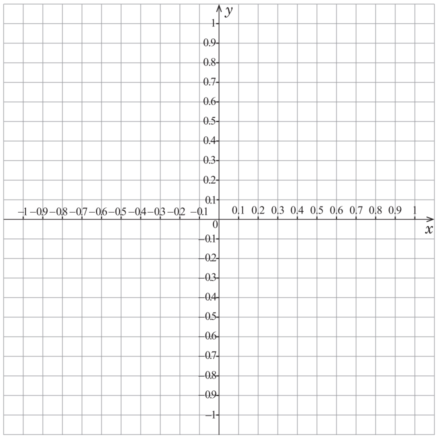
Si a es un número igual a -1 ($a = -1$), entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por -1 en la gráfica de $y = -x^2$.

La función $y = -x^2$ es una reflexión de la función $y = x^2$ respecto al eje x.

E

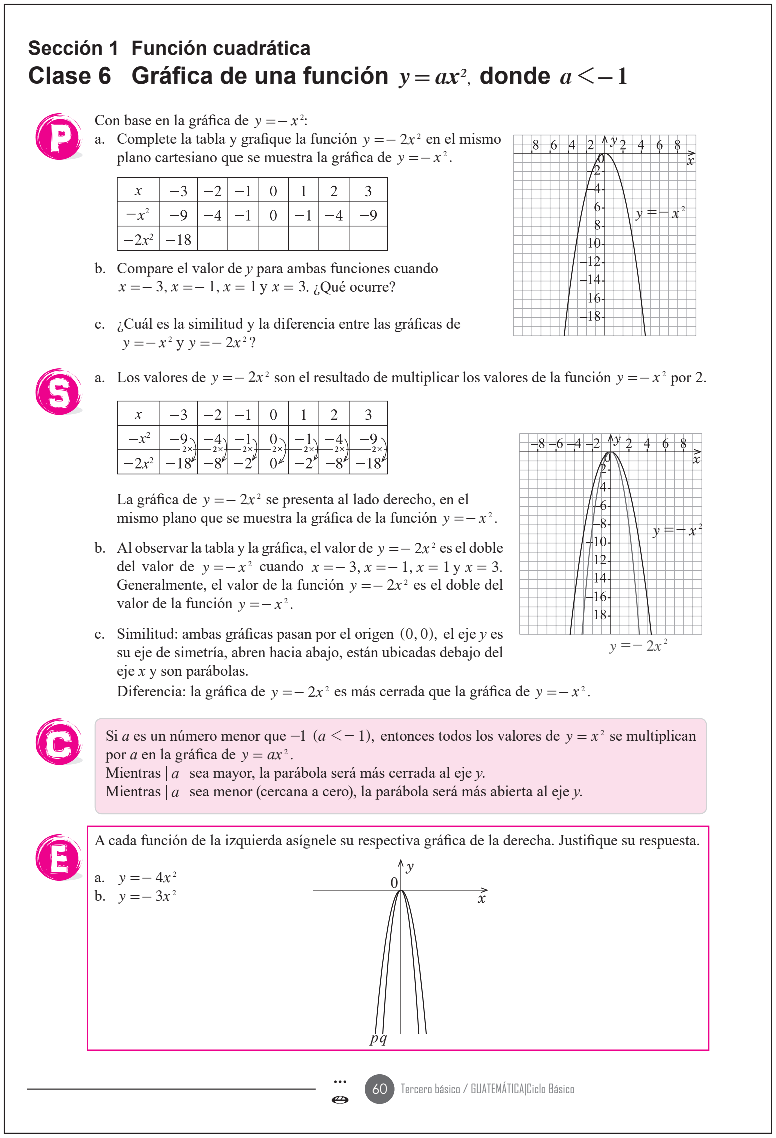
Para la función $y = -x^2$, complete la siguiente tabla y ubique los pares ordenados en el plano cartesiano. ¿Cómo es la gráfica que se forma?

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.4	−0.3	−0.2	−0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
y	−1										0										−1



Sección 1 Función cuadrática
Clase 6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$

Aprendizaje esperado:
Identifica la gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$

P Con base en la gráfica de $y = -x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = -2x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x^2$	-18						

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -2x^2$?

S a. Los valores de $y = -2x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de la función $y = -x^2$ por 2.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

La gráfica de $y = -2x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = -x^2$.

b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -2x^2$ es el doble del valor de $y = -x^2$ cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de la función $y = -2x^2$ es el doble del valor de la función $y = -x^2$.

c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0, 0)$, el eje y es su eje de simetría, abren hacia abajo, están ubicadas debajo del eje x y son parábolas.
Diferencia: la gráfica de $y = -2x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = -x^2$.

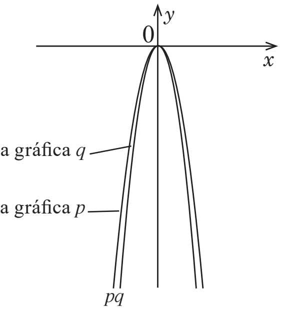
C Si a es un número menor que -1 $(a < -1)$, entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.
Mientras $|a|$ sea mayor, la parábola será más cerrada al eje y.
Mientras $|a|$ sea menor (cercana a cero), la parábola será más abierta al eje y.

E A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha. Justifique su respuesta.

a. $y = -4x^2$
b. $y = -3x^2$

60 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:



a. $y = -4x^2$: la gráfica q

b. $y = -3x^2$: la gráfica p

Justificación:
$|-4| = 4$ y $|-3| = 3$
Entonces, $|-4| > |-3|$.
Por tanto, la gráfica de $y = -4x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = -3x^2$.

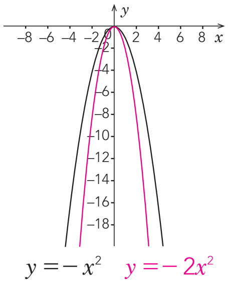
Fecha: dd – mm – aa
2-1-6 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $a < -1$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = -x^2$:
a. Complete la tabla y grafique $y = -2x^2$ en el mismo plano cartesiano.
b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -1$, $x = 1$ y $x = 3$.
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -2x^2$?

Ⓢ a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-2x^2$	-18	-8	-2	0	-2	-8	-18

2 ×



$y = -x^2$ $y = -2x^2$

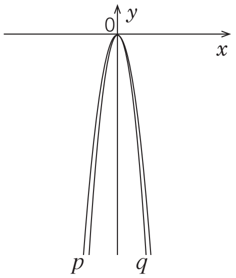
b. El valor de y en $y = -2x^2$ es el doble del valor de y en $y = -x^2$.

c. Similitud:
- Pasan por el origen (0, 0).
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia abajo.
- Están ubicadas abajo del eje x.
- Son parábolas.

Diferencia:
- La gráfica $y = -2x^2$ es más cerrada que la gráfica $y = -x^2$.

Ⓔ A cada función asígnele su respectiva gráfica. Justifique su respuesta.

a. $y = -4x^2$: la gráfica q
b. $y = -3x^2$: la gráfica p

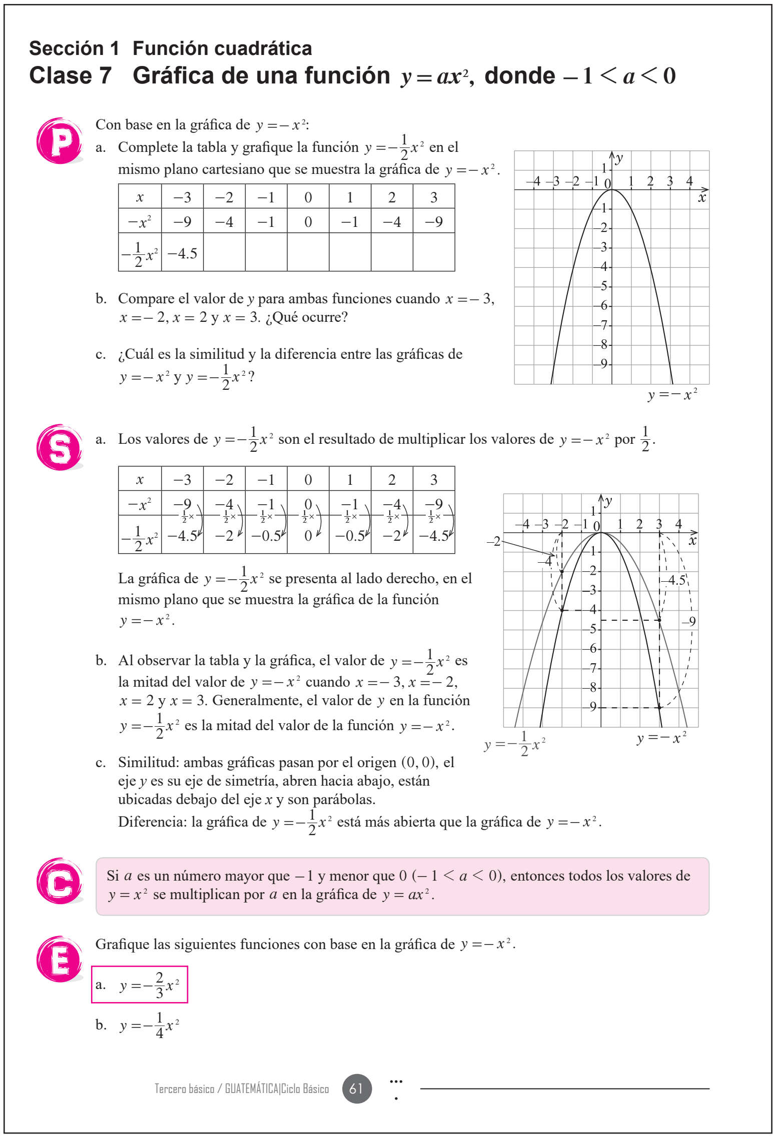


Justificación:
$|-4| = 4$ y $|-3| = 3$
Entonces, $|-4| > |-3|$.
Por tanto, la gráfica de $y = -4x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = -3x^2$.

Sección 1 Función cuadrática

Clase 7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$

P Con base en la gráfica de $y = -x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = -\frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano que se muestra la gráfica de $y = -x^2$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-\frac{1}{2}x^2$	-4.5						

b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. ¿Qué ocurre?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$?

S a. Los valores de $y = -\frac{1}{2}x^2$ son el resultado de multiplicar los valores de $y = -x^2$ por $\frac{1}{2}$.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-\frac{1}{2}x^2$	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5

$\frac{1}{2}\times$

La gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ se presenta al lado derecho, en el mismo plano que se muestra la gráfica de la función $y = -x^2$.

b. Al observar la tabla y la gráfica, el valor de $y = -\frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = -x^2$ cuando $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ y $x = 3$. Generalmente, el valor de y en la función $y = -\frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de la función $y = -x^2$.

c. Similitud: ambas gráficas pasan por el origen $(0, 0)$, el eje y es su eje de simetría, abren hacia abajo, están ubicadas debajo del eje x y son parábolas.
Diferencia: la gráfica de $y = -\frac{1}{2}x^2$ está más abierta que la gráfica de $y = -x^2$.

C Si a es un número mayor que -1 y menor que 0 $(-1 < a < 0)$, entonces todos los valores de $y = x^2$ se multiplican por a en la gráfica de $y = ax^2$.

E Grafique las siguientes funciones con base en la gráfica de $y = -x^2$.

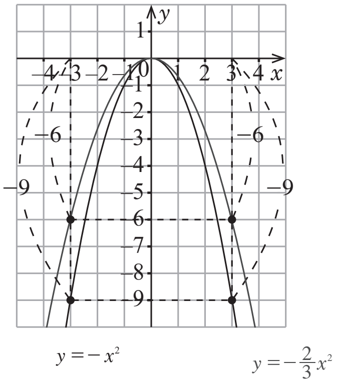
a. $y = -\frac{2}{3}x^2$

b. $y = -\frac{1}{4}x^2$

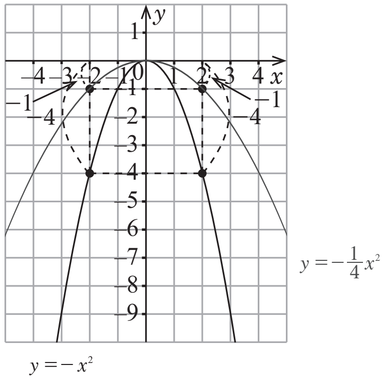
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 61

Solucionario del ejercicio:

a.



b.



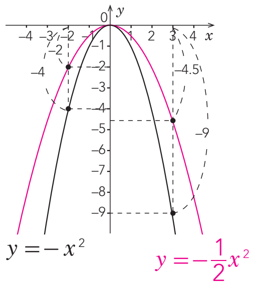
Fecha: dd – mm – aa
2-1-7 Gráfica de una función $y = ax^2$, donde $-1 < a < 0$
Ⓟ Con base en la gráfica de $y = -x^2$:

a. Complete la tabla y grafique $y = -\frac{1}{2}x^2$ en el mismo plano cartesiano.
b. Compare el valor de y para ambas funciones cuando $x = -3$, $x = 2$, $x = 2$ y $x = 3$.
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = -x^2$ y $y = -\frac{1}{2}x^2$?

Ⓢ a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$-x^2$	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9
$-\frac{1}{2}x^2$	-4.5	-2	-0.5	0	-0.5	-2	-4.5

$\frac{1}{2}\times$

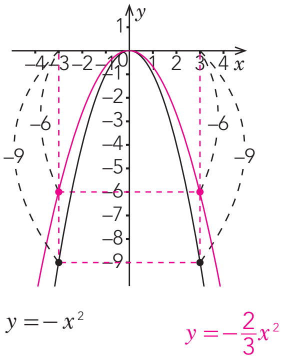


b. El valor de $y = -\frac{1}{2}x^2$ es la mitad del valor de $y = -x^2$.

c. Similitud:
- Pasan por el origen (0, 0).
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia abajo.
- Están ubicadas abajo del eje x.
- Son parábolas.

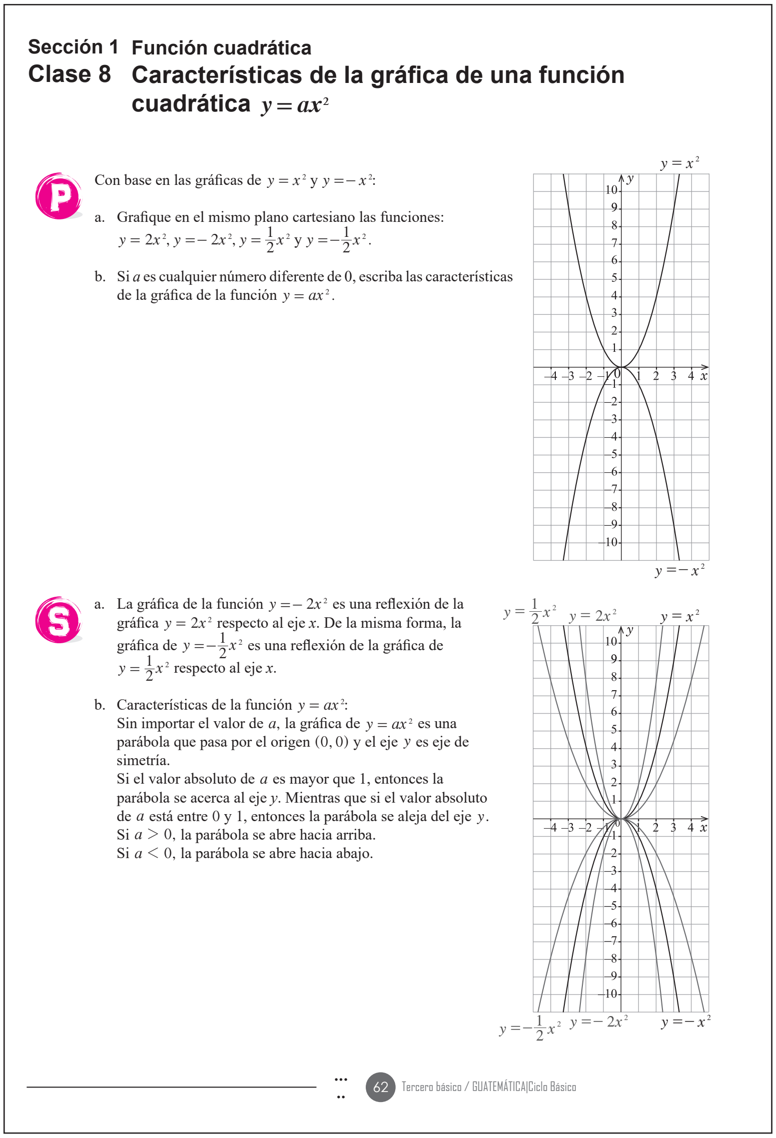
Diferencia:
- La gráfica $y = -\frac{1}{2}x^2$ está más abierta que la gráfica $y = -x^2$.

Ⓔ Grafique la función con base en la gráfica de $y = -x^2$.
a. $y = -\frac{2}{3}x^2$



Sección 1 Función cuadrática
Clase 8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$

Aprendizaje esperado:
Identifica la gráfica de una función cuadrática.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$

Ⓟ Con base en las gráficas de $y = x^2$ y $y =- x^2$:

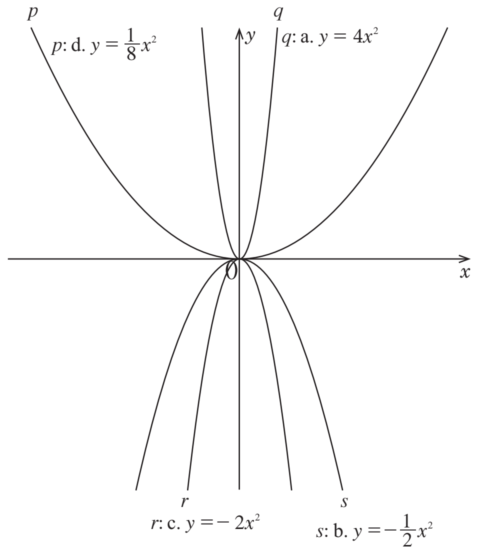
a. Grafique en el mismo plano cartesiano las funciones:
$y = 2x^2, y =- 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2$ y $y =-\frac{1}{2}x^2$.

b. Si a es cualquier número diferente de 0, escriba las características de la gráfica de la función $y = ax^2$.

Ⓢ a. La gráfica de la función $y =- 2x^2$ es una reflexión de la gráfica $y = 2x^2$ respecto al eje x. De la misma forma, la gráfica de $y =-\frac{1}{2}x^2$ es una reflexión de la gráfica de $y = \frac{1}{2}x^2$ respecto al eje x.

b. Características de la función $y = ax^2$:
Sin importar el valor de a, la gráfica de $y = ax^2$ es una parábola que pasa por el origen $(0, 0)$ y el eje y es eje de simetría.
Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y. Mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.
Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Solucionario de los ejercicios:

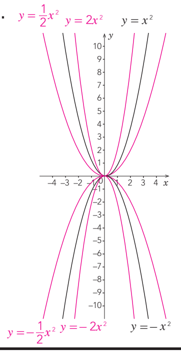


(*Explicación*)
Como los valores de las funciones a y d son positivos, las parábolas de estas gráficas se abren hacia arriba.
Comparando 4 y $\frac{1}{8}$, $4 > \frac{1}{8}$. Entonces, la gráfica de $y = 4x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = \frac{1}{8}x^2$.
Por tanto, la gráfica q representa la función a y la gráfica p representa la función d.
Como los valores de las funciones b y c son negativos, las parábolas de estas gráficas se abren hacia abajo. Entre $-\frac{1}{2}$ y -2, $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ y $|-2| = 2$. Entonces, $|-2| > \left|-\frac{1}{2}\right|$.
Por tanto, la gráfica de $y =- 2x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y =-\frac{1}{2}x^2$. Entonces, la gráfica r representa la función c y la gráfica s representa la función b.

Fecha: dd – mm – aa
2-1-8 Características de la gráfica de una función cuadrática $y = ax^2$

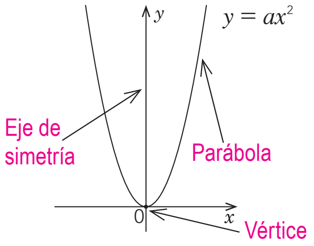
Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$ y $y =- x^2$:
a. Grafique en el mismo plano cartesiano:
$y = 2x^2, y =- 2x^2, y = \frac{1}{2}x^2$ y $y =-\frac{1}{2}x^2$.
b. Si a es cualquier número diferente de 0, escriba las características de la gráfica de $y = ax^2$.

Ⓢ a.

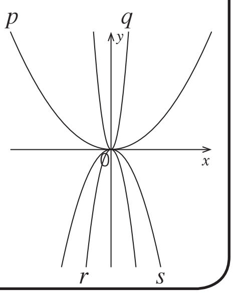


b. Características:
- La gráfica de $y = ax^2$ es una parábola que pasa por el origen $(0, 0)$ y el eje y es eje de simetría.
- Si $|a| > 1$, entonces la parábola se acerca al eje y.
- Si $0 < |a| < 1$, entonces la parábola se aleja del eje y.
- Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
- Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.

Ⓒ



Ⓔ Identifique cada función de la izquierda con su respectiva gráfica de la derecha.
a. $y = 4x^2$: la gráfica q
b. $y =-\frac{1}{2}x^2$: la gráfica s
c. $y =- 2x^2$: la gráfica r
d. $y = \frac{1}{8}x^2$: la gráfica p

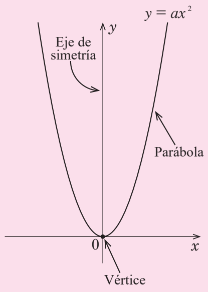


C

A la gráfica de una función $y = ax^2$ se le llama parábola. La gráfica tiene el eje y como **eje de simetría**. Al punto de intersección entre la parábola y su eje de simetría se le llama **vértice**. En el caso de $y = ax^2$, el vértice coincide con el origen $(0, 0)$.

Si el valor absoluto de a es mayor que 1, entonces la parábola se acerca al eje y. Mientras que si el valor absoluto de a está entre 0 y 1, entonces la parábola se aleja del eje y.

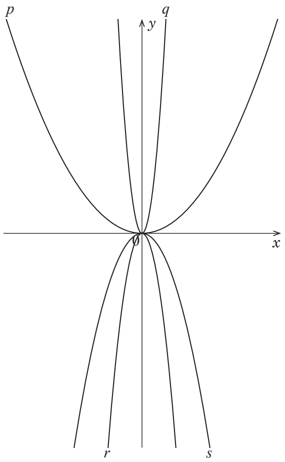
Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba.
Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo.



E

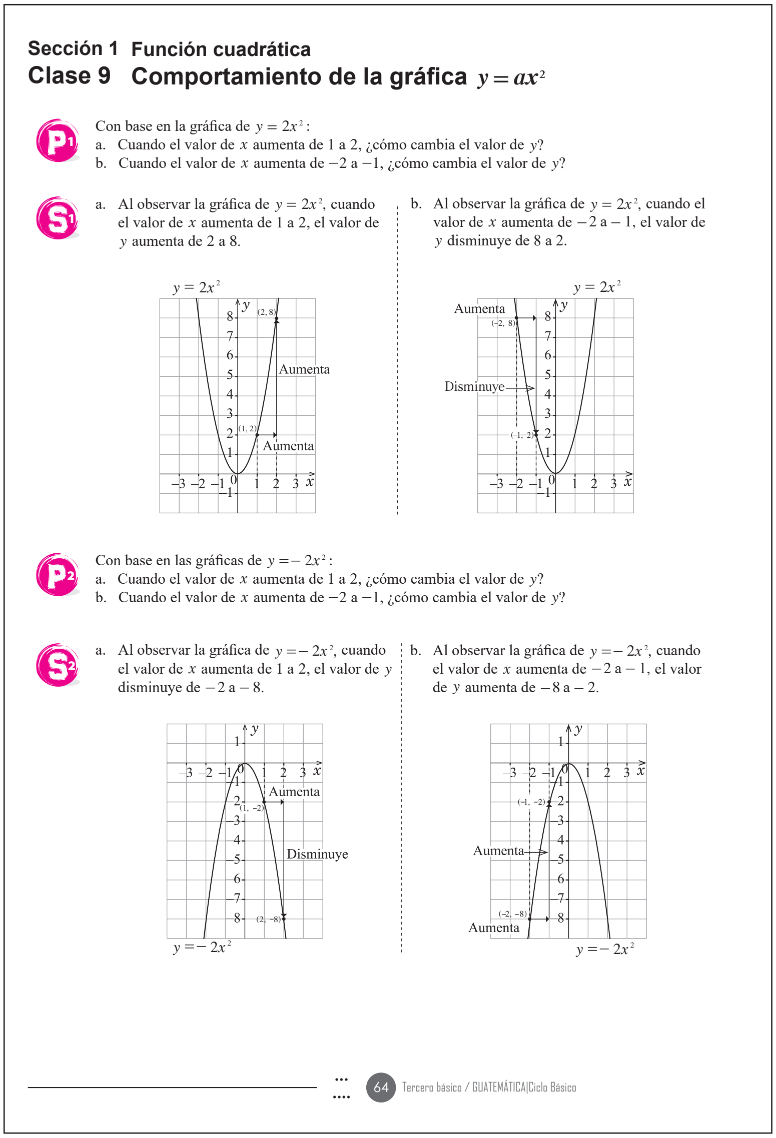
Identifique cada función de la izquierda con su respectiva gráfica de la derecha.

a. $y = 4x^2$
b. $y = -\frac{1}{2}x^2$
c. $y = -2x^2$
d. $y = \frac{1}{8}x^2$



Sección 1 Función cuadrática
Clase 9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$

Aprendizaje esperado:
Identifica el comportamiento de la gráfica $y = ax^2$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$

P1 Con base en la gráfica de $y = 2x^2$:
a. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
b. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?

S1 a. Al observar la gráfica de $y = 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, el valor de y aumenta de 2 a 8.
b. Al observar la gráfica de $y = 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de − 2 a − 1, el valor de y disminuye de 8 a 2.

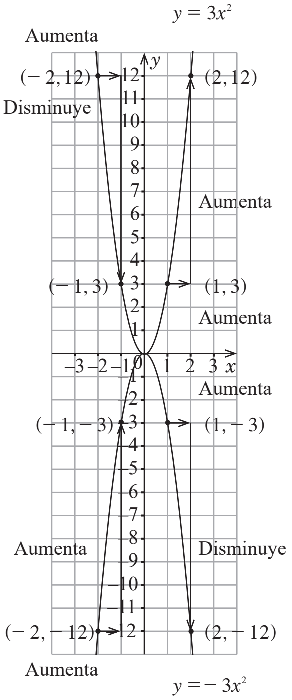
P2 Con base en las gráficas de $y =- 2x^2$:
a. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
b. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?

S2 a. Al observar la gráfica de $y =- 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, el valor de y disminuye de − 2 a − 8.
b. Al observar la gráfica de $y =- 2x^2$, cuando el valor de x aumenta de − 2 a − 1, el valor de y aumenta de − 8 a − 2.

64 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

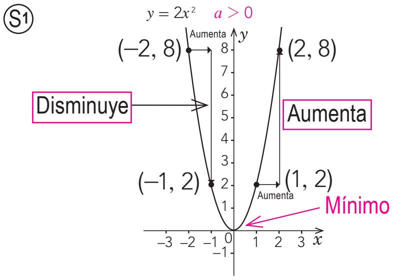
a. El valor de y aumenta de 3 a 12.
b. El valor de y disminuye de 12 a 3.
c. El valor de y disminuye de − 3 a − 12.
d. El valor de y aumenta de − 12 a − 3.



Fecha: dd – mm – aa
2-1-9 Comportamiento de la gráfica $y = ax^2$

P1 Con base en la gráfica de $y = 2x^2$:
a. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
b. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?

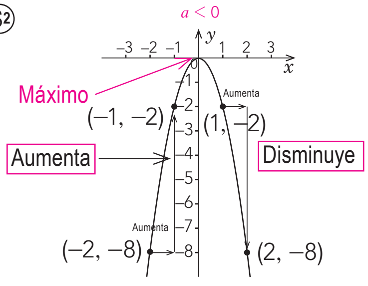
S1



a. El valor de y aumenta de 2 a 8.
b. El valor de y disminuye de 8 a 2.

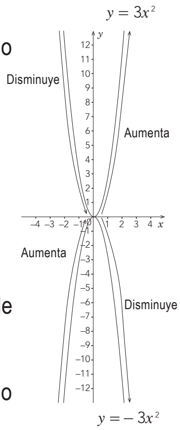
P2 Con base en la gráfica de $y =- 2x^2$:
a. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
b. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?

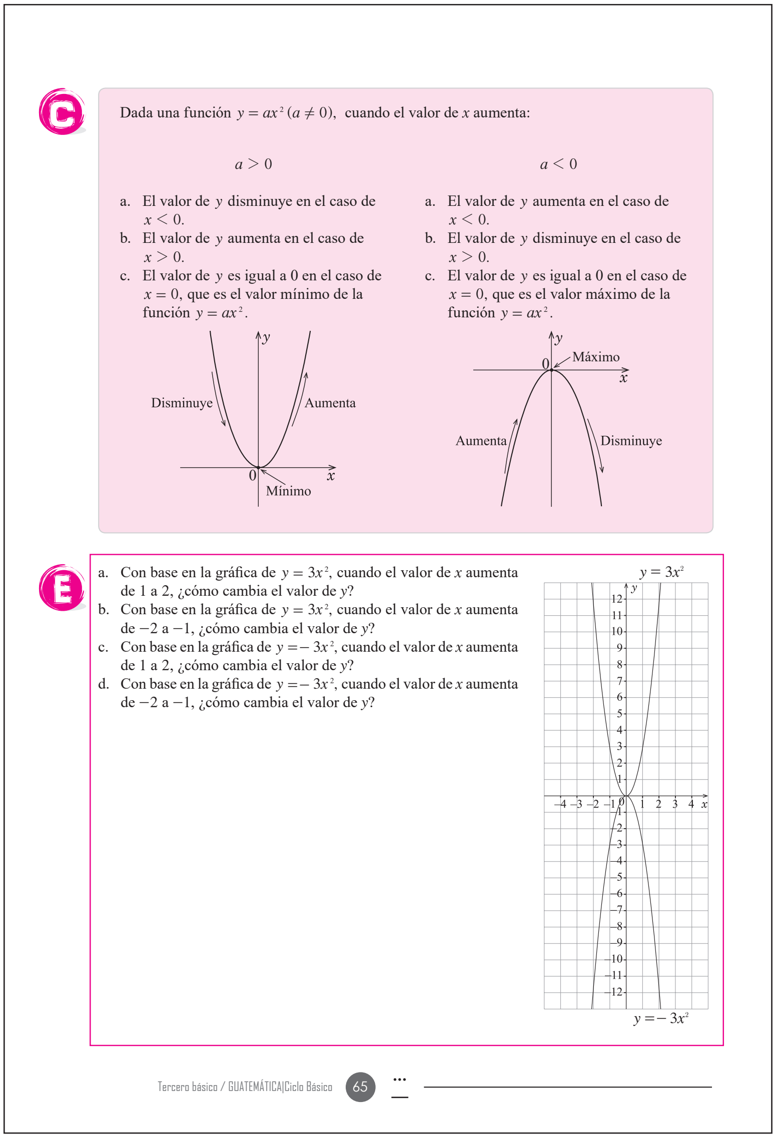
S2



a. El valor de y disminuye de −2 a −8.
b. El valor de y aumenta de −8 a −2.

E Con base en la gráfica de $y = 3x^2$:
a. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
R: El valor de y aumenta de 3 a 12.
b. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?
R: El valor de y disminuye de 12 a 3.
Con base en la gráfica de $y =- 3x^2$:
c. Cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?
R: El valor de y disminuye de − 3 a − 12.
d. Cuando el valor de x aumenta de −2 a −1, ¿cómo cambia el valor de y?
R: El valor de y aumenta de − 12 a − 3.





C

Dada una función $y = ax^2\ (a \neq 0)$, cuando el valor de x aumenta:

$a > 0$	$a < 0$
a. El valor de y disminuye en el caso de $x < 0$. b. El valor de y aumenta en el caso de $x > 0$. c. El valor de y es igual a 0 en el caso de $x = 0$, que es el valor mínimo de la función $y = ax^2$.	a. El valor de y aumenta en el caso de $x < 0$. b. El valor de y disminuye en el caso de $x > 0$. c. El valor de y es igual a 0 en el caso de $x = 0$, que es el valor máximo de la función $y = ax^2$.

E

a. Con base en la gráfica de $y = 3x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?

b. Con base en la gráfica de $y = 3x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1, ¿cómo cambia el valor de y?

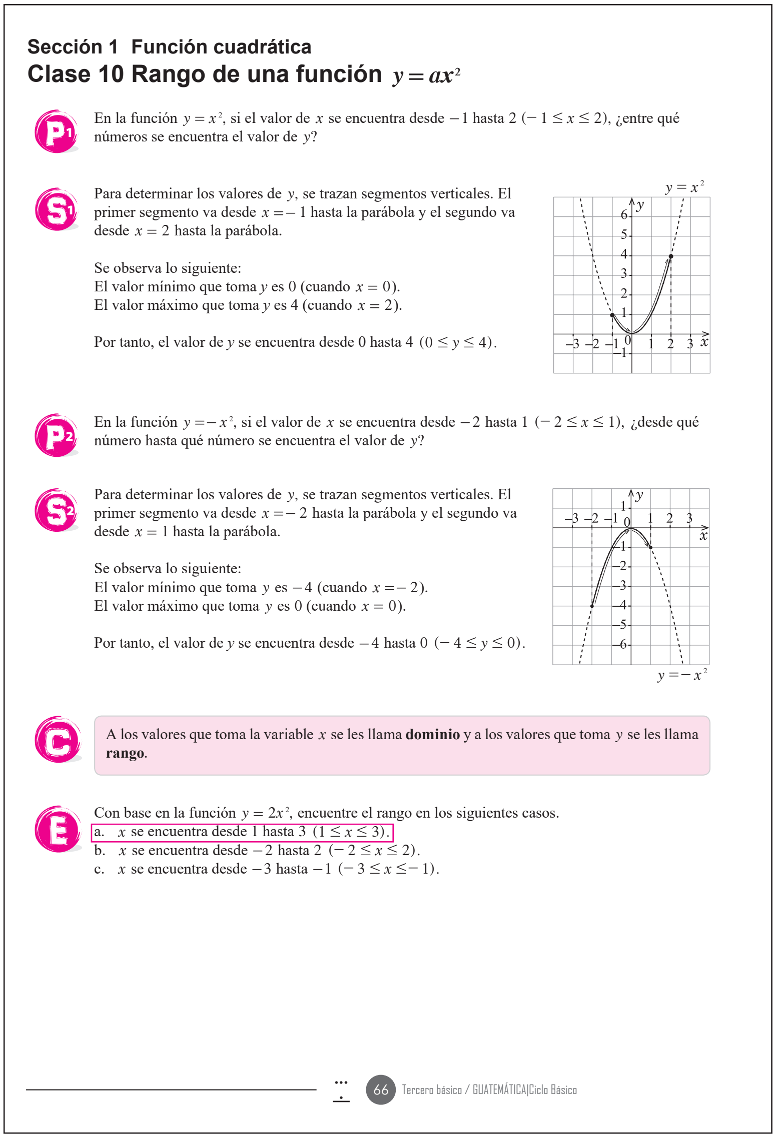
c. Con base en la gráfica de $y = -3x^2$, cuando el valor de x aumenta de 1 a 2, ¿cómo cambia el valor de y?

d. Con base en la gráfica de $y = -3x^2$, cuando el valor de x aumenta de -2 a -1, ¿cómo cambia el valor de y?

Sección 1 Función cuadrática

Clase 10 Rango de una función $y = ax^2$

Aprendizaje esperado:
Encuentra el rango de una función $y = ax^2$.



Sección 1 Función cuadrática

Clase 10 Rango de una función $y = ax^2$

P1 En la función $y = x^2$, si el valor de x se encuentra desde -1 hasta 2 $(-1 \leq x \leq 2)$, ¿entre qué números se encuentra el valor de y?

S1 Para determinar los valores de y, se trazan segmentos verticales. El primer segmento va desde $x = -1$ hasta la parábola y el segundo va desde $x = 2$ hasta la parábola.

Se observa lo siguiente:
El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).
El valor máximo que toma y es 4 (cuando $x = 2$).

Por tanto, el valor de y se encuentra desde 0 hasta 4 $(0 \leq y \leq 4)$.

P2 En la función $y = -x^2$, si el valor de x se encuentra desde -2 hasta 1 $(-2 \leq x \leq 1)$, ¿desde qué número hasta qué número se encuentra el valor de y?

S2 Para determinar los valores de y, se trazan segmentos verticales. El primer segmento va desde $x = -2$ hasta la parábola y el segundo va desde $x = 1$ hasta la parábola.

Se observa lo siguiente:
El valor mínimo que toma y es -4 (cuando $x = -2$).
El valor máximo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).

Por tanto, el valor de y se encuentra desde -4 hasta 0 $(-4 \leq y \leq 0)$.

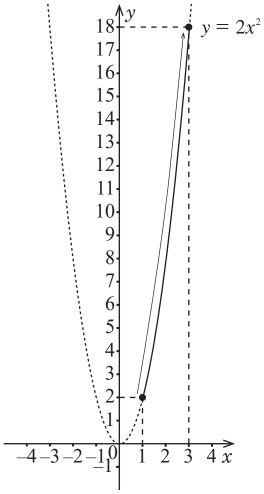
C A los valores que toma la variable x se les llama **dominio** y a los valores que toma y se les llama **rango**.

E Con base en la función $y = 2x^2$, encuentre el rango en los siguientes casos.
a. x se encuentra desde 1 hasta 3 $(1 \leq x \leq 3)$.
b. x se encuentra desde -2 hasta 2 $(-2 \leq x \leq 2)$.
c. x se encuentra desde -3 hasta -1 $(-3 \leq x \leq -1)$.

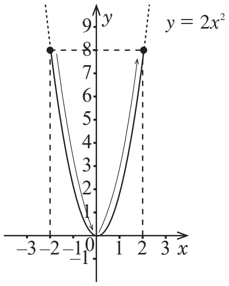
66 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. El valor mínimo que toma y es 2 (cuando $x = 1$).
El valor máximo que toma y es 18 (cuando $x = 3$).
Por tanto, el valor de y se encuentra desde 2 hasta 18 $(2 \leq y \leq 18)$.



b. El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).
El valor máximo que toma y es 8 (cuando $x = -2$ y $x = 2$).
Por tanto, el valor de y se encuentra desde 0 hasta 8 $(0 \leq y \leq 8)$.

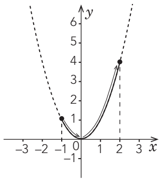


Ver ejercicios restantes en la página G100.

Fecha: dd – mm – aa
2-1-10 Rango de una función $y = ax^2$

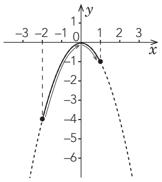
(P1) En $y = x^2$, si el valor de x se encuentra en $-1 \leq x \leq 2$, ¿entre qué números se encuentra el valor de y?

(S1) El valor mínimo de y es 0 $(x = 0)$.
El valor máximo de y es 4 $(x = 2)$.
R: $0 \leq y \leq 4$



(P2) En $y = -x^2$, si el valor de x se encuentra en $-2 \leq x \leq 1$, ¿entre qué números se encuentra el valor de y?

(S2) El valor mínimo de y es -4 $(x = -2)$.
El valor máximo de y es 0 $(x = 0)$.
R: $-4 \leq y \leq 0$



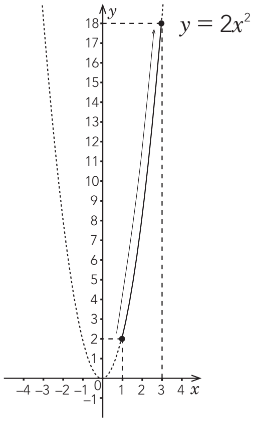
(C) A los valores que toma la variable x se les llama dominio y a los valores que toma y se les llama rango.

(E) Con base en la función $y = 2x^2$, encuentre el rango.
a. Cuando x se encuentra en $1 \leq x \leq 3$.

El valor mínimo de y es 2 $(x = 1)$.

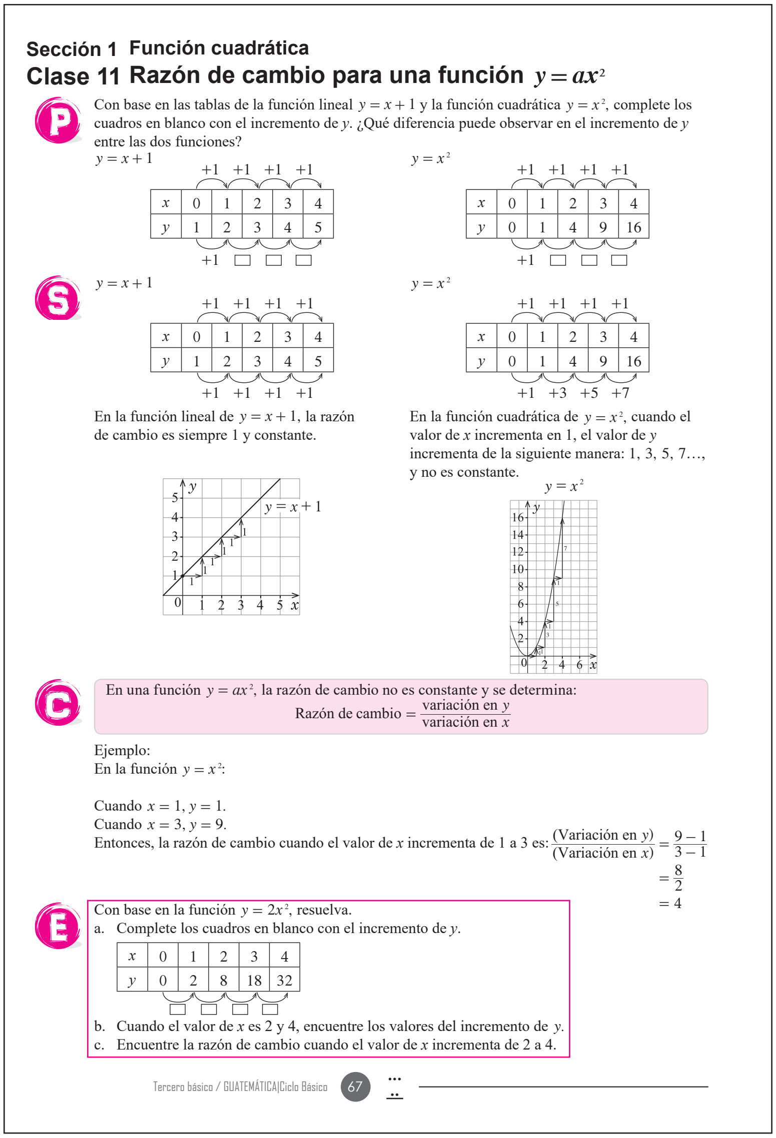
El valor máximo de y es 18 $(x = 3)$.

R: $2 \leq y \leq 18$



Sección 1 Función cuadrática
Clase 11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$

Aprendizaje esperado:
Encuentra la razón de cambio de una función $y = ax^2$.



Sección 1 **Función cuadrática**
Clase 11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$

P Con base en las tablas de la función lineal $y = x + 1$ y la función cuadrática $y = x^2$, complete los cuadros en blanco con el incremento de y. ¿Qué diferencia puede observar en el incremento de y entre las dos funciones?

$y = x + 1$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

+1 ☐ ☐ ☐

$y = x^2$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

+1 ☐ ☐ ☐

S $y = x + 1$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

+1 +1 +1 +1

$y = x^2$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

+1 +3 +5 +7

En la función lineal de $y = x + 1$, la razón de cambio es siempre 1 y constante.

En la función cuadrática de $y = x^2$, cuando el valor de x incrementa en 1, el valor de y incrementa de la siguiente manera: 1, 3, 5, 7…, y no es constante.

C En una función $y = ax^2$, la razón de cambio no es constante y se determina:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$$

Ejemplo:
En la función $y = x^2$:

Cuando $x = 1$, $y = 1$.
Cuando $x = 3$, $y = 9$.
Entonces, la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 1 a 3 es: $\frac{(\text{Variación en } y)}{(\text{Variación en } x)} = \frac{9-1}{3-1}$
$= \frac{8}{2}$
$= 4$

E Con base en la función $y = 2x^2$, resuelva.
a. Complete los cuadros en blanco con el incremento de y.

x	0	1	2	3	4
y	0	2	8	18	32

☐ ☐ ☐ ☐

b. Cuando el valor de x es 2 y 4, encuentre los valores del incremento de y.
c. Encuentre la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 2 a 4.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 67

Solucionario del ejercicio:

a.

x	0	1	2	3	4
y	0	2	8	18	32

$\boxed{+2}$ $\boxed{+6}$ $\boxed{+10}$ $\boxed{+14}$

b. Cuando $x = 2$, $y = 8$.
Cuando $x = 4$, $y = 32$.
$32 - 8 = 24$
R: El incremento de y es 24.

c. $(\text{Razón de cambio}) = \frac{32-8}{4-2} = \frac{24}{2} = 12$

Fecha: dd – mm – aa
2-1-11 Razón de cambio para una función $y = ax^2$

Ⓟ ¿Qué diferencia hay en el incremento de y?
$y = x + 1$ $y = x^2$

Ⓢ

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5

+1 $\boxed{+1}$ $\boxed{+1}$ $\boxed{+1}$

+1 +1 +1 +1

x	0	1	2	3	4
y	0	1	4	9	16

+1 $\boxed{+3}$ $\boxed{+5}$ $\boxed{+7}$

En $y = x + 1$, la razón de cambio es siempre 1 y constante.
En $y = x^2$, la razón de y incrementa 1, 3, 5, 7... y no es constante.

Ⓒ En $y = ax^2$, la razón de cambio no es constante y se determina:

$$\text{Razón de cambio} = \frac{\text{variación en } y}{\text{variación en } x}$$

Ejemplo:
En $y = x^2$:
Cuando $x = 1$, $y = 1$.
Cuando $x = 3$, $y = 9$.
Cuando el valor de x incrementa de 1 a 3, la razón de cambio es:

$$\frac{9-1}{3-1} = \frac{8}{2} = 4$$

Ⓔ Con base en $y = 2x^2$:
a. Complete los cuadros.

x	0	1	2	3	4
y	0	2	8	18	32

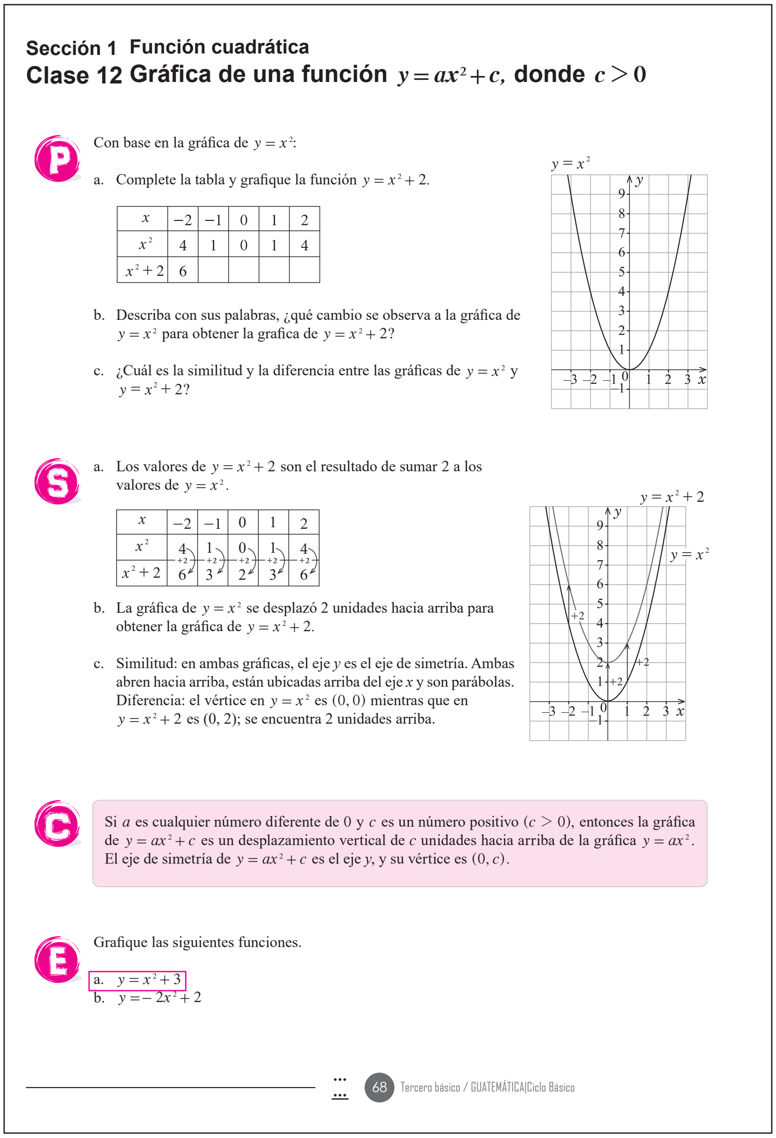
$\boxed{+2}$ $\boxed{+6}$ $\boxed{+10}$ $\boxed{+14}$

b. Cuando el valor de x es 2 y 4, encuentre los valores del incremento de y.
Cuando $x = 2$, $y = 8$.
Cuando $x = 4$, $y = 32$.
$32 - 8 = 24$ R: El incremento de y es 24.

c. Encuentre la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 2 a 4.
$\frac{32-8}{4-2} = \frac{24}{2} = 12$

Sección 1 Función cuadrática
Clase 12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$

P Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = x^2 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6				

b. Describa con sus palabras, ¿qué cambio se observa a la gráfica de $y = x^2$ para obtener la grafica de $y = x^2 + 2$?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$?

S a. Los valores de $y = x^2 + 2$ son el resultado de sumar 2 a los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	$\overset{+2}{6}$	$\overset{+2}{3}$	$\overset{+2}{2}$	$\overset{+2}{3}$	$\overset{+2}{6}$

b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia arriba para obtener la gráfica de $y = x^2 + 2$.

c. Similitud: en ambas gráficas, el eje y es el eje de simetría. Ambas abren hacia arriba, están ubicadas arriba del eje x y son parábolas. Diferencia: el vértice en $y = x^2$ es $(0, 0)$ mientras que en $y = x^2 + 2$ es (0, 2); se encuentra 2 unidades arriba.

C Si a es cualquier número diferente de 0 y c es un número positivo $(c > 0)$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un desplazamiento vertical de c unidades hacia arriba de la gráfica $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

E Grafique las siguientes funciones.

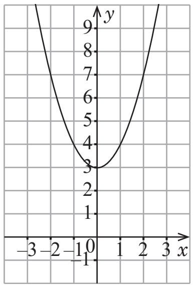
a. $y = x^2 + 3$
b. $y = -2x^2 + 2$

68 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

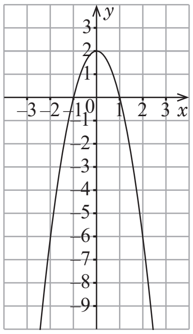
a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	12	7	4	3	4	7	12



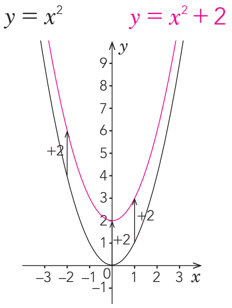
b.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-16	-6	0	2	0	-6	-16



Fecha: dd – mm – aa
2-1-12 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c > 0$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:
a. Complete la tabla y grafique $y = x^2 + 2$.
b. ¿Qué cambio se observa de la gráfica $y = x^2$ a $y = x^2 + 2$?
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 + 2$?



Ⓢ a.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 + 2$	6	3	2	3	6

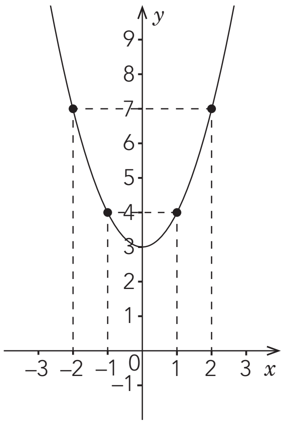
+2

b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia arriba para obtener la gráfica $y = x^2 + 2$.

c. Similitud:
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia arriba.
- Están ubicadas arriba del eje x.
- Son parábolas.

Diferencia:
- El vértice en $y = x^2$ es (0, 0) mientras que en $y = x^2 + 2$ es (0, 2).

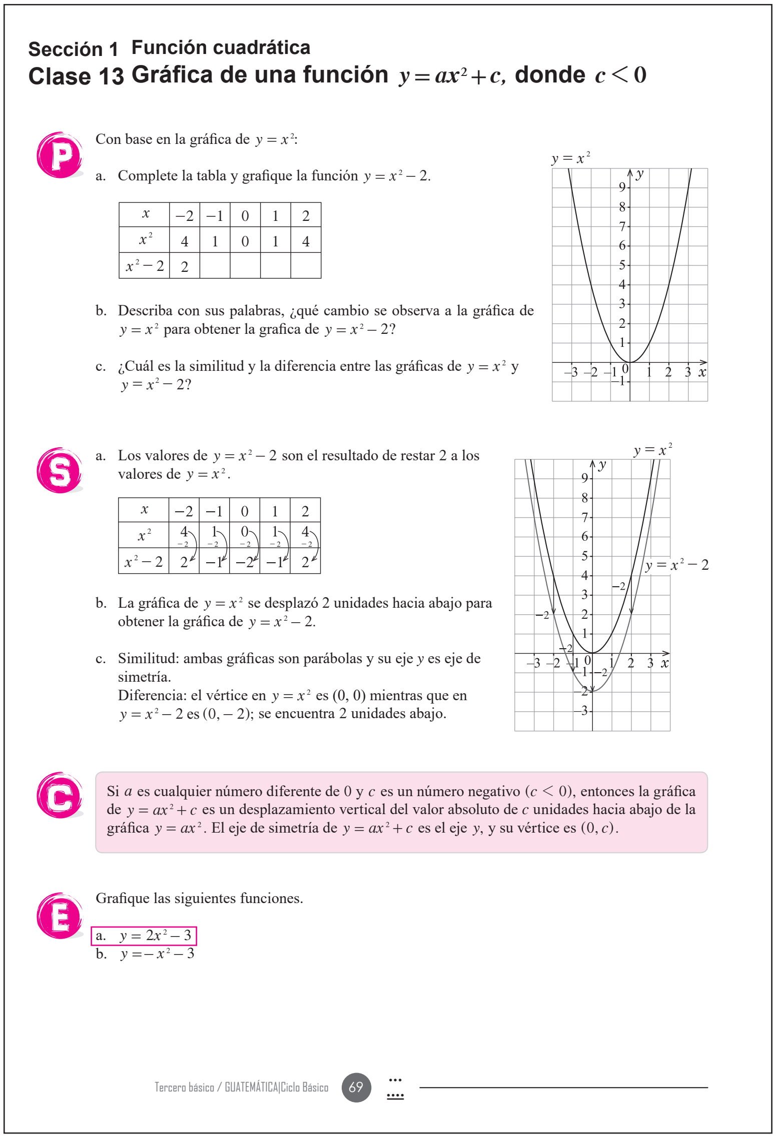
Ⓔ Grafique la función.
a. $y = x^2 + 3$



Sección 1 Función cuadrática

Clase 13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$

Aprendizaje esperado:
Grafica una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$.



Sección 1 Función cuadrática
Clase 13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$

P Con base en la gráfica de $y = x^2$:

a. Complete la tabla y grafique la función $y = x^2 - 2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2				

b. Describa con sus palabras, ¿qué cambio se observa a la gráfica de $y = x^2$ para obtener la grafica de $y = x^2 - 2$?

c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$?

S a. Los valores de $y = x^2 - 2$ son el resultado de restar 2 a los valores de $y = x^2$.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	2

b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

c. Similitud: ambas gráficas son parábolas y su eje y es eje de simetría.
Diferencia: el vértice en $y = x^2$ es (0, 0) mientras que en $y = x^2 - 2$ es $(0, -2)$; se encuentra 2 unidades abajo.

C Si a es cualquier número diferente de 0 y c es un número negativo $(c < 0)$, entonces la gráfica de $y = ax^2 + c$ es un desplazamiento vertical del valor absoluto de c unidades hacia abajo de la gráfica $y = ax^2$. El eje de simetría de $y = ax^2 + c$ es el eje y, y su vértice es $(0, c)$.

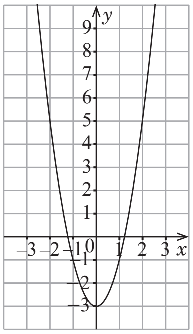
E Grafique las siguientes funciones.

a. $y = 2x^2 - 3$
b. $y = -x^2 - 3$

Solucionario del ejercicio:

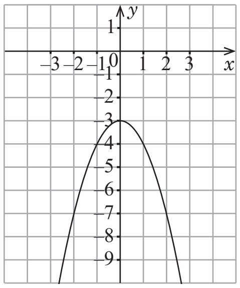
a.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	15	5	-1	-3	-1	5	15



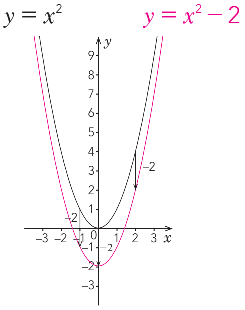
b.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-12	-7	-4	-3	-4	-7	-12



Fecha: dd – mm – aa
2-1-13 Gráfica de una función $y = ax^2 + c$, donde $c < 0$

Ⓟ Con base en la gráfica de $y = x^2$:
a. Complete la tabla y grafique $y = x^2 - 2$.
b. ¿Qué cambio se observa de la gráfica $y = x^2$ a $y = x^2 - 2$?
c. ¿Cuál es la similitud y la diferencia entre las gráficas de $y = x^2$ y $y = x^2 - 2$?



Ⓢ a.

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$x^2 - 2$	2	-1	-2	-1	-2

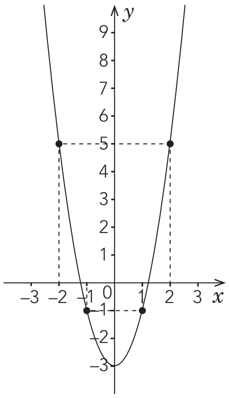
-2

b. La gráfica de $y = x^2$ se desplazó 2 unidades hacia abajo para obtener la gráfica de $y = x^2 - 2$.

c. Similitud:
- El eje y es su eje de simetría.
- Abren hacia arriba.
- Son parábolas.

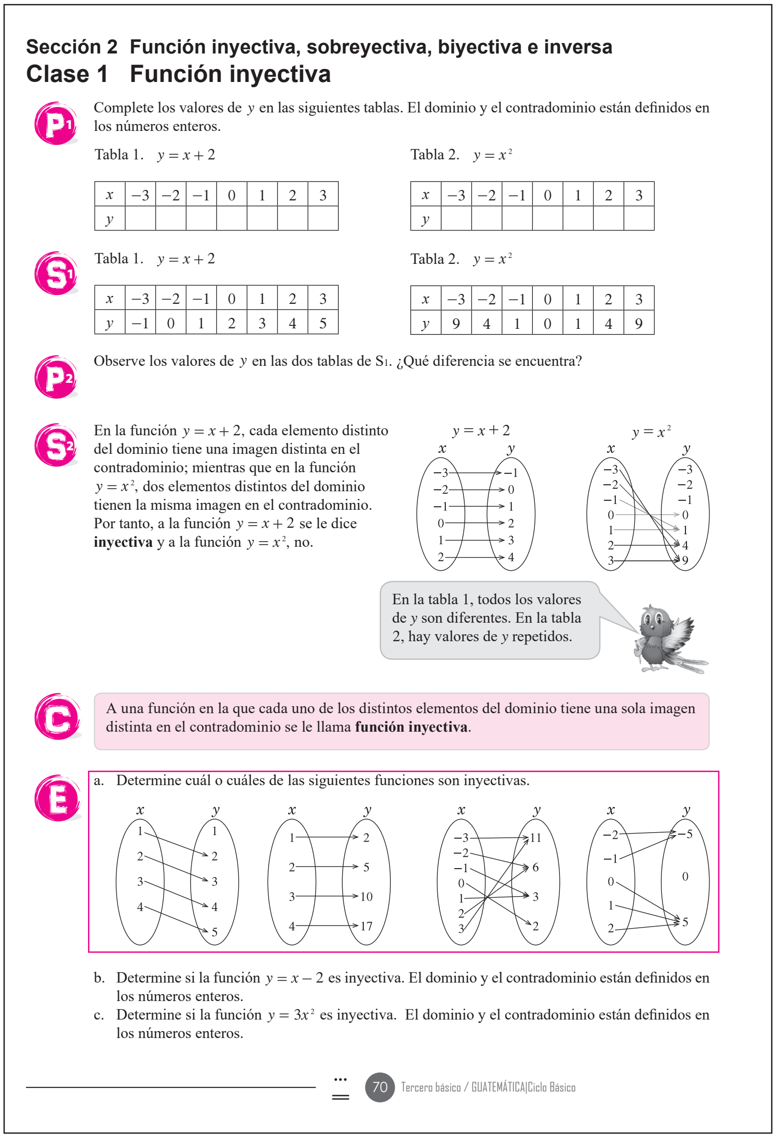
Diferencia:
- El vértice en $y = x^2$ es (0, 0) mientras que en $y = x^2 - 2$ es (0, –2).

Ⓔ Grafique la función.
a. $y = 2x^2 - 3$



Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 1 Función inyectiva

Aprendizaje esperado:
Determina si una función es inyectiva.



Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 1 Función inyectiva

P1 Complete los valores de y en las siguientes tablas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

S1 Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

P2 Observe los valores de y en las dos tablas de S1. ¿Qué diferencia se encuentra?

S2 En la función $y = x + 2$, cada elemento distinto del dominio tiene una imagen distinta en el contradominio; mientras que en la función $y = x^2$, dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen en el contradominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **inyectiva** y a la función $y = x^2$, no.

En la tabla 1, todos los valores de y son diferentes. En la tabla 2, hay valores de y repetidos.

C A una función en la que cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio se le llama **función inyectiva**.

E
a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son inyectivas.

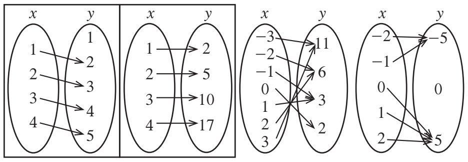
b. Determine si la función $y = x - 2$ es inyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

c. Determine si la función $y = 3x^2$ es inyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

70 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

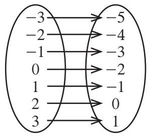
a.



b.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	−4	−3	−2	−1	0	1

En la función $y = x - 2$, cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio.

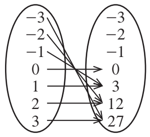


Entonces, es inyectiva.

c.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

En la función $y = 3x^2$, dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen en el contradominio.



Entonces, no es inyectiva.

Fecha: dd – mm – aa
2-2-1 Función inyectiva

Ⓟ1 Complete los valores de y.

Ⓢ1 Tabla 1. $y = x + 2$

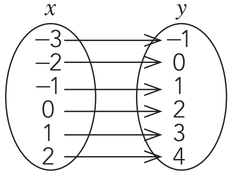
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = x^2$

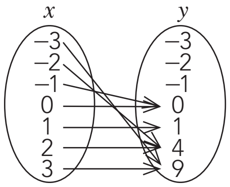
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Ⓟ2 Observe los valores de y de S1. ¿Qué diferencia hay?

Ⓢ2 $y = x + 2$



$y = x^2$

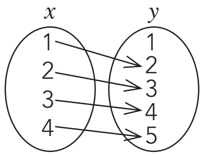


Cada elemento distinto del dominio tiene una imagen distinta en el contradominio.
↓
Es inyectiva.

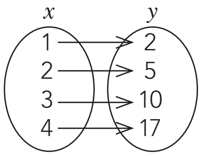
Dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen en el contradominio.
↓
No es inyectiva.

Ⓒ A una función en la que cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio se le llama función inyectiva.

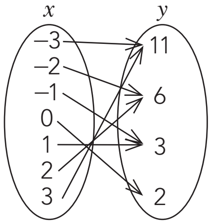
Ⓔ a. Determine funciones inyectivas.



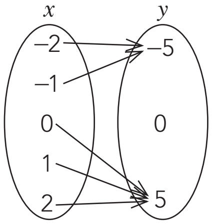
Es inyectiva.



Es inyectiva.



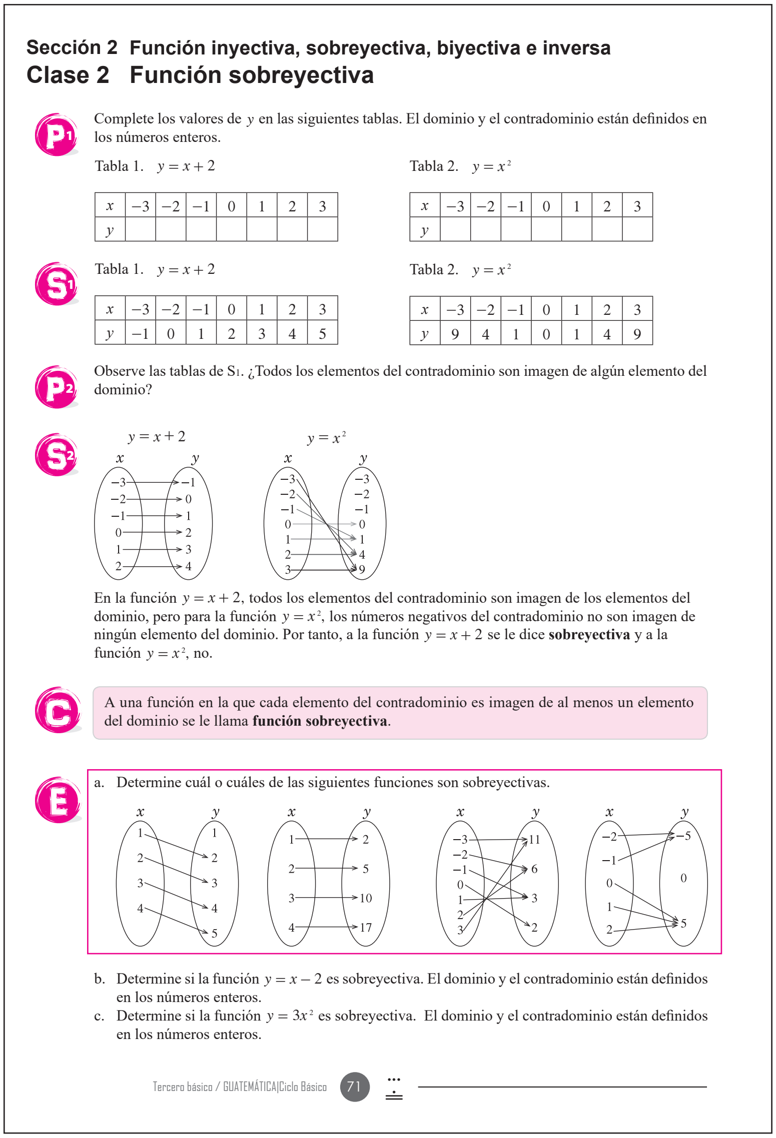
No es inyectiva.



No es inyectiva.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 2 Función sobreyectiva

Aprendizaje esperado:
Determina si una función es sobreyectiva.



Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 2 Función sobreyectiva

P1 Complete los valores de y en las siguientes tablas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

S1 Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

P2 Observe las tablas de S1. ¿Todos los elementos del contradominio son imagen de algún elemento del dominio?

S2 $y = x + 2$ $y = x^2$

En la función $y = x + 2$, todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio, pero para la función $y = x^2$, los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **sobreyectiva** y a la función $y = x^2$, no.

C A una función en la que cada elemento del contradominio es imagen de al menos un elemento del dominio se le llama **función sobreyectiva**.

E a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son sobreyectivas.

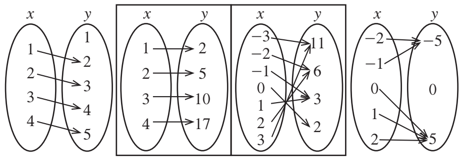
b. Determine si la función $y = x - 2$ es sobreyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

c. Determine si la función $y = 3x^2$ es sobreyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 71

Solucionario del ejercicio:

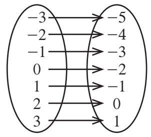
a.



b.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−5	−4	−3	−2	−1	0	1

En la función $y = x - 2$, todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio.

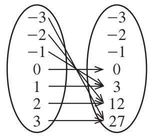


Entonces, es sobreyectiva.

c.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

En la función $y = 3x^2$, los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio.



Entonces, no es sobreyectiva.

Fecha: dd – mm – aa
2-2-2 Función sobreyectiva

(P1) Complete los valores de y.

(S1) Tabla 1. $y = x + 2$

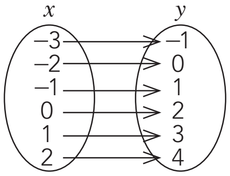
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

(P2) ¿Todos los elementos del contradominio son imagen de algún elemento del dominio?

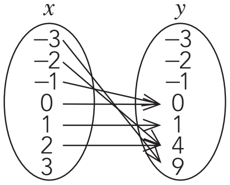
(S2) $y = x + 2$



Todos los elementos del contradominio son imagen de algún elemento del dominio.

Es sobreyectiva.

$y = x^2$

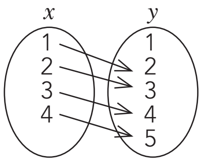


Los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio.

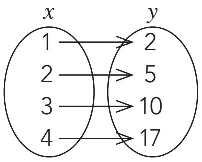
No es sobreyectiva.

(C) A una función en la que cada elemento del contradominio es imagen de al menos un elemento del dominio se le llama función sobreyectiva.

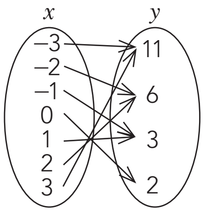
(E) a. Determine funciones sobreyectivas.



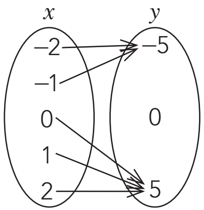
No es sobreyectiva.



Es sobreyectiva.



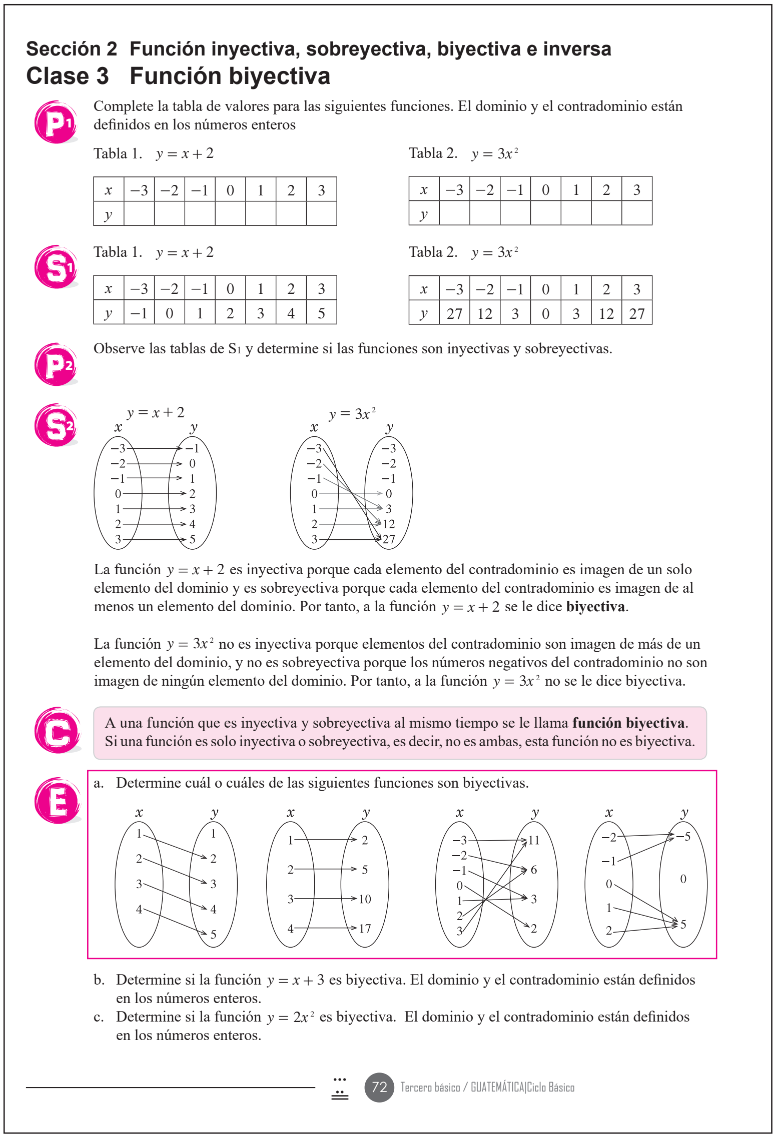
Es sobreyectiva.



No es sobreyectiva.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 3 Función biyectiva

Aprendizaje esperado:
Determina si una función es biyectiva.



Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 3 Función biyectiva

P1 Complete la tabla de valores para las siguientes funciones. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros

Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

Tabla 2. $y = 3x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

S1 Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

Tabla 2. $y = 3x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

P2 Observe las tablas de S1 y determine si las funciones son inyectivas y sobreyectivas.

S2

La función $y = x + 2$ es inyectiva porque cada elemento del contradominio es imagen de un solo elemento del dominio y es sobreyectiva porque cada elemento del contradominio es imagen de al menos un elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = x + 2$ se le dice **biyectiva**.

La función $y = 3x^2$ no es inyectiva porque elementos del contradominio son imagen de más de un elemento del dominio, y no es sobreyectiva porque los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio. Por tanto, a la función $y = 3x^2$ no se le dice biyectiva.

C A una función que es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo se le llama **función biyectiva**. Si una función es solo inyectiva o sobreyectiva, es decir, no es ambas, esta función no es biyectiva.

E

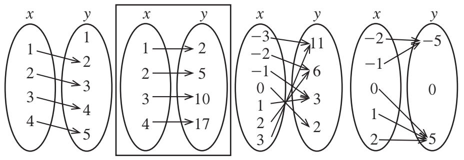
a. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son biyectivas.

b. Determine si la función $y = x + 3$ es biyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.
c. Determine si la función $y = 2x^2$ es biyectiva. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

72 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

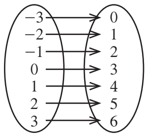
Solucionario de los ejercicios:

a.



b. La función $y = x + 3$ es biyectiva.
(*Explicación*)

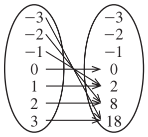
x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0	1	2	3	4	5	6



Cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio.
Entonces, la función es inyectiva.
Además, todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio.
Entonces, la función es sobreyectiva.
Por tanto, la función es biyectiva.

c. La función $y = 2x^2$ no es biyectiva.
(*Explicación*)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18



Dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen en el contradominio.
Entonces, la función no es inyectiva.
Además, los números negativos del contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio.
Entonces, la función no es sobreyectiva.
Por tanto, la función no es biyectiva.

Fecha: dd – mm – aa
2-2-3 Función biyectiva

Ⓟ1 Complete los valores de y.

Ⓢ1 Tabla 1. $y = x + 2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−1	0	1	2	3	4	5

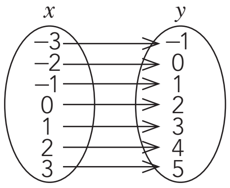
Tabla 2. $y = 3x^2$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	27	12	3	0	3	12	27

Ⓟ2 Determine si las funciones de S1 son inyectivas y sobreyectivas.

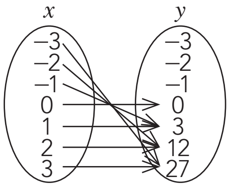
Ⓢ2

$y = x + 2$



Es inyectiva y sobreyectiva.
↓
Es biyectiva.

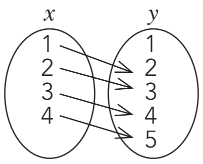
$y = 3x^2$



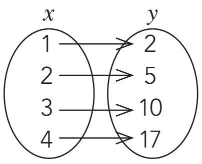
No es inyectiva ni sobreyectiva.
↓
No es biyectiva.

Ⓒ A una función que es inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo se le llama función biyectiva.

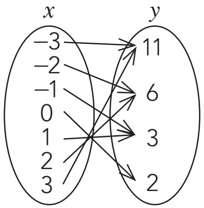
Ⓔ a. Determine funciones biyectivas.



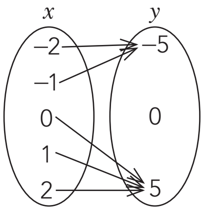
No es biyectiva.



Es biyectiva.



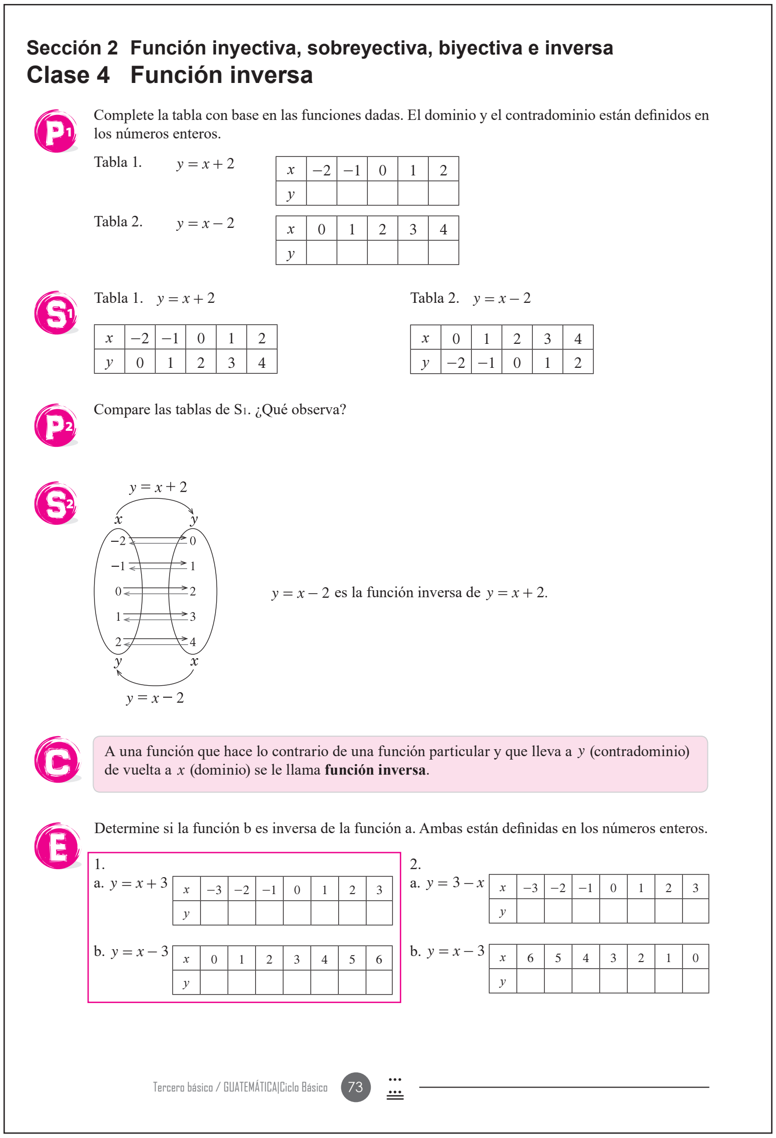
No es biyectiva.



No es biyectiva.

Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 4 Función inversa

Aprendizaje esperado:
Determina si una función es inversa de otra.



Sección 2 Función inyectiva, sobreyectiva, biyectiva e inversa
Clase 4 Función inversa

P1 Complete la tabla con base en las funciones dadas. El dominio y el contradominio están definidos en los números enteros.

Tabla 1. $y = x + 2$

x	−2	−1	0	1	2
y					

Tabla 2. $y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y					

S1 Tabla 1. $y = x + 2$

x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

Tabla 2. $y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	−2	−1	0	1	2

P2 Compare las tablas de S1. ¿Qué observa?

S2

$y = x - 2$ es la función inversa de $y = x + 2$.

C A una función que hace lo contrario de una función particular y que lleva a y (contradominio) de vuelta a x (dominio) se le llama **función inversa**.

E Determine si la función b es inversa de la función a. Ambas están definidas en los números enteros.

1.
a. $y = x + 3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

b. $y = x - 3$

x	0	1	2	3	4	5	6
y							

2.
a. $y = 3 - x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y							

b. $y = x - 3$

x	6	5	4	3	2	1	0
y							

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 73

Solucionario del ejercicio:

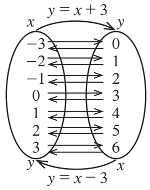
1. La función b es inversa de la función a.
(*Explicación*)

a. $y = x + 3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0	1	2	3	4	5	6

b. $y = x - 3$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−3	−2	−1	0	1	2	3



El valor de x, − 3, se cambia a 0 por la función $y = x + 3$, luego 0 vuelve a − 3 por la función $y = x - 3$. Es decir, todos los valores de x cambian por la función $y = x + 3$, y vuelven a los valores iniciales. Entonces, $y = x - 3$ es la función inversa de $y = x + 3$.

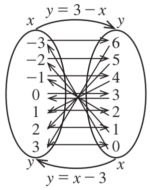
2. La función b no es inversa de la función a.
(*Explicación*)

a. $y = 3 - x$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	6	5	4	3	2	1	0

b. $y = x - 3$

x	6	5	4	3	2	1	0
y	3	2	1	0	−1	−2	−3



El valor de x, − 3, se cambia a 6 por la función $y = 3 - x$, luego 6 no vuelve a − 3 por la función $y = x - 3$. Es decir, los valores cambiados por la función $y = 3 - x$ no vuelven a los valores iniciales. Entonces, $y = x - 3$ no es la función inversa de $y = 3 - x$.

Fecha: dd – mm – aa
2-2-4 Función inversa

P1 Complete los valores de y.

S1 Tabla 1. $y = x + 2$

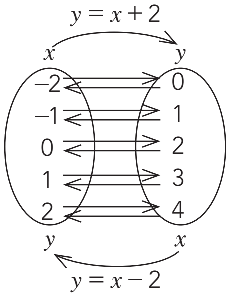
x	−2	−1	0	1	2
y	0	1	2	3	4

Tabla 2. $y = x - 2$

x	0	1	2	3	4
y	−2	−1	0	1	2

P2 Compare las tablas de S1. ¿Qué observa?

S2



$y = x - 2$ es la función inversa de $y = x + 2$.

C A una función que hace lo contrario de una función particular y que lleva a y (contradominio) de vuelta a x (dominio) se le llama función inversa.

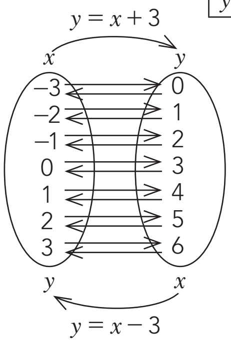
E 1. Determine si b es inversa de a.

a. $y = x + 3$

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	0	1	2	3	4	5	6

b. $y = x - 3$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	−3	−2	−1	0	1	2	3

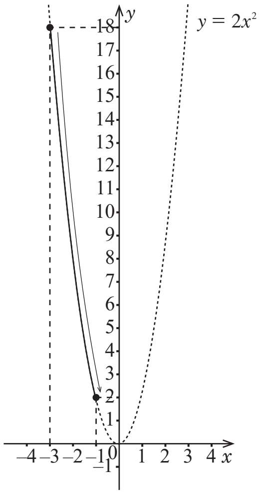


R: $y = x - 3$ es la función inversa de $y = x + 3$.

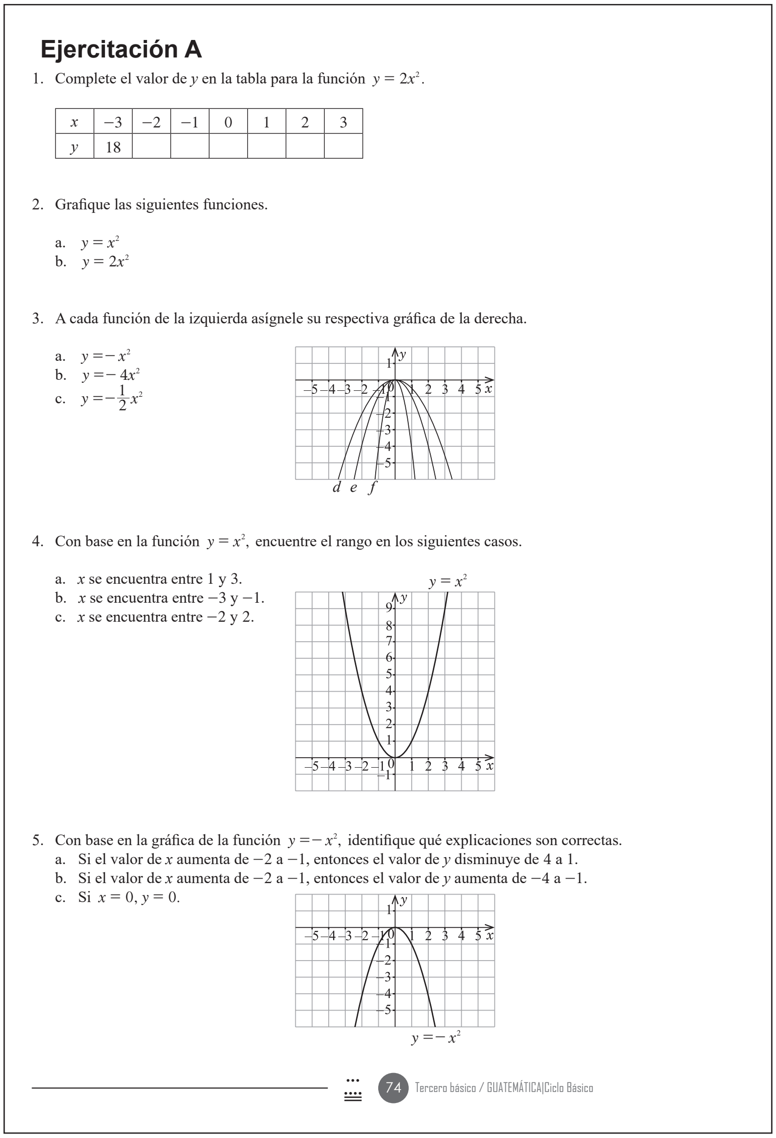
Complemento de solucionario de los ejercicios

Sección 1, clase 10

c. El valor mínimo que toma y es 2 (cuando $x = -1$).
El valor máximo que toma y es 18 (cuando $x = -3$).
Por tanto, el valor de y se encuentra desde 2 hasta 18 $(2 \leq y \leq 18)$.



Ejercitación A



Ejercitación A

1. Complete el valor de y en la tabla para la función $y = 2x^2$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	18						

2. Grafique las siguientes funciones.

   a. $y = x^2$
   b. $y = 2x^2$

3. A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha.

   a. $y = -x^2$
   b. $y = -4x^2$
   c. $y = -\frac{1}{2}x^2$

4. Con base en la función $y = x^2$, encuentre el rango en los siguientes casos.

   a. x se encuentra entre 1 y 3.
   b. x se encuentra entre −3 y −1.
   c. x se encuentra entre −2 y 2.

5. Con base en la gráfica de la función $y = -x^2$, identifique qué explicaciones son correctas.
   a. Si el valor de x aumenta de −2 a −1, entonces el valor de y disminuye de 4 a 1.
   b. Si el valor de x aumenta de −2 a −1, entonces el valor de y aumenta de −4 a −1.
   c. Si $x = 0$, $y = 0$.

74 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

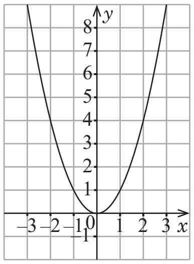
Solucionario:

1. a.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

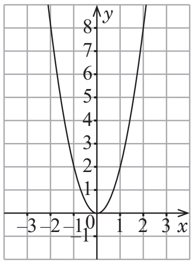
2. a. $y = x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

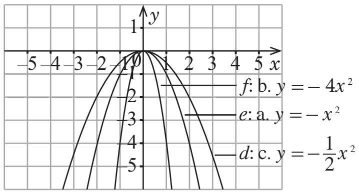


b. $y = 2x^2$

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	18	8	2	0	2	8	18

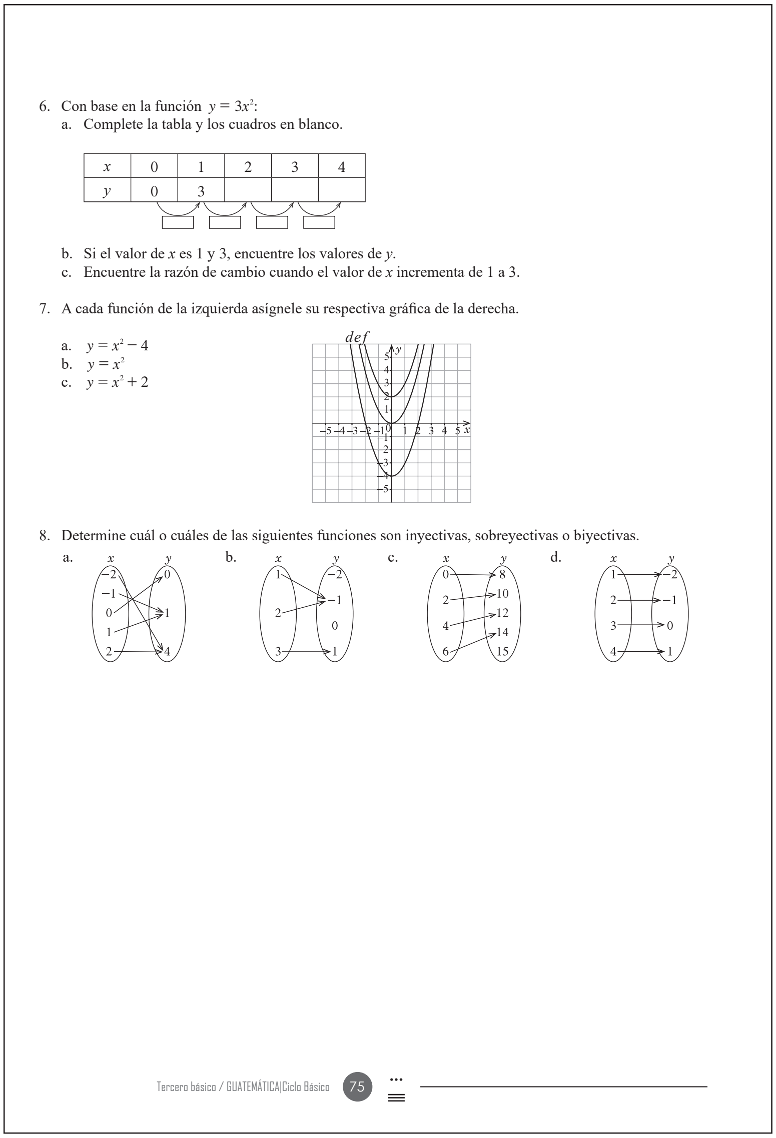


3.



(*Explicación*)
Comparando los valores de a de las funciones,
Función a: $a = -1$ y $|-1| = 1$,
Función b: $a = -4$ y $|-4| = 4$,
Función c: $a = -\frac{1}{2}$ y $\left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$,
$|-4| > |-1| > \left|-\frac{1}{2}\right|$.

Como el valor absoluto de a es mayor, la gráfica es más cerrada. Entonces, la gráfica f representa la función b. $y = -4x^2$, la gráfica e representa la función a. $y = -x^2$ y la gráfica d representa la función c. $y = -\frac{1}{2}x^2$.



6. Con base en la función $y = 3x^2$:
   a. Complete la tabla y los cuadros en blanco.

x	0	1	2	3	4
y	0	3			

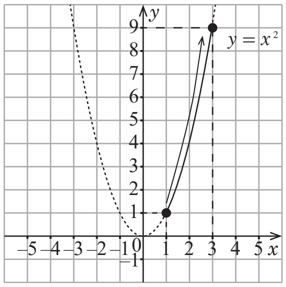
   b. Si el valor de x es 1 y 3, encuentre los valores de y.
   c. Encuentre la razón de cambio cuando el valor de x incrementa de 1 a 3.

7. A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha.
   a. $y = x^2 - 4$
   b. $y = x^2$
   c. $y = x^2 + 2$

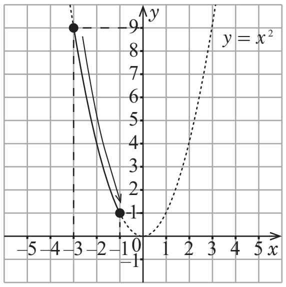
8. Determine cuál o cuáles de las siguientes funciones son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 75

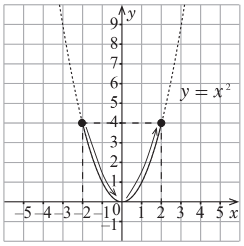
4. a. El valor mínimo que toma y es 1 (cuando $x = 1$).
   El valor máximo que toma y es 9 (cuando $x = 3$).
   Por tanto, el valor de y se encuentra desde 1 hasta 9 $(1 \leq y \leq 9)$.



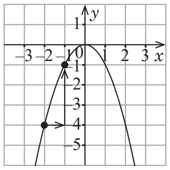
   b. El valor mínimo que toma y es 1 (cuando $x = -1$).
   El valor máximo que toma y es 9 (cuando $x = -3$).
   Por tanto, el valor de y se encuentra desde 1 hasta 9 $(1 \leq y \leq 9)$.



   c. El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).
   El valor máximo que toma y es 4 (cuando $x = -2$).
   Por tanto, el valor de y se encuentra desde 0 hasta 4 $(0 \leq y \leq 4)$.



5. b y c
   (*Explicación*)



   a. b. Cuando $x = -2$,
   $y = -(-2)^2 = -4$
   Cuando $x = -1$,
   $y = -(-1)^2 = -1$
   Entonces, el valor de x aumenta de -4 a -1.
   Por tanto, a no es correcta y b es correcta.
   c. Cuando $x = 0$, $y = 0^2 = 0$.
   Entonces, c es correcta.

6. a.

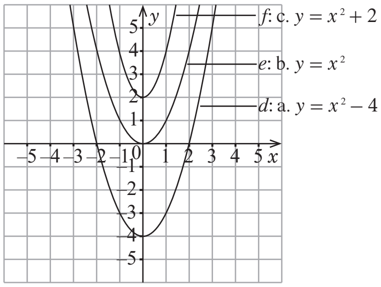
x	0	1	2	3	4
y	0	3	12	27	48

+3 +9 +15 +21

   b. Si $x = 1$, entonces $y = 3$.
   Si $x = 3$, entonces $y = 27$.

c. Razón de cambio: $\frac{27-3}{3-1}=\frac{24}{2}=12$

7.



(*Explicación*)
Al comparar los valores de c en las funciones, la gráfica de $y =- x^2$ pasa por el origen (0, 0), la gráfica de $y = x^2 - 4$ pasa por el punto (0, − 4) y la gráfica de $y = x^2 + 2$ pasa por el punto (0, 2).

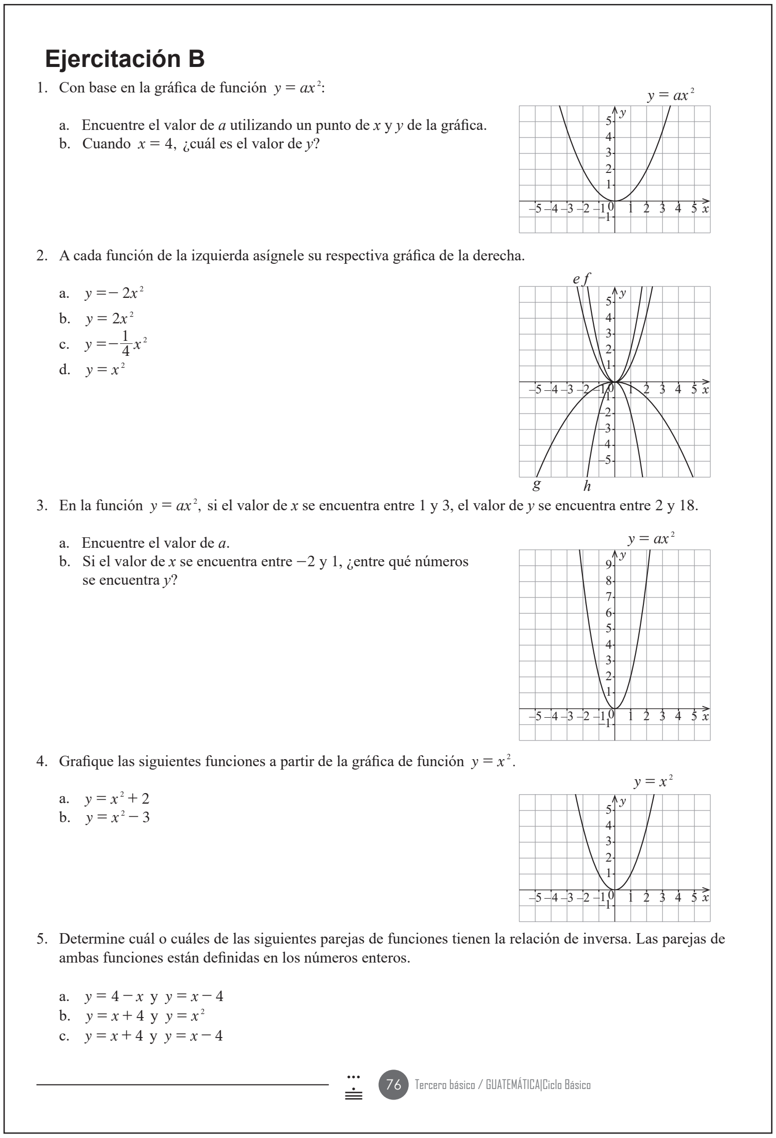
8. a. − 2 y 2 en el dominio tienen la misma imagen. Entonces, no es inyectiva.
Todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio. Entonces, es sobreyectiva.
Por tanto, es sobreyectiva.

b. 1 y 2 en el dominio tienen la misma imagen. Entonces, no es inyectiva.
− 2 y 0 en el contradominio no son imagen de ningún elemento del dominio. Entonces, no es sobreyectiva.
Por tanto, no es inyectiva ni sobreyectiva.

c. Cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio. Entonces, es inyectiva.
15 en el contradominio no es imagen de ningún elemento del dominio. Entonces, no es sobreyectiva.
Por tanto, es inyectiva.

d. Cada uno de los distintos elementos del dominio tiene una sola imagen distinta en el contradominio y todos los elementos del contradominio son imagen de los elementos del dominio.
Entonces, es inyectiva y sobreyectiva.
Por tanto, es biyectiva.

Ejercitación B



Ejercitación B

1. Con base en la gráfica de función $y = ax^2$:

   a. Encuentre el valor de a utilizando un punto de x y y de la gráfica.

   b. Cuando $x = 4$, ¿cuál es el valor de y?

2. A cada función de la izquierda asígnele su respectiva gráfica de la derecha.

   a. $y = -2x^2$

   b. $y = 2x^2$

   c. $y = -\frac{1}{4}x^2$

   d. $y = x^2$

3. En la función $y = ax^2$, si el valor de x se encuentra entre 1 y 3, el valor de y se encuentra entre 2 y 18.

   a. Encuentre el valor de a.

   b. Si el valor de x se encuentra entre −2 y 1, ¿entre qué números se encuentra y?

4. Grafique las siguientes funciones a partir de la gráfica de función $y = x^2$.

   a. $y = x^2 + 2$

   b. $y = x^2 - 3$

5. Determine cuál o cuáles de las siguientes parejas de funciones tienen la relación de inversa. Las parejas de ambas funciones están definidas en los números enteros.

   a. $y = 4 - x$ y $y = x - 4$

   b. $y = x + 4$ y $y = x^2$

   c. $y = x + 4$ y $y = x - 4$

Solucionario:

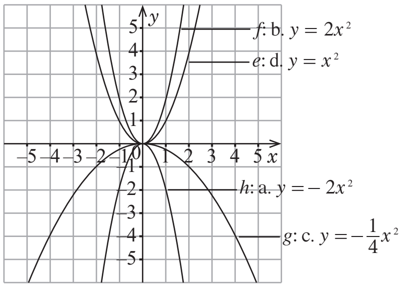
1. a. Se sustituye x por 2 y y por 2 en $y = ax^2$.

$$2 = a \times 2^2$$
$$2 = a \times 4$$
$$2 = 4a$$
$$4a = 2$$
$$a = \frac{2}{4}$$
$$= \frac{1}{2}$$

   b. Se sustituye a por $\frac{1}{2}$ y x por 4 en $y = ax^2$.

$$y = \frac{1}{2} \times 4^2$$
$$= \frac{1}{2} \times 16$$
$$= 8$$

2.



(*Explicación*)

Como los valores de las funciones b y d son positivos, las parábolas de estas gráficas se abren hacia arriba. Comparando 2 y 1, $2 > 1$. Entonces, la gráfica de $y = 2x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = x^2$.
Por tanto, la gráfica f representa la función b. $y = 2x^2$ y la gráfica e representa la gráfica d. $y = x^2$.

Como los valores de las funciones a y c son negativos, las parábolas de estas gráficas se abren hacia abajo. Comparando -2 y $-\frac{1}{4}$, $|-2| = 2$ y $\left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$, $|-2| > \left|-\frac{1}{4}\right|$. Entonces, la gráfica de $y = -2x^2$ es más cerrada que la gráfica de $y = -\frac{1}{4}x^2$.
Por tanto, la gráfica h representa la función a. $y = -2x^2$ y la gráfica g representa la función c. $y = -\frac{1}{4}x^2$.

3. a. Se sustituye x por 1 y y por 2 en $y = ax^2$.

$2 = a \times 1^2$

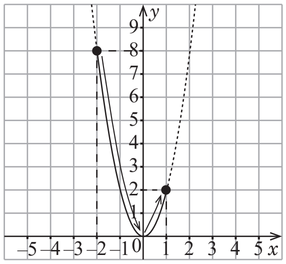
$2 = a \times 1$

$a = 2$

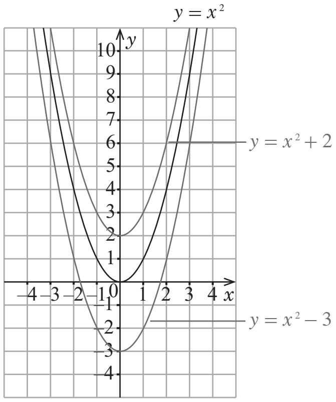
b. El valor mínimo que toma y es 0 (cuando $x = 0$).

El valor máximo que toma y es 8 (cuando $x = -2$).

Por tanto el valor de y se encuentra desde 0 hasta 8 $(0 \leq y \leq 8)$.



4. a. y b.



5. c

(*Explicación*)

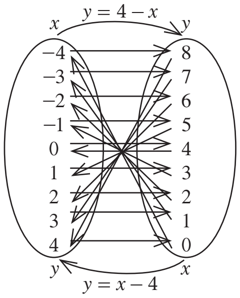
$y = 4 - x$

a.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	8	7	6	5	4	3	2	1	0

$y = x - 4$

x	8	7	6	5	4	3	2	1	0
y	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4



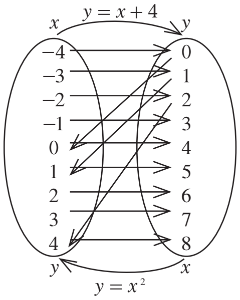
El valor de x, -4, cambia a 8 por la función $y = 4 - x$. Luego, no vuelve a -4 por la función $y = x - 4$.
Entonces, las funciones no tienen una relación inversa.

b. $y = x + 4$

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$y = x^2$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	0	1	4	9	16	25	36	49	64



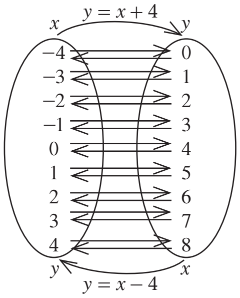
El valor de x, -4, cambia a 0 por la función $y = x + 4$. Luego, no vuelve a 0 por la función $y = x^2$. Entonces, las funciones no tienen una relación inversa.

c. $y = 4 + x$

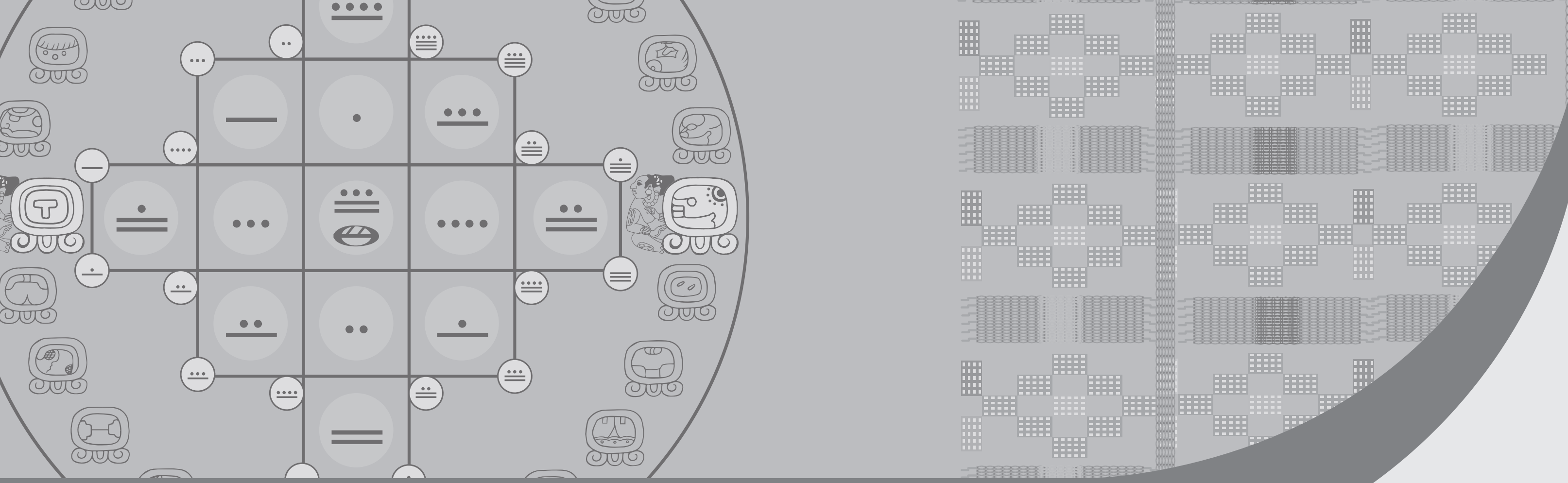
x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y	0	1	2	3	4	5	6	7	8

$y = x - 4$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4



El valor de x, -4, cambia a 0 por la función $y = 4 + x$. Luego, vuelve a -4 por la función $y = x - 4$. Es decir, todos los valores de x cambian por la función $y = 4 + x$, y vuelven a los valores iniciales. Entonces, las funciones tienen una relación inversa.



Unidad 3 •••

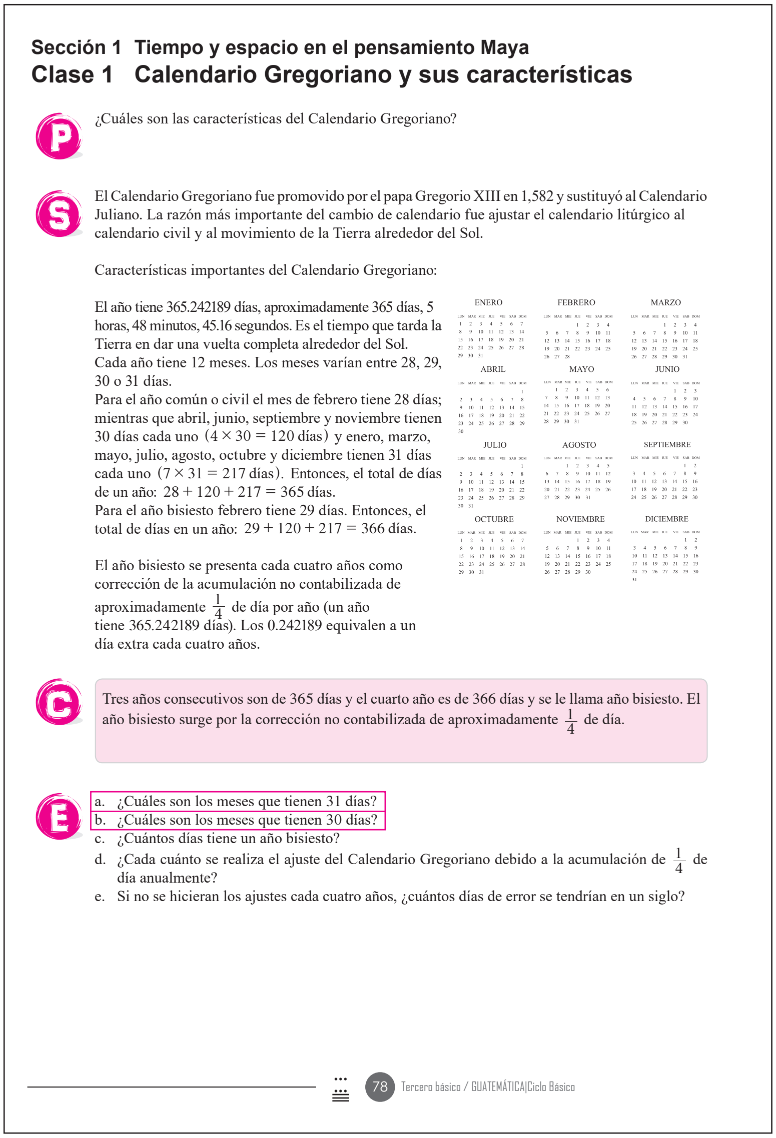
Etnomatemática

Plan de estudio - Unidad 3 Etnomatemática -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
5. Aplica métodos de razonamiento, el lenguaje y la simbología matemática en la interpretación de situaciones de su entorno.	5.2 Interpreta las matemáticas de contexto a partir de su relación con el universo, el tiempo y el espacio.	1. Tiempo y espacio en el pensamiento Maya	1.1 Calendario Gregoriano y sus características	Responde interrogantes de las características del Calendario Gregoriano.
			1.2 Conversión del Calendario Maya Ab' al Calendario Gregoriano y viceversa	Convierte fechas del Calendario Gregoriano al calendario Ab' y viceversa.
			1.3 Cargadores del año Maya y su significación	Identifica el nombre de los cuatro cargadores del año entre los k'iche' y su color correspondiente.
		2. El universo y sus cuadrantes	2.1 Cruz cósmica Maya	Identifica los siete puntos cósmicos en la cruz Maya y sus energías.
			2.2 Planetas y su representación en el pensamiento Maya	Identifica el número de días de los cuatro períodos del movimiento de traslación de Venus. Identifica la relación de ciclos del Cholq'ij y los ciclos de Marte.
	5.3 Usa los patrones relacionados con el pensamiento Maya.	3. Patrones y su significación en el pensamiento Maya	3.1 4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento Maya	Explica el significado de los números 4, 13 y 20 desde el pensamiento Maya.
			3.2 Patrones y mosaicos en la vestimenta Maya	Identifica patrones o relaciones en la vestimenta Maya.
			3.3 Trece energías del Calendario Maya y fecha de nacimiento Maya	Indica si la energía de una fecha es baja, mediana o alta según el coeficiente numérico.
		4. Sistemas numéricos	4.1 Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular	Explica el significado del pensamiento circular y cuadrangular.
	5.1 Determina cantidades del sistema decimal y su relación con otros sistemas de diferentes bases.		4.2 Sistema binario y su naturaleza	Interpreta características del funcionamiento del sistema de numeración binaria.
			4.3 Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa	Transforma números del sistema binario al sistema decimal y viceversa.
			4.4 Sistema binario en las computadoras	Relaciona unidades de almacenamiento de información en las computadoras.
			4.5 Cero como elemento matemático hindú	Describe aspectos importantes del cero hindú.
		5. Sistemas de medición	5.1 Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas	Calcula una medida de área usando unidades de medida de las comunidades Mayas.

Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 1 Calendario Gregoriano y sus características

Aprendizaje esperado:
Responde interrogantes de las características del Calendario Gregoriano.



Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 1 Calendario Gregoriano y sus características

P ¿Cuáles son las características del Calendario Gregoriano?

S El Calendario Gregoriano fue promovido por el papa Gregorio XIII en 1,582 y sustituyó al Calendario Juliano. La razón más importante del cambio de calendario fue ajustar el calendario litúrgico al calendario civil y al movimiento de la Tierra alrededor del Sol.

Características importantes del Calendario Gregoriano:

El año tiene 365.242189 días, aproximadamente 365 días, 5 horas, 48 minutos, 45.16 segundos. Es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa alrededor del Sol.
Cada año tiene 12 meses. Los meses varían entre 28, 29, 30 o 31 días.
Para el año común o civil el mes de febrero tiene 28 días; mientras que abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días cada uno $(4 \times 30 = 120 \text{ días})$ y enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días cada uno $(7 \times 31 = 217 \text{ días})$. Entonces, el total de días de un año: $28 + 120 + 217 = 365$ días.
Para el año bisiesto febrero tiene 29 días. Entonces, el total de días en un año: $29 + 120 + 217 = 366$ días.

El año bisiesto se presenta cada cuatro años como corrección de la acumulación no contabilizada de aproximadamente $\frac{1}{4}$ de día por año (un año tiene 365.242189 días). Los 0.242189 equivalen a un día extra cada cuatro años.

C Tres años consecutivos son de 365 días y el cuarto año es de 366 días y se le llama año bisiesto. El año bisiesto surge por la corrección no contabilizada de aproximadamente $\frac{1}{4}$ de día.

E
a. ¿Cuáles son los meses que tienen 31 días?
b. ¿Cuáles son los meses que tienen 30 días?
c. ¿Cuántos días tiene un año bisiesto?
d. ¿Cada cuánto se realiza el ajuste del Calendario Gregoriano debido a la acumulación de $\frac{1}{4}$ de día anualmente?
e. Si no se hicieran los ajustes cada cuatro años, ¿cuántos días de error se tendrían en un siglo?

78 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre
b. Abril, junio, septiembre y noviembre
c. 366 días
d. Cada cuatro años
e. 24. 2189 días

Fecha: dd – mm – aa
3-1-1 Calendario Gregoriano y sus características

Ⓟ ¿Cuáles son las características del Calendario Gregoriano?

Ⓢ
- Tiene 365.242189 días (365 días, 5 horas, 48 minutos y 45.16 segundos), este es el tiempo que tarda la tierra en dar una vuelta alrededor del sol.
- Tiene 12 meses. Los meses varían entre 28, 29, 30 o 31 días.
- Para el año común febrero tiene 28 días.
  Abril, junio, septiembre y noviembre tienen 30 días.
  Enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre tienen 31 días.
- Para el año bisiesto febrero tiene 29 días y el año 366 días.
  El año bisiesto se presenta cada cuatro años como corrección.

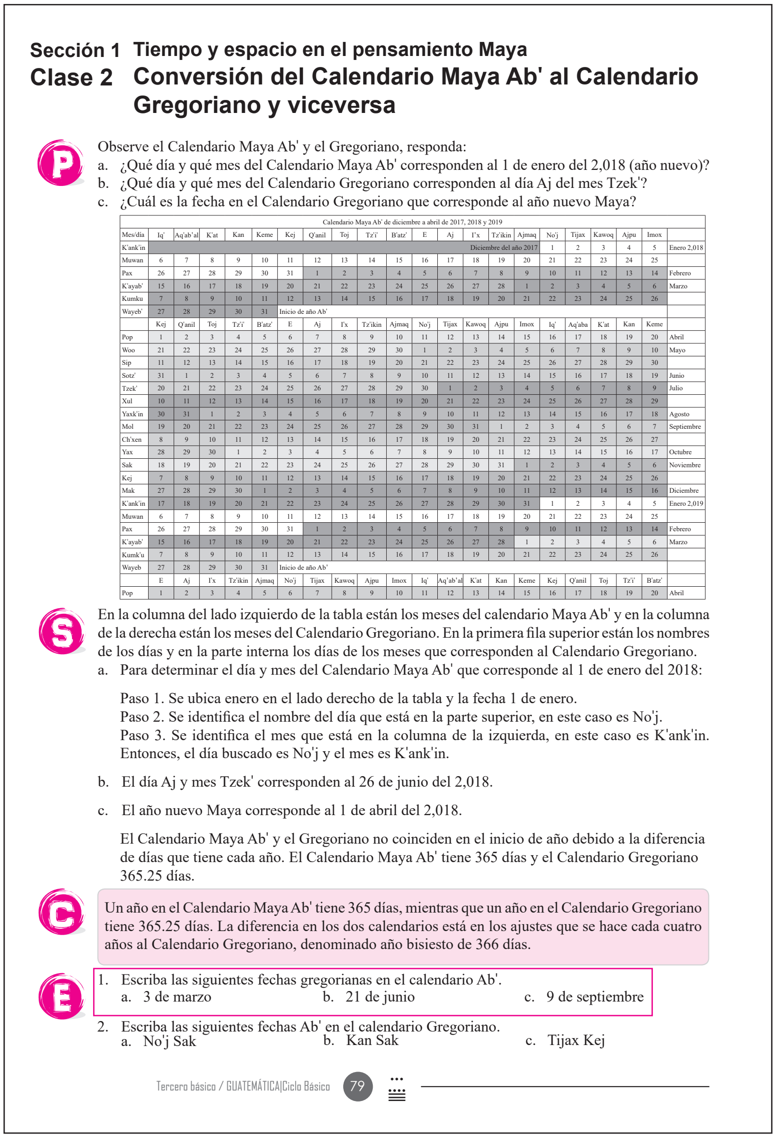
Ⓒ Tres años consecutivos son de 365 días y el cuarto año es de 366 días y se le llama año bisiesto. El año bisiesto surge por la corrección no contabilizada de aproximadamente $\frac{1}{4}$ de días por año.

Ⓔ a. ¿Cuáles son los meses que tienen 31 días?
R: Enero, marzo, mayo, julio, agosto, octubre y diciembre

b. Cuáles son los meses que tienen 30 días?
R: Abril, junio, septiembre y noviembre

Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 2 Conversión del Calendario Maya Ab' al Calendario Gregoriano y viceversa

Aprendizaje esperado:
Convierte fechas del Calendario Gregoriano al calendario Ab' y viceversa.



Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 2 Conversión del Calendario Maya Ab' al Calendario Gregoriano y viceversa

P Observe el Calendario Maya Ab' y el Gregoriano, responda:
a. ¿Qué día y qué mes del Calendario Maya Ab' corresponden al 1 de enero del 2,018 (año nuevo)?
b. ¿Qué día y qué mes del Calendario Gregoriano corresponden al día Aj del mes Tzek'?
c. ¿Cuál es la fecha en el Calendario Gregoriano que corresponde al año nuevo Maya?

Calendario Maya Ab' de diciembre a abril de 2017, 2018 y 2019

Mes/día	Iq'	Aq'ab'al	K'at	Kan	Keme	Kej	Q'anil	Toj	Tz'i'	B'atz'	E	Aj	I'x	Tz'ikin	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	
K'ank'in	Diciembre del año 2017															1	2	3	4	5	Enero 2,018
Muwan	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Pax	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Febrero
K'ayab'	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	1	2	3	4	5	6	Marzo
Kumku	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Wayeb'	27	28	29	30	31	Inicio de año Ab'															
	Kej	Q'anil	Toj	Tz'i'	B'atz'	E	Aj	I'x	Tz'ikin	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	Iq'	Aq'aba	K'at	Kan	Keme	
Pop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Abril
Woo	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Mayo
Sip	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
Sotz'	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	Junio
Tzek'	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Julio
Xul	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	
Yaxk'in	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	Agosto
Mol	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	Septiembre
Ch'xen	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
Yax	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	Octubre
Sak	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	Noviembre
Kej	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Mak	27	28	29	30	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	Diciembre
K'ank'in	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	Enero 2,019
Muwan	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
Pax	26	27	28	29	30	31	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	Febrero
K'ayab'	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	1	2	3	4	5	6	Marzo
Kumk'u	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	
Wayeb	27	28	29	30	31	Inicio de año Ab'															
	E	Aj	I'x	Tz'ikin	Ajmaq	No'j	Tijax	Kawoq	Ajpu	Imox	Iq'	Aq'ab'al	K'at	Kan	Keme	Kej	Q'anil	Toj	Tz'i'	B'atz'	
Pop	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Abril

S En la columna del lado izquierdo de la tabla están los meses del calendario Maya Ab' y en la columna de la derecha están los meses del Calendario Gregoriano. En la primera fila superior están los nombres de los días y en la parte interna los días de los meses que corresponden al Calendario Gregoriano.

a. Para determinar el día y mes del Calendario Maya Ab' que corresponde al 1 de enero del 2018:

Paso 1. Se ubica enero en el lado derecho de la tabla y la fecha 1 de enero.
Paso 2. Se identifica el nombre del día que está en la parte superior, en este caso es No'j.
Paso 3. Se identifica el mes que está en la columna de la izquierda, en este caso es K'ank'in.
Entonces, el día buscado es No'j y el mes es K'ank'in.

b. El día Aj y mes Tzek' corresponden al 26 de junio del 2,018.

c. El año nuevo Maya corresponde al 1 de abril del 2,018.

El Calendario Maya Ab' y el Gregoriano no coinciden en el inicio de año debido a la diferencia de días que tiene cada año. El Calendario Maya Ab' tiene 365 días y el Calendario Gregoriano 365.25 días.

C Un año en el Calendario Maya Ab' tiene 365 días, mientras que un año en el Calendario Gregoriano tiene 365.25 días. La diferencia en los dos calendarios está en los ajustes que se hace cada cuatro años al Calendario Gregoriano, denominado año bisiesto de 366 días.

E
1. Escriba las siguientes fechas gregorianas en el calendario Ab'.
   a. 3 de marzo b. 21 de junio c. 9 de septiembre
2. Escriba las siguientes fechas Ab' en el calendario Gregoriano.
   a. No'j Sak b. Kan Sak c. Tijax Kej

Solucionario de los ejercicios:

1. a. Día Tijax mes K'ayab'
   b. Día Q'anil mes tzek'
   c. Día Q'anil mes Ch'een

2. a. 2 de marzo del 2018
   b. 5 de noviembre del 2018
   c. 18 de noviembre del 2018

Fecha: dd – mm – aa
3-1-2 Conversión del Calendario Maya Ab' al calendario Gregoriano y viceversa

Ⓟ Observe el Calendario Ab' y el Gregoriano, responda:
a. ¿Qué día y qué mes del Calendario Ab' corresponden al 1 de enero del 2018?
b. ¿Qué día y qué mes del Calendario Gregoriano corresponden al día Aj del mes Tzek'?
c. ¿Cuál es la fecha en el Calendario Gregoriano que corresponde al año nuevo Maya?

Ⓢ a. Paso 1. Se ubica enero en el lado derecho de la tabla y la fecha 1 de enero.
Paso 2. Se identifica el nombre del día de la parte superior, en este caso es No'j.
Paso 3. Se identifica el mes que está en la columna izquierda, en este caso es K'ank'in.
R: El día es No'j y el mes es K'ank'in.
b. El día es Aj y mes Tzek' corresponden al 1 de julio de 2018.
c. El año nuevo maya corresponde al día Kej y mes Pop.

Ⓒ Un año en el Calendario Ab' tiene 365 días, mientras que un año en el Calendario Gregoriano tiene 365.25 días.

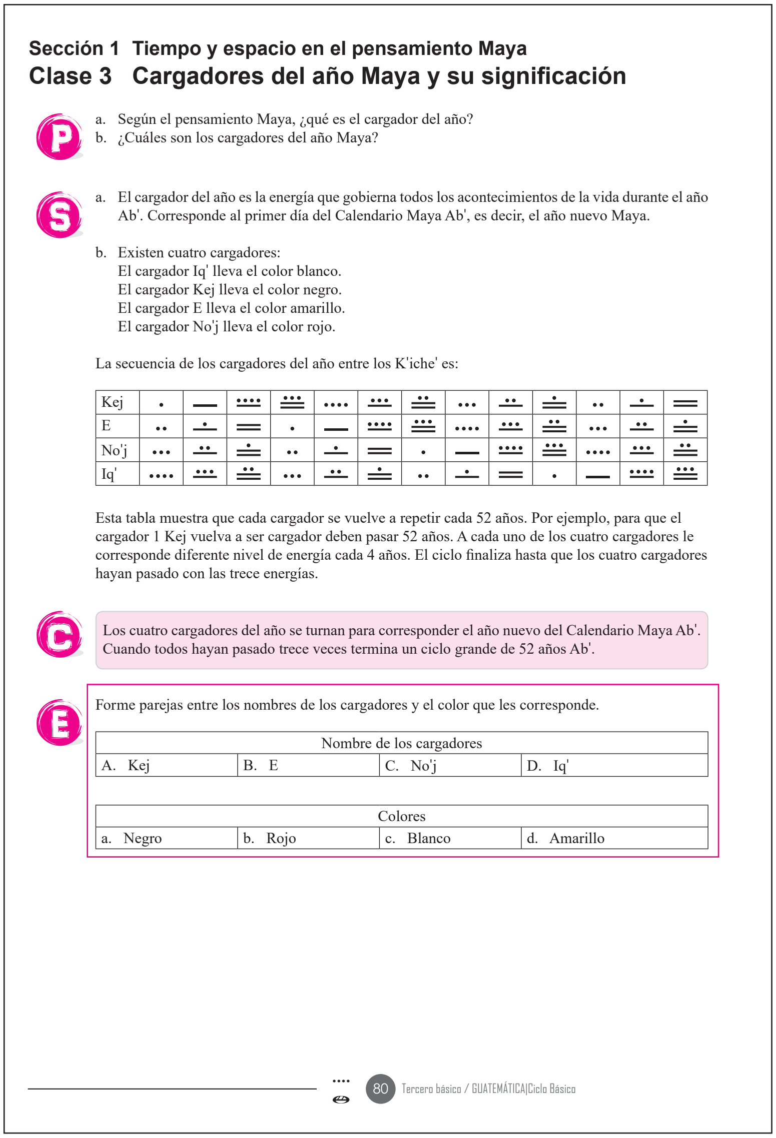
Ⓔ 1. Escriba las siguientes fechas gregorianas en el calendario Ab'.
a. 3 de marzo
R: Día Tijax mes K'ayab'

b. 21 de junio
R: Día Q'anil mes Tzek'

c. 9 de septiembre
R: Día Q'anil mes Ch'een

Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 3 Cargadores del año Maya y su significación

Aprendizaje esperado:
Identifica el nombre de los cuatro cargadores del año entre los k'iche' y su color correspondiente.



Sección 1 Tiempo y espacio en el pensamiento Maya
Clase 3 Cargadores del año Maya y su significación

P
a. Según el pensamiento Maya, ¿qué es el cargador del año?
b. ¿Cuáles son los cargadores del año Maya?

S
a. El cargador del año es la energía que gobierna todos los acontecimientos de la vida durante el año Ab'. Corresponde al primer día del Calendario Maya Ab', es decir, el año nuevo Maya.

b. Existen cuatro cargadores:
El cargador Iq' lleva el color blanco.
El cargador Kej lleva el color negro.
El cargador E lleva el color amarillo.
El cargador No'j lleva el color rojo.

La secuencia de los cargadores del año entre los K'iche' es:

Kej	𝋡	𝋥	𝋩	𝋭	𝋤	𝋨	𝋬	𝋣	𝋧	𝋫	𝋢	𝋦	𝋪
E	𝋢	𝋦	𝋪	𝋡	𝋥	𝋩	𝋭	𝋤	𝋨	𝋬	𝋣	𝋧	𝋫
No'j	𝋣	𝋧	𝋫	𝋢	𝋦	𝋪	𝋡	𝋥	𝋩	𝋭	𝋤	𝋨	𝋬
Iq'	𝋤	𝋨	𝋬	𝋣	𝋧	𝋫	𝋢	𝋦	𝋪	𝋡	𝋥	𝋩	𝋭

Esta tabla muestra que cada cargador se vuelve a repetir cada 52 años. Por ejemplo, para que el cargador 1 Kej vuelva a ser cargador deben pasar 52 años. A cada uno de los cuatro cargadores le corresponde diferente nivel de energía cada 4 años. El ciclo finaliza hasta que los cuatro cargadores hayan pasado con las trece energías.

C
Los cuatro cargadores del año se turnan para corresponder el año nuevo del Calendario Maya Ab'. Cuando todos hayan pasado trece veces termina un ciclo grande de 52 años Ab'.

E
Forme parejas entre los nombres de los cargadores y el color que les corresponde.

Nombre de los cargadores			
A. Kej	B. E	C. No'j	D. Iq'

Colores			
a. Negro	b. Rojo	c. Blanco	d. Amarillo

Solucionario del ejercicio:

A.	Kej	a.	Negro
B.	E	d.	Amarillo
C.	No'j	b.	Rojo
D.	Iq'	c.	Blanco

Fecha: dd – mm – aa
3-1-3 Cargadores del año Maya y su significación

Ⓟ a. Según el pensamiento Maya, ¿qué es el cargador del año?
b. ¿Cuáles son los cargadores del año Maya?

Ⓢ a. El cargador del año es la energía que gobierna todos los acontecimientos de la vida durante el año Ab'. Corresponde al primer día del Calendario Ab', es decir, el año nuevo Maya.

b. Existen cuatro cargadores:
El cargador Iq' lleva el color blanco.
El cargador Kej lleva el color negro.
El cargador E lleva el color amarillo.
El cargador No'j lleva el color rojo.

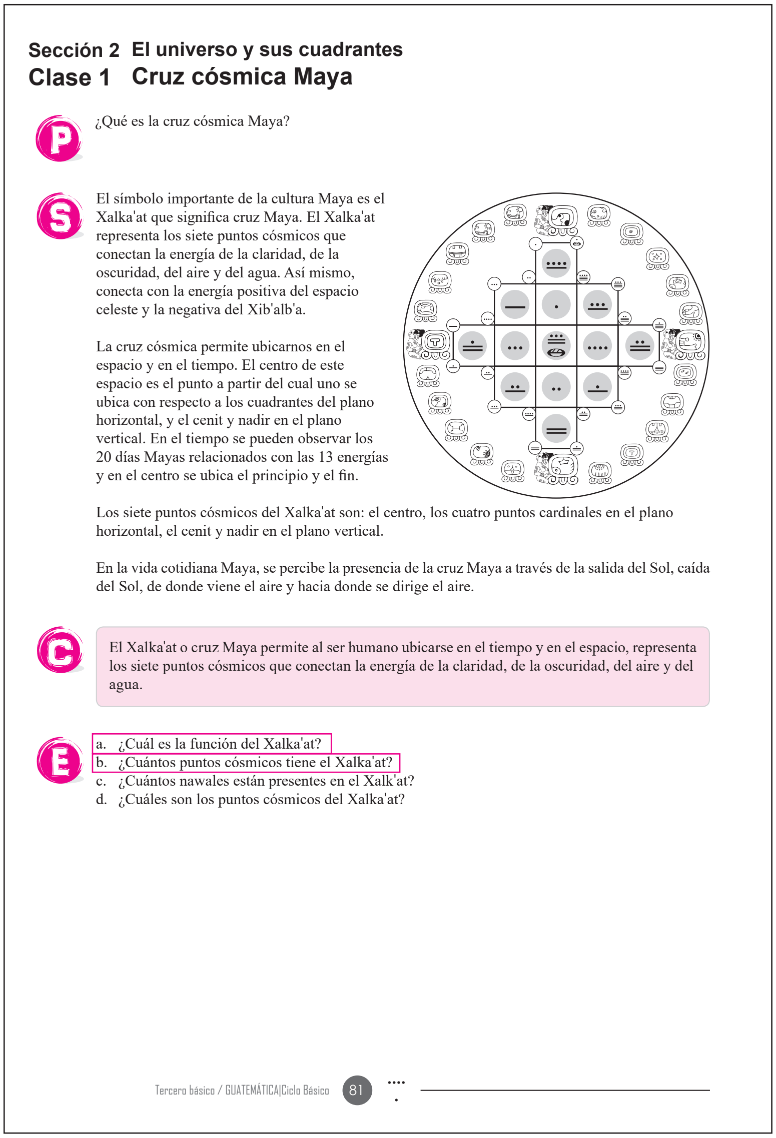
Ⓒ Los cuatro cargadores del año se turnan para corresponder el año nuevo del Calendario Ab'. Cuando todos hayan pasado trece veces termina un ciclo grande de 52 años Ab'.

Ⓔ Forme parejas entre los nombres de los cargadores y el color que les corresponde.

A. Kej	a. Negro
B. E	b. Rojo
C. No'j	c. Blanco
D. Iq'	d. Amarillo

Sección 2 El universo y sus cuadrantes
Clase 1 Cruz cósmica Maya

Aprendizaje esperado:
Identifica los siete puntos cósmicos en la cruz Maya y sus energías.



Sección 2 El universo y sus cuadrantes
Clase 1 Cruz cósmica Maya

P ¿Qué es la cruz cósmica Maya?

S El símbolo importante de la cultura Maya es el Xalka'at que significa cruz Maya. El Xalka'at representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y del agua. Así mismo, conecta con la energía positiva del espacio celeste y la negativa del Xib'alb'a.

La cruz cósmica permite ubicarnos en el espacio y en el tiempo. El centro de este espacio es el punto a partir del cual uno se ubica con respecto a los cuadrantes del plano horizontal, y el cenit y nadir en el plano vertical. En el tiempo se pueden observar los 20 días Mayas relacionados con las 13 energías y en el centro se ubica el principio y el fin.

Los siete puntos cósmicos del Xalka'at son: el centro, los cuatro puntos cardinales en el plano horizontal, el cenit y nadir en el plano vertical.

En la vida cotidiana Maya, se percibe la presencia de la cruz Maya a través de la salida del Sol, caída del Sol, de donde viene el aire y hacia donde se dirige el aire.

C El Xalka'at o cruz Maya permite al ser humano ubicarse en el tiempo y en el espacio, representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y del agua.

E
a. ¿Cuál es la función del Xalka'at?
b. ¿Cuántos puntos cósmicos tiene el Xalka'at?
c. ¿Cuántos nawales están presentes en el Xalk'at?
d. ¿Cuáles son los puntos cósmicos del Xalka'at?

Solucionario de los ejercicios:

a. Permite al ser humano ubicarse en el tiempo y espacio.
b. Representa los siete puntos cósmicos.
c. 20 nawales
d. El centro, los cuatro puntos cardinales en el plano horizontal, el cenit y nadir en el plano vertical

Fecha: dd – mm – aa
3-2-1 Cruz cósmica Maya

Ⓟ ¿Qué es la cruz cósmica Maya?

Ⓢ La cruz cósmica Maya es un símbolo importante de la cultura Maya, también recibe el nombre de Xalka'at.

El Xalka'at representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y del agua. Así mismo, conecta con la energía positiva del espacio celeste y la negativa del Xib'alb'a.

La cruz cósmica permite ubicarnos en el espacio y en el tiempo. El centro de este espacio es el punto a partir del cual uno se ubica con respecto a los cuadrantes del plano horizontal, y el cenit y nadir en el plano vertical.

Los siete puntos cósmicos del Xalka'at son: el centro, los cuatro puntos cardinales en el plano horizontal, el cenit y nadir en el plano vertical.

Ⓒ El Xalka'at o cruz Maya permite al ser humano ubicarse en el tiempo y en el espacio, representa los siete puntos cósmicos que conectan la energía de la claridad, de la oscuridad, del aire y el agua.

Ⓔ a. ¿Cuál es la función del Xalka'at?

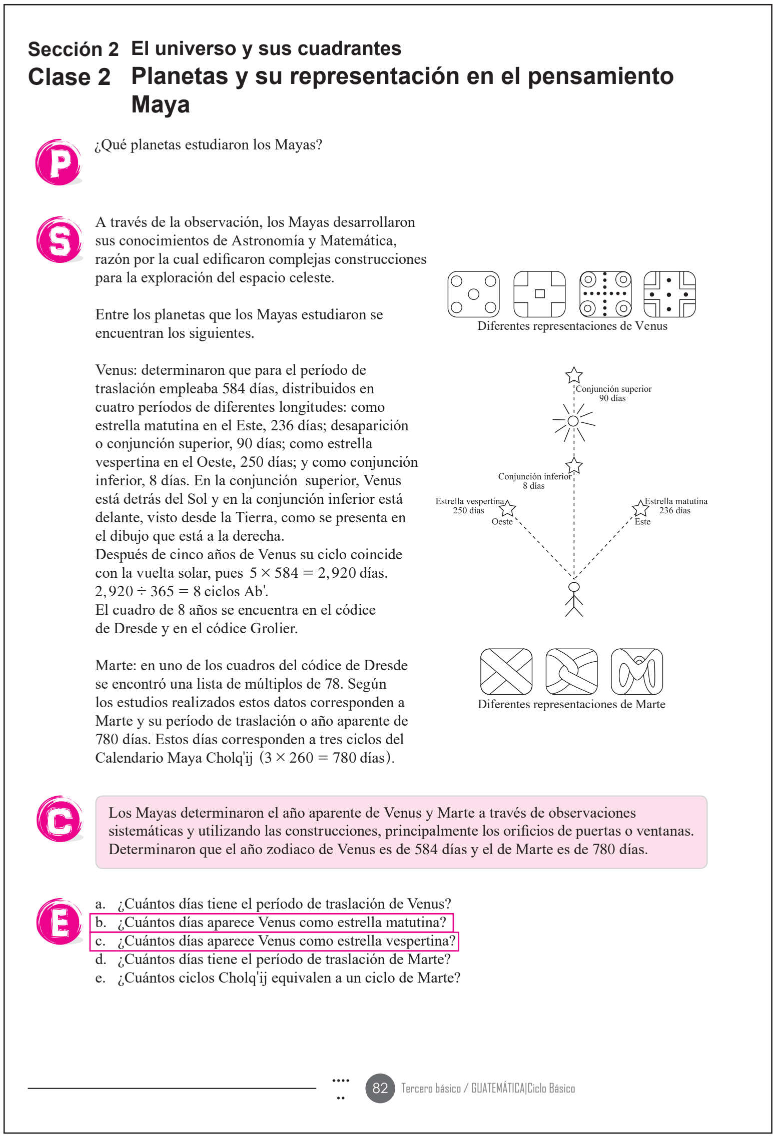
R: Permite al ser humano ubicarse en el tiempo y en el espacio.

b. ¿Cuántos puntos cósmicos tiene el Xalka'at?

R: Representa los siete puntos cósmicos.

Sección 2 El universo y sus cuadrantes
Clase 2 Planetas y su representación en el pensamiento Maya

Aprendizaje esperado:
Identifica el número de días de los cuatro períodos del movimiento de traslación de Venus.
Identifica la relación de ciclos del Cholq'ij y los ciclos de Marte.



Sección 2 **El universo y sus cuadrantes**
Clase 2 **Planetas y su representación en el pensamiento Maya**

P ¿Qué planetas estudiaron los Mayas?

S A través de la observación, los Mayas desarrollaron sus conocimientos de Astronomía y Matemática, razón por la cual edificaron complejas construcciones para la exploración del espacio celeste.

Entre los planetas que los Mayas estudiaron se encuentran los siguientes.

Diferentes representaciones de Venus

Venus: determinaron que para el período de traslación empleaba 584 días, distribuidos en cuatro períodos de diferentes longitudes: como estrella matutina en el Este, 236 días; desaparición o conjunción superior, 90 días; como estrella vespertina en el Oeste, 250 días; y como conjunción inferior, 8 días. En la conjunción superior, Venus está detrás del Sol y en la conjunción inferior está delante, visto desde la Tierra, como se presenta en el dibujo que está a la derecha.
Después de cinco años de Venus su ciclo coincide con la vuelta solar, pues $5 \times 584 = 2,920$ días.
$2,920 \div 365 = 8$ ciclos Ab'.
El cuadro de 8 años se encuentra en el códice de Dresde y en el códice Grolier.

Marte: en uno de los cuadros del códice de Dresde se encontró una lista de múltiplos de 78. Según los estudios realizados estos datos corresponden a Marte y su período de traslación o año aparente de 780 días. Estos días corresponden a tres ciclos del Calendario Maya Cholq'ij ($3 \times 260 = 780$ días).

Diferentes representaciones de Marte

C Los Mayas determinaron el año aparente de Venus y Marte a través de observaciones sistemáticas y utilizando las construcciones, principalmente los orificios de puertas o ventanas. Determinaron que el año zodiaco de Venus es de 584 días y el de Marte es de 780 días.

E
a. ¿Cuántos días tiene el período de traslación de Venus?
b. ¿Cuántos días aparece Venus como estrella matutina?
c. ¿Cuántos días aparece Venus como estrella vespertina?
d. ¿Cuántos días tiene el período de traslación de Marte?
e. ¿Cuántos ciclos Cholq'ij equivalen a un ciclo de Marte?

82 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. 584 días
b. 236 días
c. 250 días
d. 780 días
e. 3 ciclos

Fecha: dd – mm – aa
3-2-2 Planetas y su representación en el pensamiento Maya

Ⓟ ¿Qué planetas estudiaron los Mayas?

Ⓢ Los Mayas estudiaron los siguientes planetas:

Venus: determinaron que para el período de traslación empleaba 584 días, distribuidos en cuatro períodos de diferentes longitudes: como estrella matutina en el Este, 236 días; desaparición o conjunción superior, 90 días; como estrella vespertina en el Oeste, 250 días; y como conjunción inferior, 8 días.

Después de cinco años de Venus su ciclo coincide con la vuelta solar, pues $5 \times 584 = 2,920$ días y $2,920 \div 365 = 8$ ciclos Ab'.

Marte: determinaron que para el período de traslación empleaba 780 días. Los 780 días corresponden a tres ciclos del Calendario Cholq'ij, pues $3 \times 260 = 780$ días.

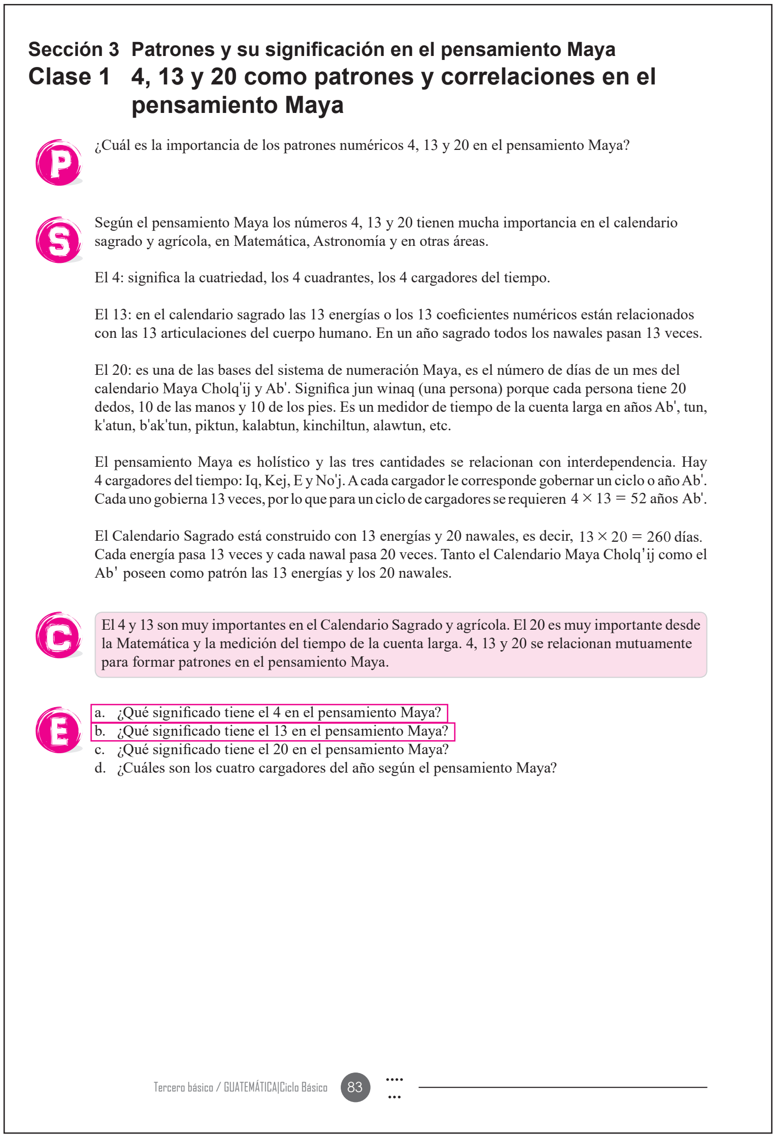
Ⓒ Los Mayas determinaron el año aparente de Venus y Marte a través de observaciones sistemáticas y utilizando las construcciones.

Ⓔ b. ¿Cuántos días aparece Venus como estrella matutina?
R: 236 días

c. ¿Cuántos días aparece Venus como estrella vespertina?
R: 250 días

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento Maya
Clase 1 4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento Maya

Aprendizaje esperado:
Explica el significado de los números 4, 13 y 20 desde el pensamiento Maya.



Sección 3 **Patrones y su significación en el pensamiento Maya**
Clase 1 **4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento Maya**

Ⓟ ¿Cuál es la importancia de los patrones numéricos 4, 13 y 20 en el pensamiento Maya?

Ⓢ Según el pensamiento Maya los números 4, 13 y 20 tienen mucha importancia en el calendario sagrado y agrícola, en Matemática, Astronomía y en otras áreas.

El 4: significa la cuatriedad, los 4 cuadrantes, los 4 cargadores del tiempo.

El 13: en el calendario sagrado las 13 energías o los 13 coeficientes numéricos están relacionados con las 13 articulaciones del cuerpo humano. En un año sagrado todos los nawales pasan 13 veces.

El 20: es una de las bases del sistema de numeración Maya, es el número de días de un mes del calendario Maya Cholq'ij y Ab'. Significa jun winaq (una persona) porque cada persona tiene 20 dedos, 10 de las manos y 10 de los pies. Es un medidor de tiempo de la cuenta larga en años Ab', tun, k'atun, b'ak'tun, piktun, kalabtun, kinchiltun, alawtun, etc.

El pensamiento Maya es holístico y las tres cantidades se relacionan con interdependencia. Hay 4 cargadores del tiempo: Iq, Kej, E y No'j. A cada cargador le corresponde gobernar un ciclo o año Ab'. Cada uno gobierna 13 veces, por lo que para un ciclo de cargadores se requieren 4 × 13 = 52 años Ab'.

El Calendario Sagrado está construido con 13 energías y 20 nawales, es decir, 13 × 20 = 260 días. Cada energía pasa 13 veces y cada nawal pasa 20 veces. Tanto el Calendario Maya Cholq'ij como el Ab' poseen como patrón las 13 energías y los 20 nawales.

Ⓒ El 4 y 13 son muy importantes en el Calendario Sagrado y agrícola. El 20 es muy importante desde la Matemática y la medición del tiempo de la cuenta larga. 4, 13 y 20 se relacionan mutuamente para formar patrones en el pensamiento Maya.

Ⓔ
a. ¿Qué significado tiene el 4 en el pensamiento Maya?
b. ¿Qué significado tiene el 13 en el pensamiento Maya?
c. ¿Qué significado tiene el 20 en el pensamiento Maya?
d. ¿Cuáles son los cuatro cargadores del año según el pensamiento Maya?

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 83

Solucionario de los ejercicios:

a. Significa la cuatriedad, 4 cuadrantes y los 4 cargadores.
b. Significa las 13 energías y 13 articulaciones.
c. Es una de las bases del sistema de numeración Maya.
d. Iq, Kej, E y No'j

Fecha: dd – mm – aa
3-3-1 4, 13 y 20 como patrones y correlaciones en el pensamiento Maya

Ⓟ ¿Cuál es la importancia de los patrones numéricos 4, 13 y 20 en el pensamiento Maya?

Ⓢ Los significados de los números 4, 13 y 20 tienen mucha importancia en el pensamiento Maya:

El 4: significa la cuatriedad, los 4 cuadrantes y los 4 cargadores el tiempo.
El 13: significa las 13 energías que están relacionadas con las 13 articulaciones del cuerpo humano.
El 20: significa jun winaq (una persona) porque cada persona tiene 20 dedos, 10 de las manos y 10 de los pies. Es la base del sistema vigesimal y es el número de días de un mes del calendario Cholq'ij y Ab'.

El pensamiento Maya es holístico y los tres números se relacionan con interdependencia. Hay 4 cargadores y cada uno gobierna 13 veces, por lo que para un ciclo de cargadores se requieren 4 × 13 = 52 años Ab'. El calendario sagrado se forma de 13 energías y 20 nawales, es decir 13 × 20 = 260 días.

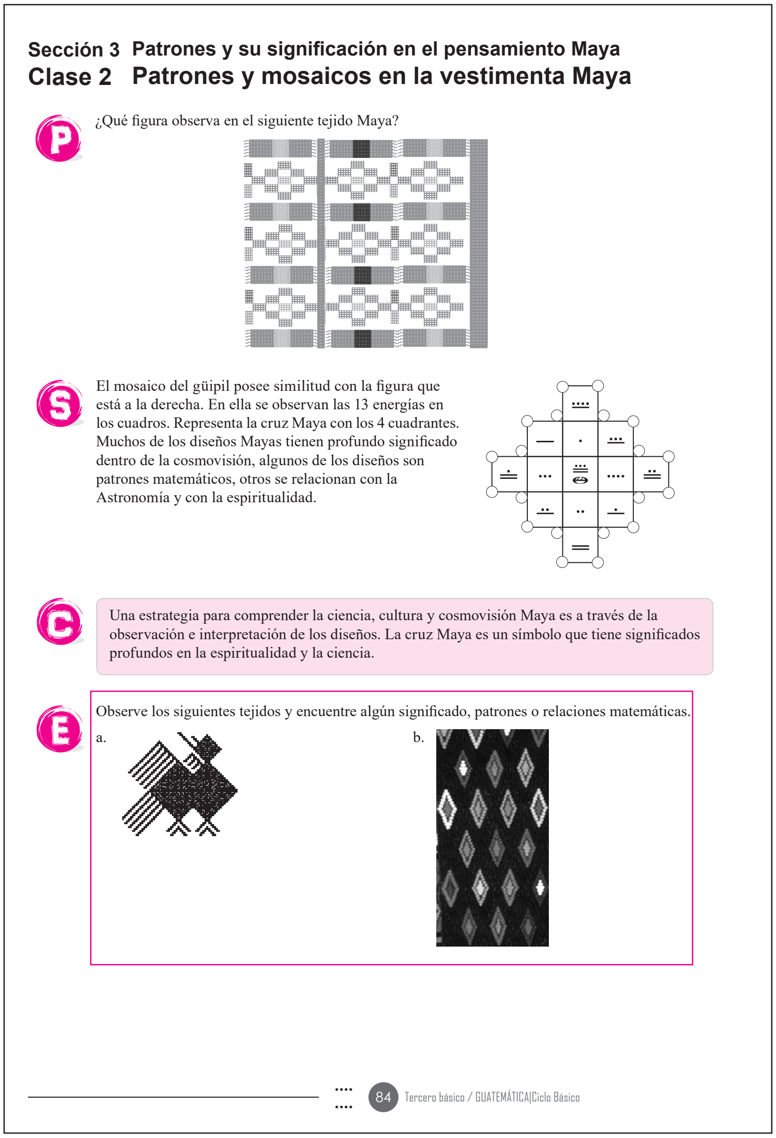
Ⓒ El 4 y 13 son muy importantes en el calendario sagrado y agrícola. El 20 adquiere su importancia desde la matemática y la medición del tiempo de la cuenta larga.

Ⓔ Responda.
a. ¿Qué significado tiene el 4 en el pensamiento Maya?
R: Significa la cuatriedad, los 4 cuadrantes y los 4 cargadores.

b. ¿Qué significado tiene el 13 en el pensamiento Maya?
R: Significa las 13 energías y las 13 articulaciones.

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento Maya
Clase 2 Patrones y mosaicos en la vestimenta Maya

Aprendizaje esperado:
Identifica patrones o relaciones en la vestimenta Maya.



Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento Maya
Clase 2 Patrones y mosaicos en la vestimenta Maya

P ¿Qué figura observa en el siguiente tejido Maya?

S El mosaico del güipil posee similitud con la figura que está a la derecha. En ella se observan las 13 energías en los cuadros. Representa la cruz Maya con los 4 cuadrantes. Muchos de los diseños Mayas tienen profundo significado dentro de la cosmovisión, algunos de los diseños son patrones matemáticos, otros se relacionan con la Astronomía y con la espiritualidad.

C Una estrategia para comprender la ciencia, cultura y cosmovisión Maya es a través de la observación e interpretación de los diseños. La cruz Maya es un símbolo que tiene significados profundos en la espiritualidad y la ciencia.

E Observe los siguientes tejidos y encuentre algún significado, patrones o relaciones matemáticas.

a.

b.

84 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

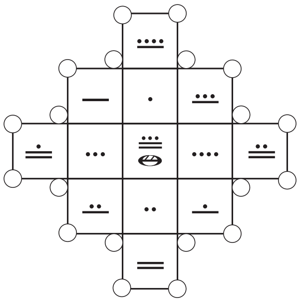
Solucionario del ejercicio:

a. En la figura se observan líneas rectas y figuras cuadradas que se han colocado y distribuido armoniosamente para obtener el diseño.
b. En la figura se observa un diseño de rombos que forman un patrón geométrico.

Fecha: dd – mm – aa
3-3-2 Patrones y mosaicos en la vestimenta Maya

Ⓟ ¿Qué figura observa en el tejido Maya?

Ⓢ



El mosaico del güipil posee una similitud con la figura. En ella se observan las 13 energías y los 4 cuadrantes y que constituyen la cruz Maya. Muchos diseños de los tejidos Mayas tienen profundo significado dentro de la cosmovisión, algunos son patrones matemáticos y otros se relacionan con la astronomía y con la espiritualidad.

Ⓒ Una estrategia para comprender la ciencia, la cultura y cosmovisión Maya es a través de la observación e interpretación de los diseños.

Ⓔ Observe la figura del tejido y encuentre algún significado, patrones o relaciones matemáticas.

a.

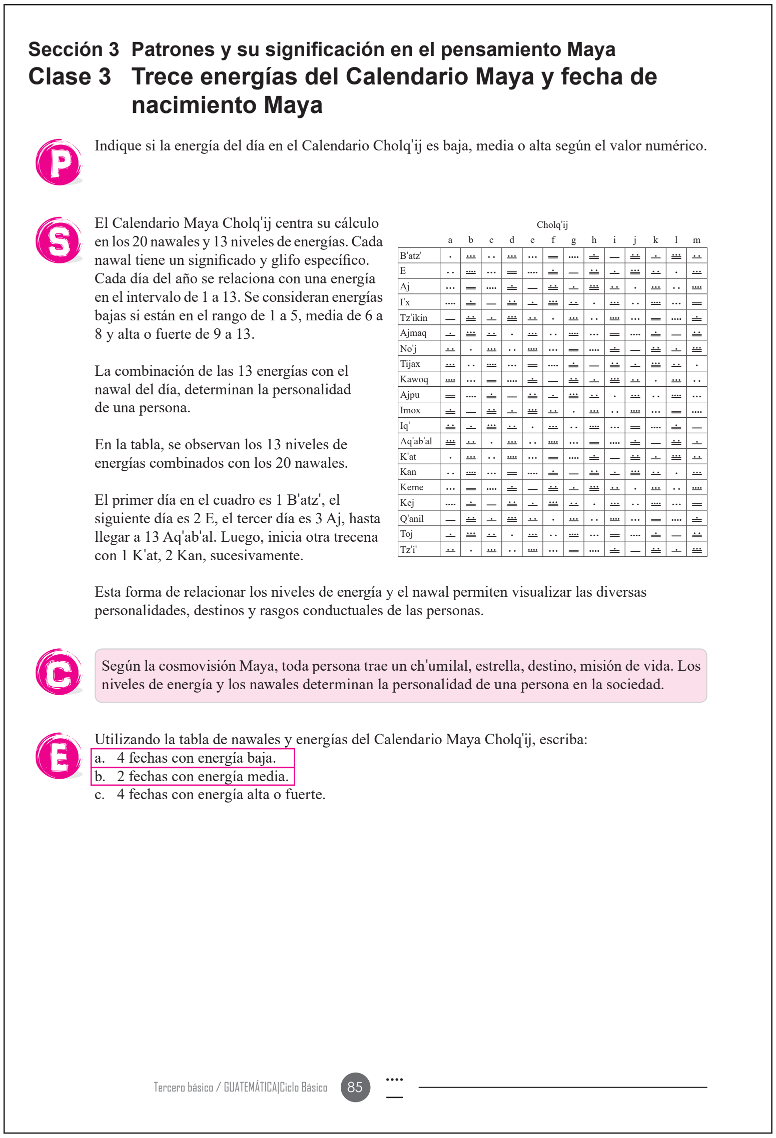
R: Se observan líneas rectas y figuras cuadradas que se han colocado y distribuido armoniosamente para obtener el diseño.

b.

R: Se observa un diseño de rombos que forman un patrón geométrico.

Sección 3 Patrones y su significación en el pensamiento Maya
Clase 3 Trece energías del Calendario Maya y fecha de nacimiento Maya

Aprendizaje esperado:
Indica si la energía de una fecha es baja, mediana o alta según el coeficiente numérico.



Sección 3 **Patrones y su significación en el pensamiento Maya**
Clase 3 **Trece energías del Calendario Maya y fecha de nacimiento Maya**

P Indique si la energía del día en el Calendario Cholq'ij es baja, media o alta según el valor numérico.

S El Calendario Maya Cholq'ij centra su cálculo en los 20 nawales y 13 niveles de energías. Cada nawal tiene un significado y glifo específico. Cada día del año se relaciona con una energía en el intervalo de 1 a 13. Se consideran energías bajas si están en el rango de 1 a 5, media de 6 a 8 y alta o fuerte de 9 a 13.

La combinación de las 13 energías con el nawal del día, determinan la personalidad de una persona.

En la tabla, se observan los 13 niveles de energías combinados con los 20 nawales.

El primer día en el cuadro es 1 B'atz', el siguiente día es 2 E, el tercer día es 3 Aj, hasta llegar a 13 Aq'ab'al. Luego, inicia otra trecena con 1 K'at, 2 Kan, sucesivamente.

Esta forma de relacionar los niveles de energía y el nawal permiten visualizar las diversas personalidades, destinos y rasgos conductuales de las personas.

C Según la cosmovisión Maya, toda persona trae un ch'umilal, estrella, destino, misión de vida. Los niveles de energía y los nawales determinan la personalidad de una persona en la sociedad.

E Utilizando la tabla de nawales y energías del Calendario Maya Cholq'ij, escriba:
a. 4 fechas con energía baja.
b. 2 fechas con energía media.
c. 4 fechas con energía alta o fuerte.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 85

Solucionario de los ejercicios:

a. Ejemplo:
1 B'atz', 2 E, 3 Aj, 4 I'x
b. Ejemplo:
6 Ajmaq, 7 No'j
c. Ejemplo:
9 Kawoq, 10 Ajpu, 11 Imox, 12 Iq'

Fecha: dd – mm – aa
3-3-3 Trece energías del Calendario Maya y fecha de nacimiento Maya

Ⓟ Indique si la energía del día en el Calendario Cholq'ij es baja, media o alta según el valor numérico.

Ⓢ Cada día del año del Calendario Cholq'ij se relaciona con una energía en el intervalo de 1 a 13. Se consideran energías bajas si están en el rango de 1 a 5, media de 6 a 8 y alta de 9 a 13.

La combinación de las 13 energías con el nawal del día, determinan la personalidad de una persona.

El primer día en el cuadro es 1 B'atz', el siguiente día es 2 E, el tercer día es 3 Aj, hasta llegar a 13 Aq'ab'al. Luego, inicia otra trecena con 1 K'at, 2 Kan, sucesivamente.

Ⓒ Según la cosmovisión Maya, toda persona trae un ch'umilal, estrella, destino, misión de vida. Los niveles de energía y los nawales determinan la personalidad de una persona en la sociedad.

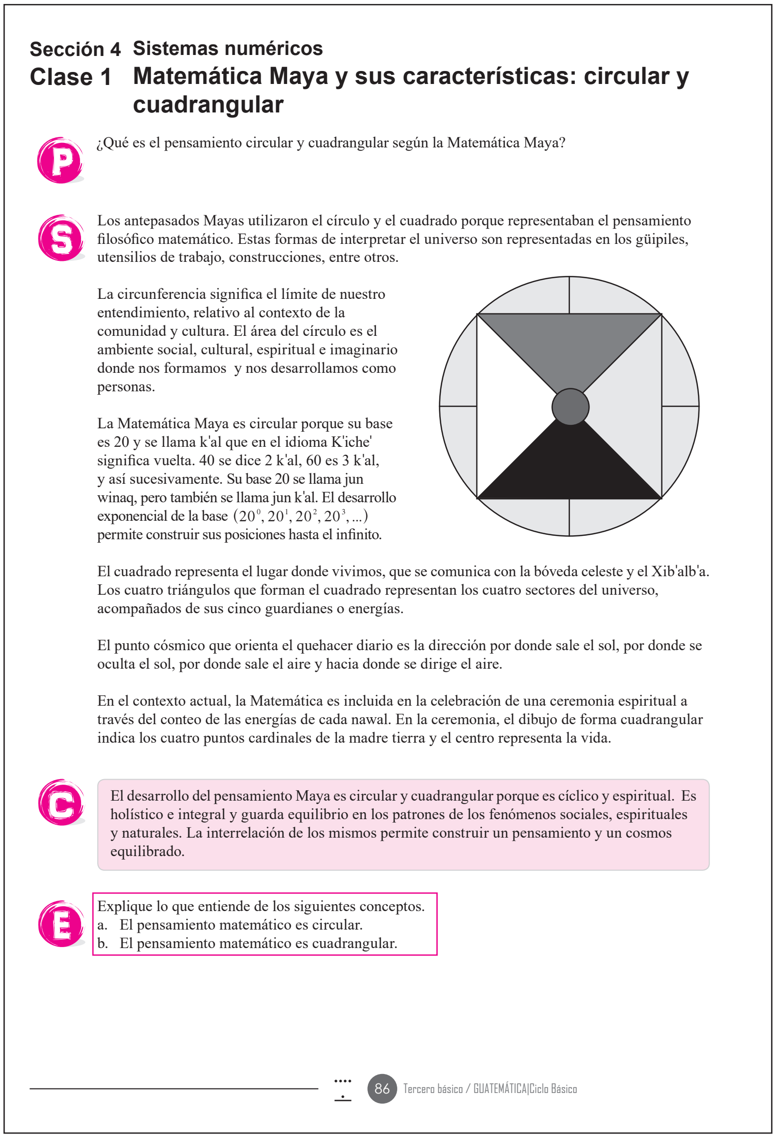
Ⓔ Utilizando la tabla de nawales y energías del Calendario Maya Cholq'ij, escriba:
a. 4 fechas con energía baja
R: 1 B'atz', 2 E, 3 Aj, 4 I'x

b. 2 fechas con energía media
R: 6 Ajmaq, 7 No'j

Sección 4 Sistemas numéricos

Clase 1 Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular

Aprendizaje esperado:
Explica el significado del pensamiento circular y cuadrangular.



Sección 4 **Sistemas numéricos**

Clase 1 **Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular**

P ¿Qué es el pensamiento circular y cuadrangular según la Matemática Maya?

S Los antepasados Mayas utilizaron el círculo y el cuadrado porque representaban el pensamiento filosófico matemático. Estas formas de interpretar el universo son representadas en los güipiles, utensilios de trabajo, construcciones, entre otros.

La circunferencia significa el límite de nuestro entendimiento, relativo al contexto de la comunidad y cultura. El área del círculo es el ambiente social, cultural, espiritual e imaginario donde nos formamos y nos desarrollamos como personas.

La Matemática Maya es circular porque su base es 20 y se llama k'al que en el idioma K'iche' significa vuelta. 40 se dice 2 k'al, 60 es 3 k'al, y así sucesivamente. Su base 20 se llama jun winaq, pero también se llama jun k'al. El desarrollo exponencial de la base $(20^0, 20^1, 20^2, 20^3, ...)$ permite construir sus posiciones hasta el infinito.

El cuadrado representa el lugar donde vivimos, que se comunica con la bóveda celeste y el Xib'alb'a. Los cuatro triángulos que forman el cuadrado representan los cuatro sectores del universo, acompañados de sus cinco guardianes o energías.

El punto cósmico que orienta el quehacer diario es la dirección por donde sale el sol, por donde se oculta el sol, por donde sale el aire y hacia donde se dirige el aire.

En el contexto actual, la Matemática es incluida en la celebración de una ceremonia espiritual a través del conteo de las energías de cada nawal. En la ceremonia, el dibujo de forma cuadrangular indica los cuatro puntos cardinales de la madre tierra y el centro representa la vida.

C El desarrollo del pensamiento Maya es circular y cuadrangular porque es cíclico y espiritual. Es holístico e integral y guarda equilibrio en los patrones de los fenómenos sociales, espirituales y naturales. La interrelación de los mismos permite construir un pensamiento y un cosmos equilibrado.

E Explique lo que entiende de los siguientes conceptos.
a. El pensamiento matemático es circular.
b. El pensamiento matemático es cuadrangular.

86 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Es circular porque su base es 20 y se llama K'al.
b. Es cuadrangular por los cuatro triángulos que forman el cuadrado que representa los cuatro sectores del universo.
c. Es holística porque es una red de conocimientos y saberes que difícilmente podrían estar desvinculados de la comprensión de los fenómenos naturales y sociales.
d. Es espiritual porque es incluida en la celebración de una ceremonia espiritual a través del conteo de la energías de cada nawal.

Fecha: dd – mm – aa
3-4-1 Matemática Maya y sus características: circular y cuadrangular

Ⓟ ¿Qué es el pensamiento circular y cuadrangular según la Matemática Maya?

Ⓢ Según el pensamiento Maya, la circunferencia significa el límite de nuestro entendimiento del contexto y cultura, el área del círculo el ambiente social, cultural, espiritual e imaginario. La Matemática Maya es circular porque su base es 20 y se llama k'al que en idioma K'iche' significa vuelta.

El cuadrado representa el lugar donde vivimos. Los cuatro triángulos que forman el cuadrado representan los cuatro sectores del universo. El punto cósmico que orienta el quehacer diario es la dirección por donde sale el sol, por donde se oculta el sol, por donde sale el aire y hacia donde se dirige el aire.

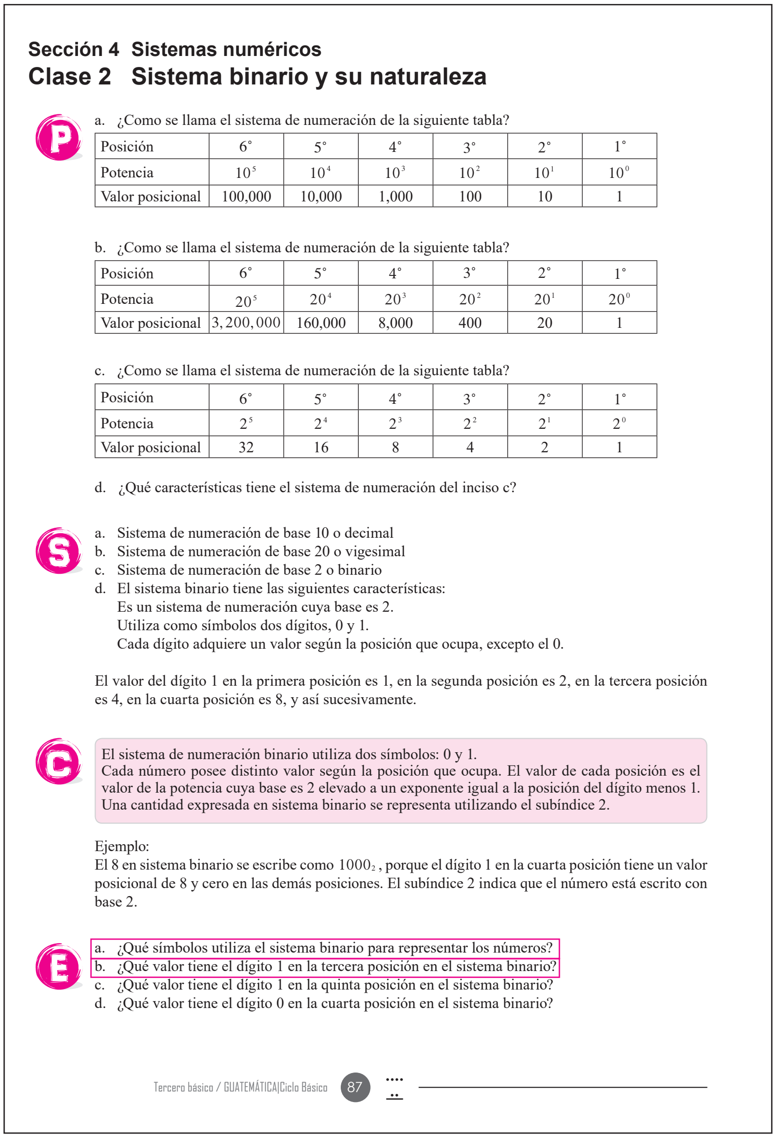
Ⓒ El desarrollo del pensamiento Maya es circular y cuadrangular porque es cíclico y espiritual. Es holístico e integral y guarda relación con los fenómenos sociales, espirituales y naturales.

Ⓔ Explique los conceptos.
a. El pensamiento matemático es circular.
R: Es circular porque su base es 20 y se llama K'al.

b. El pensamiento matemático es cuadrangular.
R: Es cuadrangular por los cuatro triángulos que forman el cuadrado que representa los cuatro sectores del universo.

Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 2 Sistema binario y su naturaleza

Aprendizaje esperado:
Interpreta características del funcionamiento del sistema de numeración binaria.



Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 2 Sistema binario y su naturaleza

P

a. ¿Como se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Valor posicional	100,000	10,000	1,000	100	10	1

b. ¿Como se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	20^5	20^4	20^3	20^2	20^1	20^0
Valor posicional	3, 200, 000	160,000	8,000	400	20	1

c. ¿Como se llama el sistema de numeración de la siguiente tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

d. ¿Qué características tiene el sistema de numeración del inciso c?

S

a. Sistema de numeración de base 10 o decimal
b. Sistema de numeración de base 20 o vigesimal
c. Sistema de numeración de base 2 o binario
d. El sistema binario tiene las siguientes características:
Es un sistema de numeración cuya base es 2.
Utiliza como símbolos dos dígitos, 0 y 1.
Cada dígito adquiere un valor según la posición que ocupa, excepto el 0.

El valor del dígito 1 en la primera posición es 1, en la segunda posición es 2, en la tercera posición es 4, en la cuarta posición es 8, y así sucesivamente.

C

El sistema de numeración binario utiliza dos símbolos: 0 y 1.
Cada número posee distinto valor según la posición que ocupa. El valor de cada posición es el valor de la potencia cuya base es 2 elevado a un exponente igual a la posición del dígito menos 1.
Una cantidad expresada en sistema binario se representa utilizando el subíndice 2.

Ejemplo:
El 8 en sistema binario se escribe como 1000_2, porque el dígito 1 en la cuarta posición tiene un valor posicional de 8 y cero en las demás posiciones. El subíndice 2 indica que el número está escrito con base 2.

E

a. ¿Qué símbolos utiliza el sistema binario para representar los números?
b. ¿Qué valor tiene el dígito 1 en la tercera posición en el sistema binario?
c. ¿Qué valor tiene el dígito 1 en la quinta posición en el sistema binario?
d. ¿Qué valor tiene el dígito 0 en la cuarta posición en el sistema binario?

Solucionario de los ejercicios:

a. 0 y 1
b. 4
c. 16
d. 0

Fecha: dd – mm – aa
3-4-2 Sistema binario y su naturaleza

Ⓟ a. ¿Cómo se llama el sistema de numeración de la tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
Valor posicional	100,000	10,000	1,000	100	10	1

b. ¿Cómo se llama el sistema de numeración de la tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	20^5	20^4	20^3	20^2	20^1	20^0
Valor posicional	3, 200, 000	160,000	8,000	400	20	1

c. ¿Cómo se llama el sistema el sistema de numeración de la tabla?

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

d. ¿Qué características tiene el sistema de numeración del inciso c?

Ⓢ a. Sistema de numeración de base 10 o decimal
b. Sistema de numeración de base 20 o vigesimal
c. Sistema de numeración de base 2 o binario
d. El sistema binario tiene las siguientes características:
Es un sistema de numeración cuya base es 2.
Utiliza como símbolos dos dígitos: 1 y 3. Cada dígito adquiere un valor, según la posición que ocupa excepto el 0.

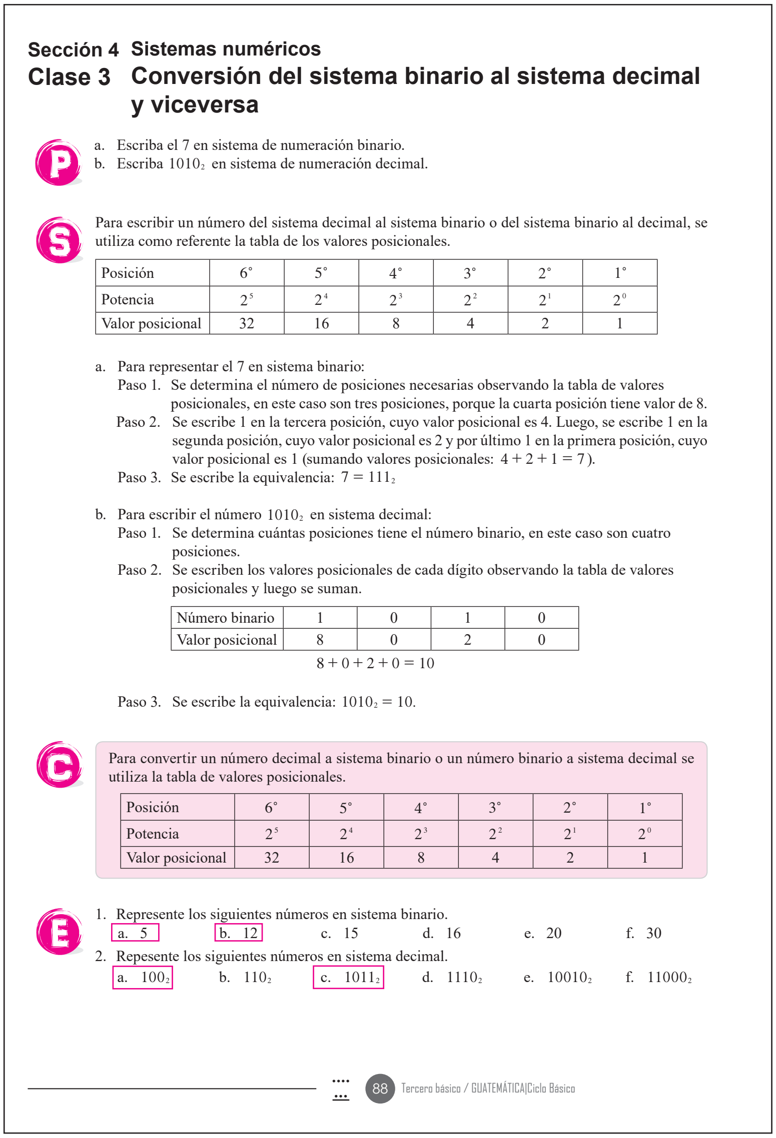
Ⓒ El sistema de numeración binario utiliza dos símbolos: 0 y 1. El valor de cada posición es el valor de la potencia cuya base es 2 elevado a un exponente igual a la posición del dígito menos 1.

Ejemplo:
El 8 en sistema binario se escribe 1000_2 porque el dígito 1 en la cuarta posición tiene un valor posicional de 8 y 0 en las demás posiciones.

Ⓔ a. ¿Qué símbolos utiliza el sistema binario para representar un número?
R: 0 y 1
b. ¿Qué valor tiene el dígito 1 en la tercera posición en el sistema binario?
R: 4

Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 3 Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa

Aprendizaje esperado:
Transforma números del sistema binario al sistema decimal y viceversa.



Sección 4 **Sistemas numéricos**
Clase 3 **Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa**

P
a. Escriba el 7 en sistema de numeración binario.
b. Escriba 1010_2 en sistema de numeración decimal.

S
Para escribir un número del sistema decimal al sistema binario o del sistema binario al decimal, se utiliza como referente la tabla de los valores posicionales.

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

a. Para representar el 7 en sistema binario:
Paso 1. Se determina el número de posiciones necesarias observando la tabla de valores posicionales, en este caso son tres posiciones, porque la cuarta posición tiene valor de 8.
Paso 2. Se escribe 1 en la tercera posición, cuyo valor posicional es 4. Luego, se escribe 1 en la segunda posición, cuyo valor posicional es 2 y por último 1 en la primera posición, cuyo valor posicional es 1 (sumando valores posicionales: $4 + 2 + 1 = 7$).
Paso 3. Se escribe la equivalencia: $7 = 111_2$

b. Para escribir el número 1010_2 en sistema decimal:
Paso 1. Se determina cuántas posiciones tiene el número binario, en este caso son cuatro posiciones.
Paso 2. Se escriben los valores posicionales de cada dígito observando la tabla de valores posicionales y luego se suman.

Número binario	1	0	1	0
Valor posicional	8	0	2	0

$8 + 0 + 2 + 0 = 10$

Paso 3. Se escribe la equivalencia: $1010_2 = 10$.

C
Para convertir un número decimal a sistema binario o un número binario a sistema decimal se utiliza la tabla de valores posicionales.

Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

E
1. Represente los siguientes números en sistema binario.
a. 5 b. 12 c. 15 d. 16 e. 20 f. 30
2. Repesente los siguientes números en sistema decimal.
a. 100_2 b. 110_2 c. 1011_2 d. 1110_2 e. 10010_2 f. 11000_2

Solucionario de los ejercicios:

1. a. 101_2
b. 1100_2
c. 1111_2
d. 10000_2
e. 10100_2
f. 11110_2

2. a. 4
b. 6
c. 11
d. 14
e. 18
f. 24

Fecha: dd – mm – aa
3-4-3 Conversión del sistema binario al sistema decimal y viceversa

Ⓟ a. Escriba el 7 en sistema de numeración binario.
b. Escriba 1010_2 en sistema de numeración decimal.

Ⓢ a. Para representar 7 en sistema binario:
Paso 1. Determine el número de posiciones, en este caso son tres posiciones.
Paso 2. Se escribe 1 en la tercera posición, cuyo valor posicional es 4. Luego, se escribe 1 en la segunda cuyo valor posicional es 2 y por último 1 en la primera posición cuyo valor es 1.
Paso 3. Se escribe la equivalencia: $7 = 111_2$
b. Para escribir el número 1010_2 en sistema decimal:
Paso 1. Se determina cuántas posiciones tiene el número binario, en este caso son cuatro posiciones.
Paso 2. Se escriben los valores posicionales de cada dígito observando la tabla, luego se suman: $8 + 0 + 2 + 0 = 10$
Paso 3. Se escribe la equivalencia: $1010_2 = 10$

Ⓒ Para convertir un número decimal a sistema binario o viceversa se utiliza la tabla:

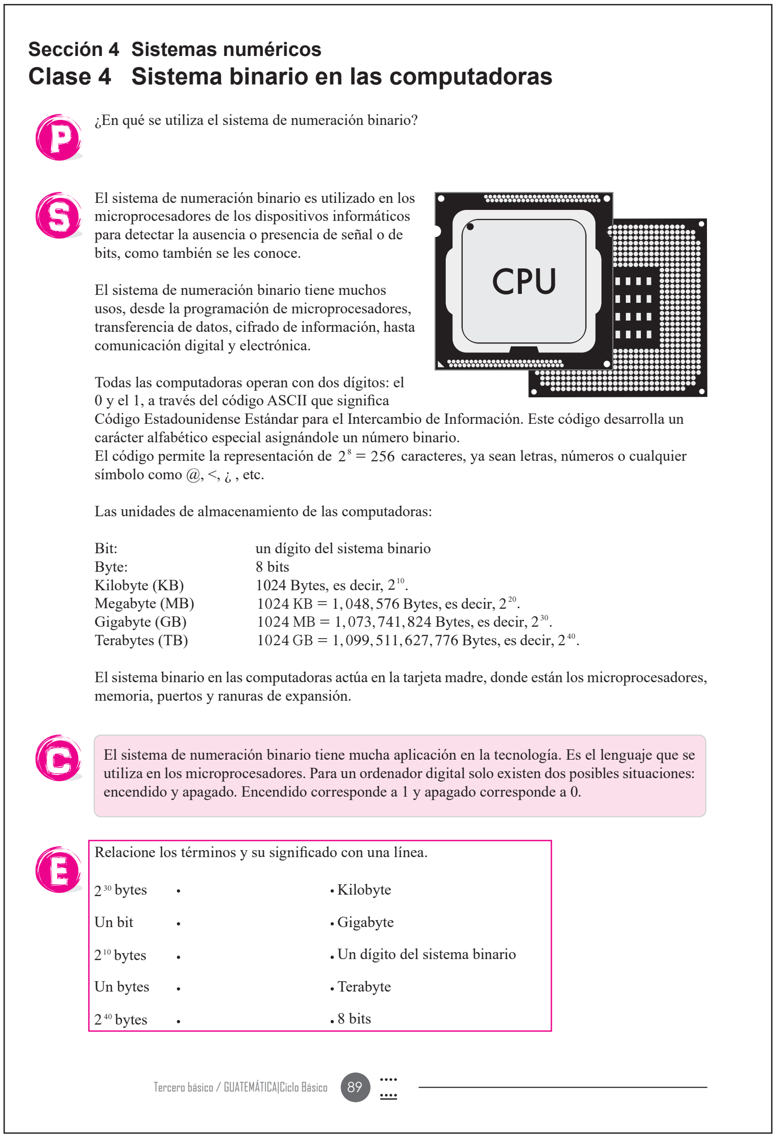
Posición	6°	5°	4°	3°	2°	1°
Potencia	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2°
Valor posicional	32	16	8	4	2	1

Ⓔ 1. Represente los números en sistema binario.
a. 5 b. 12
R: 101_2 R: 1100_2

2. Represente los números en sistema decimal.
a. 100_2 c. 1011_2
R: 4 R:11

Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 4 Sistema binario en las computadoras

Aprendizaje esperado:
Relaciona unidades de almacenamiento de información en las computadoras.



Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 4 Sistema binario en las computadoras

P ¿En qué se utiliza el sistema de numeración binario?

S El sistema de numeración binario es utilizado en los microprocesadores de los dispositivos informáticos para detectar la ausencia o presencia de señal o de bits, como también se les conoce.

El sistema de numeración binario tiene muchos usos, desde la programación de microprocesadores, transferencia de datos, cifrado de información, hasta comunicación digital y electrónica.

Todas las computadoras operan con dos dígitos: el 0 y el 1, a través del código ASCII que significa Código Estadounidense Estándar para el Intercambio de Información. Este código desarrolla un carácter alfabético especial asignándole un número binario.
El código permite la representación de $2^8 = 256$ caracteres, ya sean letras, números o cualquier símbolo como @, <, ¿ , etc.

Las unidades de almacenamiento de las computadoras:

Bit:	un dígito del sistema binario
Byte:	8 bits
Kilobyte (KB)	1024 Bytes, es decir, 2^{10}.
Megabyte (MB)	1024 KB $= 1,048,576$ Bytes, es decir, 2^{20}.
Gigabyte (GB)	1024 MB $= 1,073,741,824$ Bytes, es decir, 2^{30}.
Terabytes (TB)	1024 GB $= 1,099,511,627,776$ Bytes, es decir, 2^{40}.

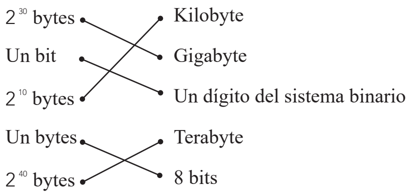
El sistema binario en las computadoras actúa en la tarjeta madre, donde están los microprocesadores, memoria, puertos y ranuras de expansión.

C El sistema de numeración binario tiene mucha aplicación en la tecnología. Es el lenguaje que se utiliza en los microprocesadores. Para un ordenador digital solo existen dos posibles situaciones: encendido y apagado. Encendido corresponde a 1 y apagado corresponde a 0.

E Relacione los términos y su significado con una línea.

2^{30} bytes •	• Kilobyte
Un bit •	• Gigabyte
2^{10} bytes •	• Un dígito del sistema binario
Un bytes •	• Terabyte
2^{40} bytes •	• 8 bits

Solucionario de los ejercicios:



Fecha: dd – mm – aa
3-4-4 Sistema binario en las computadoras

Ⓟ ¿En qué se utiliza el sistema de numeración binario?

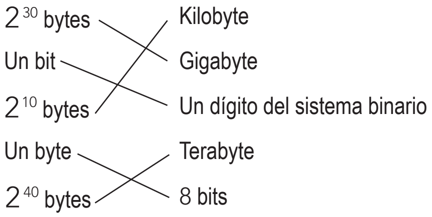
Ⓢ El sistema de numeración binario es utilizado en los microprocesadores de los dispositivos informáticos para detectar la ausencia o presencia de señal o de bits. Estas señales son para la transferencia de datos, cifrado de información, comunicación digital y electrónica, entre otros.

Las unidades de almacenamiento de información utilizando el sistema binario:

Bit	un dígito (0 o 1)
Byte	8 bits
Kilobyte	1,024 Bytes $=2^{10}$ Bytes
Megabyte (MB)	1,024 KB $=$ 1,048,576 Bytes $=2^{20}$ Bytes
Gigabyte (GB)	1,024 MB $=$ 1,073,741,824 Bytes $=2^{30}$ Bytes
Terabyte (TB)	1,024 GB $=$ 1,099,511,627,776 Bytes $=2^{40}$ Bytes

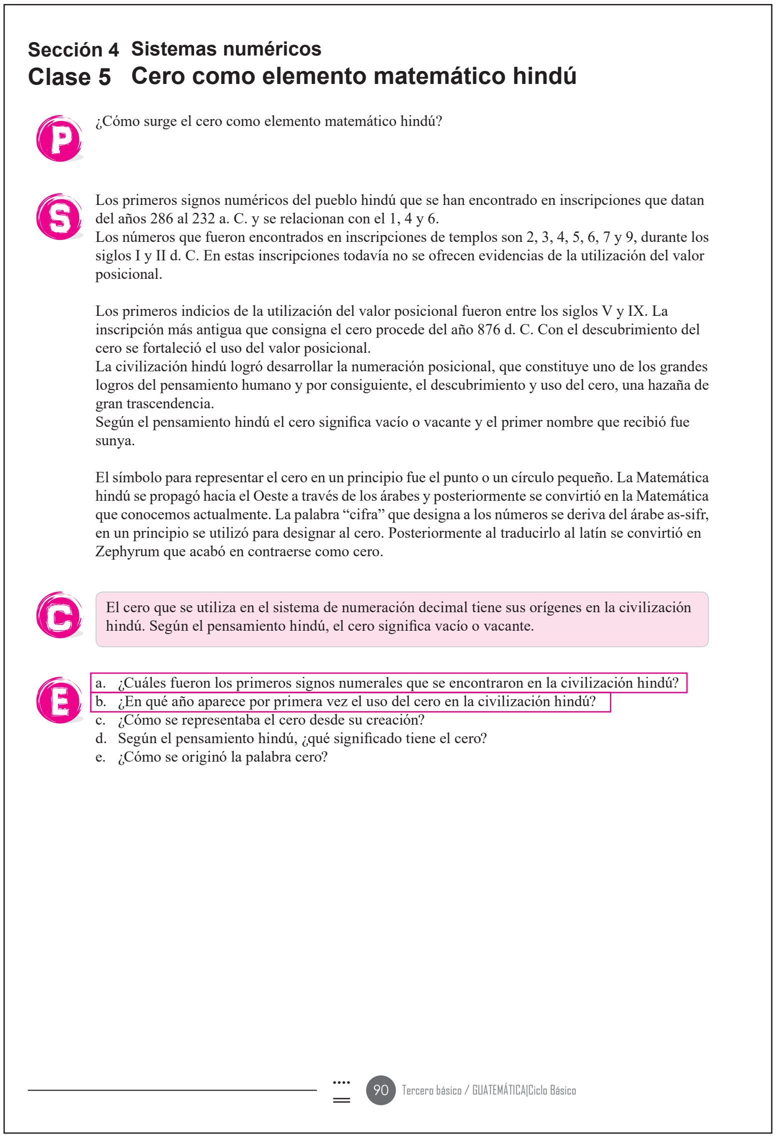
Ⓒ El sistema de numeración binario tiene mucha aplicación en tecnología. Es el lenguaje que se utiliza en los microprocesadores. Para un ordenador digital solo existen dos posibles situaciones: encendido y apagado. El encendido corresponde a 1 y apagado corresponde a 0.

Ⓔ Relacione con una línea los términos con su significado.



Sección 4 Sistemas numéricos
Clase 5 Cero como elemento matemático hindú

Aprendizaje esperado:
Describe aspectos importantes del cero hindú.



Sección 4 **Sistemas numéricos**
Clase 5 **Cero como elemento matemático hindú**

P ¿Cómo surge el cero como elemento matemático hindú?

S Los primeros signos numéricos del pueblo hindú que se han encontrado en inscripciones que datan del años 286 al 232 a. C. y se relacionan con el 1, 4 y 6.
Los números que fueron encontrados en inscripciones de templos son 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9, durante los siglos I y II d. C. En estas inscripciones todavía no se ofrecen evidencias de la utilización del valor posicional.

Los primeros indicios de la utilización del valor posicional fueron entre los siglos V y IX. La inscripción más antigua que consigna el cero procede del año 876 d. C. Con el descubrimiento del cero se fortaleció el uso del valor posicional.
La civilización hindú logró desarrollar la numeración posicional, que constituye uno de los grandes logros del pensamiento humano y por consiguiente, el descubrimiento y uso del cero, una hazaña de gran trascendencia.
Según el pensamiento hindú el cero significa vacío o vacante y el primer nombre que recibió fue sunya.

El símbolo para representar el cero en un principio fue el punto o un círculo pequeño. La Matemática hindú se propagó hacia el Oeste a través de los árabes y posteriormente se convirtió en la Matemática que conocemos actualmente. La palabra "cifra" que designa a los números se deriva del árabe as-sifr, en un principio se utilizó para designar al cero. Posteriormente al traducirlo al latín se convirtió en Zephyrum que acabó en contraerse como cero.

C El cero que se utiliza en el sistema de numeración decimal tiene sus orígenes en la civilización hindú. Según el pensamiento hindú, el cero significa vacío o vacante.

E
a. ¿Cuáles fueron los primeros signos numerales que se encontraron en la civilización hindú?
b. ¿En qué año aparece por primera vez el uso del cero en la civilización hindú?
c. ¿Cómo se representaba el cero desde su creación?
d. Según el pensamiento hindú, ¿qué significado tiene el cero?
e. ¿Cómo se originó la palabra cero?

Solucionario de los ejercicios:

a. 1,4 y 6
b. 876 d.C.
c. El punto o círculo pequeño
d. Vacío o vacante
e. Se derivó de la palabra as-sifr.

Fecha: dd – mm – aa
3-4-5 Cero como elemento matemático hindú

Ⓟ ¿Cómo surge el cero como elemento matemático hindú?

Ⓢ Los primeros signos numéricos del pueblo hindú datan de los años 286 al 232 a. C. y se relacionan con el 1, 4 y 6. Luego, fueron encontrados en inscripciones de templos los números 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 9 durante los siglos I y II d. C. En estas inscripciones no se han evidenciado usos del valor posicional.
Los primeros indicios del uso del valor posicional fueron entre los siglos V y IX.
La inscripción que consigna el cero data del año 876 d. C. Con el descubrimiento del cero se fortaleció el uso del valor posicional y se fortaleció y constituyó una hazaña de gran trascendencia.
Según el pensamiento hindú el cero significa vacío o vacante y el primer nombre que recibió fue sunya.

El cero en un principio fue representado por un punto o círculo pequeño. La palabra cifra en un principio se utilizó para designar al cero. Posteriormente, al traducirlo al latín se convierte en Zephyrum, que acabó en contraerse como cero.

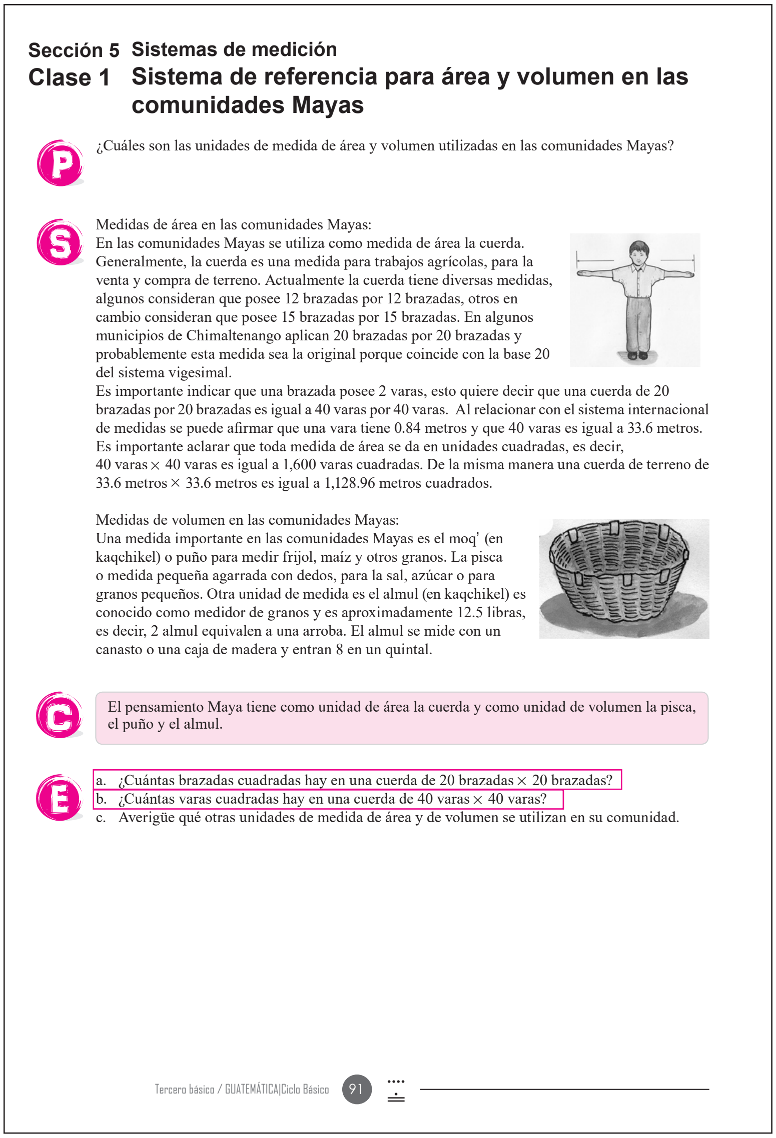
Ⓒ El cero que se utiliza en el sistema de numeración decimal tiene sus orígenes en la civilización hindú. Según el pensamiento hindú, el cero significa vacío o vacante.

Ⓔ a. ¿Cuáles fueron los primeros signos numerales que se encontaron en la civilización hindú?
R: 1,4 y 6

b. ¿En qué año aparece por primera vez el cero?
R: 876 d. C.

Sección 5 Sistemas de medición
Clase 1 Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas

Aprendizaje esperado:
Calcula una medida de área usando unidades de medida de las comunidades Mayas.



Sección 5 **Sistemas de medición**
Clase 1 **Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas**

P ¿Cuáles son las unidades de medida de área y volumen utilizadas en las comunidades Mayas?

S Medidas de área en las comunidades Mayas:
En las comunidades Mayas se utiliza como medida de área la cuerda. Generalmente, la cuerda es una medida para trabajos agrícolas, para la venta y compra de terreno. Actualmente la cuerda tiene diversas medidas, algunos consideran que posee 12 brazadas por 12 brazadas, otros en cambio consideran que posee 15 brazadas por 15 brazadas. En algunos municipios de Chimaltenango aplican 20 brazadas por 20 brazadas y probablemente esta medida sea la original porque coincide con la base 20 del sistema vigesimal.
Es importante indicar que una brazada posee 2 varas, esto quiere decir que una cuerda de 20 brazadas por 20 brazadas es igual a 40 varas por 40 varas. Al relacionar con el sistema internacional de medidas se puede afirmar que una vara tiene 0.84 metros y que 40 varas es igual a 33.6 metros.
Es importante aclarar que toda medida de área se da en unidades cuadradas, es decir,
40 varas × 40 varas es igual a 1,600 varas cuadradas. De la misma manera una cuerda de terreno de 33.6 metros × 33.6 metros es igual a 1,128.96 metros cuadrados.

Medidas de volumen en las comunidades Mayas:
Una medida importante en las comunidades Mayas es el moq' (en kaqchikel) o puño para medir frijol, maíz y otros granos. La pisca o medida pequeña agarrada con dedos, para la sal, azúcar o para granos pequeños. Otra unidad de medida es el almul (en kaqchikel) es conocido como medidor de granos y es aproximadamente 12.5 libras, es decir, 2 almul equivalen a una arroba. El almul se mide con un canasto o una caja de madera y entran 8 en un quintal.

C El pensamiento Maya tiene como unidad de área la cuerda y como unidad de volumen la pisca, el puño y el almul.

E
a. ¿Cuántas brazadas cuadradas hay en una cuerda de 20 brazadas × 20 brazadas?
b. ¿Cuántas varas cuadradas hay en una cuerda de 40 varas × 40 varas?
c. Averigüe qué otras unidades de medida de área y de volumen se utilizan en su comunidad.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 91

Solucionario de los ejercicios:

a. 400 brazadas cuadradas
b. 1,600 varas cuadradas
c. Ejemplo:
Área: un cuarterón de terreno
Volumen: tarea de leña

Fecha: dd – mm – aa
3-5-1 Sistema de referencia para área y volumen en las comunidades Mayas

Ⓟ ¿Cuáles son las unidades de medida de área y volumen utilizadas en las comunidades Mayas?

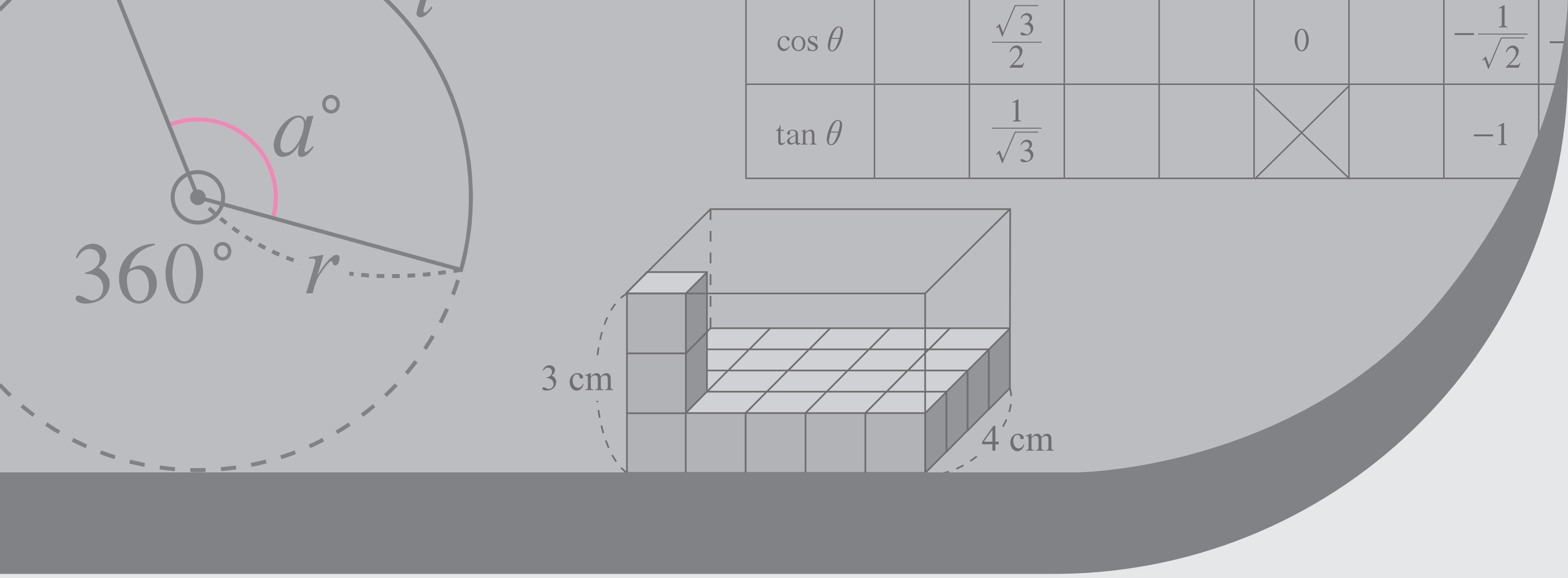
Ⓢ En las comunidades Mayas se utiliza como medida de área la cuerda.
Cuerda: es una unidad de medida para trabajos agrícolas y para la compra y venta de terrenos. La cuerda tiene diversas medidas, algunos consideran de 12 × 12 brazadas, otros de 15 × 15 brazadas; en Chimaltenango la cuerda tiene 20 × 20 brazadas.
La brazada es equivalente a dos brazadas.

Las unidades de medida de volumen en las comunidades Mayas están:
El moq' (en kaqchikel) o puño es utilizado para medir maíz, frijol y otros granos.
La pisca es utilizada para medir la sal, azúcar o granos muy pequeños.
El almul (en kaqchikel) es utilizado para medir granos y es aproximadamente
12.5 libras. El almul se mide con un canasto y entran 8 en un quintal.

Ⓒ Algunas unidades de medida de área en las comunidades Mayas es la cuerda y de volumen la pisca, el puño y el almul.

Ⓔ a. ¿Cuántas brazadas cuadradas hay en una cuerda de 20 brazadas × 20 brazadas?
R: 400 brazadas cuadradas

b. ¿Cuántas varas cuadradas hay en una cuerda de 40 varas × 40 varas?
R: 1,600 varas cuadradas



Unidad 4 ••••

Geometría

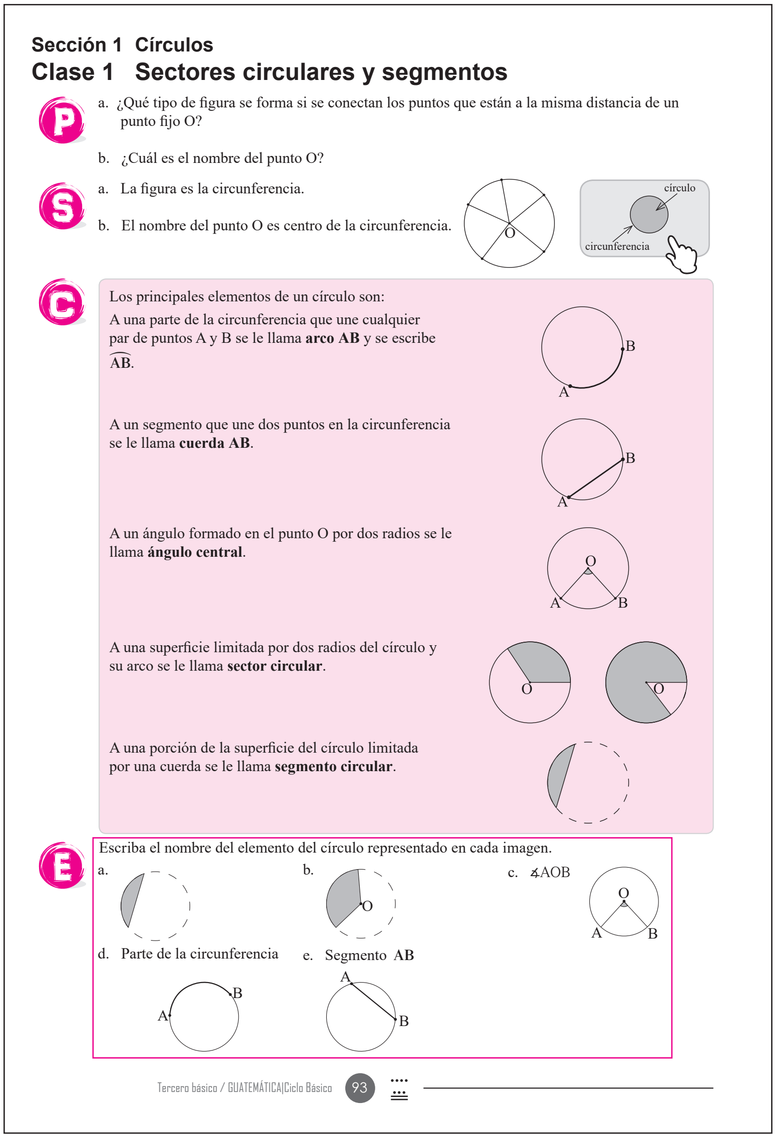
Plan de estudio - Unidad 4 Geometría -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
1. Construye patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones en la solución de problemas.	1.2 Resuelve problemas que involucran el cálculo de medidas y la aplicación de propiedades de figuras planas y cuerpos sólidos.	1. Círculos	1.1 Sectores circulares y segmentos	Escribe el nombre de los elementos de un círculo.
			1.2 Longitud de arcos	Encuentra la longitud de un arco.
			1.3 Área de sectores circulares	Encuentra el área de un sector circular.
		2. Sólidos	2.1 Representación y clasificación de sólidos (1)	Identifica el nombre de sólidos geométricos (prisma y cilindro).
			2.2 Representación y clasificación de sólidos (2)	Identifica el nombre de sólidos geométricos (pirámide y cono).
		3. Construcción de sólidos	3.1 Cubos	Identifica el plano desarrollado de un cubo.
			3.2 Prismas	Identifica el nombre de un prisma dado su plano desarrollado.
			3.3 Cilindros	Identifica el plano desarrollado de un cilindro.
			3.4 Pirámides	Identifica el nombre de una pirámide dado su plano desarrollado.
			3.5 Conos	Identifica el plano desarrollado de un cono.
		4. Área superficial de sólidos	4.1 Área superficial de cubos	Encuentra el área superficial de un cubo.
			4.2 Área superficial de prismas rectangulares	Encuentra el área superficial de un prisma rectangular.
			4.3 Área superficial de prismas triangulares	Encuentra el área superficial de un prisma triangular.
			4.4 Área superficial de cilindros	Encuentra el área superficial de un cilindro.
			4.5 Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros	Encuentra el área superficial de un prisma y un cilindro.
			4.6 Área superficial de pirámides cuadrangulares	Encuentra el área superficial de una pirámide cuadrangular.
			4.7 Área superficial de pirámides triangulares	Encuentra el área superficial de una pirámide triangular.
			4.8 Área superficial de conos	Encuentra el área superficial de un cono.
			4.9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos	Encuentra el área superficial de una pirámide y un cono.
			4.10 Área superficial de esferas	Encuentra el área superficial de una esfera.
		5. Volumen de sólidos	5.1 Volumen de prismas rectangulares	Encuentra el volumen de un prisma rectangular.
			5.2 Volumen de cubos	Encuentra el volumen de un cubo.
			5.3 Volumen de prismas triangulares	Encuentra el volumen de un prisma triangular.
			5.4 Volumen de cilindros	Encuentra el volumen de un cilindro.

			5.5 Ejercicios del volumen de prismas y cilindros	Encuentra el volumen de un prisma y un cilindro.
			5.6 Volumen de pirámides cuadrangulares	Encuentra el volumen de una pirámide cuadrangular.
			5.7 Volumen de pirámides triangulares	Encuentra el volumen de una pirámide triangular.
			5.8 Volumen de conos	Encuentra el volumen de un cono.
			5.9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos	Encuentra el volumen de una pirámide y un cono.
			5.10 Volumen de esferas	Encuentra el volumen de una esfera.
	1.3 Utiliza teoremas relacionados con triángulos obtusángulos en la solución de problemas.	6. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180˚	6.1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano	Encuentra el valor de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.
			6.2 Razones trigonométricas hasta 180˚ (1)	Encuentra el valor de las razones trigonométricas de un ángulo obtuso.
			6.3 Razones trigonométricas hasta 180˚ (2)	Encuentra el valor de las razones trigonométricas para 0˚, 30˚, 45˚, 60˚, 90˚, 120˚, 135˚, 150˚ y 180˚.
			6.4 Propiedad de razones trigonométricas	Identifica el signo de los valores de seno, coseno y tangente.
			6.5 Relación de seno, coseno y tangente	Encuentra el valor de las razones trigonométricas usando relación entre seno, coseno y tangente.

Sección 1 Círculos
Clase 1 Sectores circulares y segmentos

Aprendizaje esperado:
Escribe el nombre de los elementos de un círculo.



Sección 1 Círculos
Clase 1 Sectores circulares y segmentos

P
a. ¿Qué tipo de figura se forma si se conectan los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo O?
b. ¿Cuál es el nombre del punto O?

S
a. La figura es la circunferencia.
b. El nombre del punto O es centro de la circunferencia.

C
Los principales elementos de un círculo son:

A una parte de la circunferencia que une cualquier par de puntos A y B se le llama **arco AB** y se escribe $\overset{\frown}{AB}$.

A un segmento que une dos puntos en la circunferencia se le llama **cuerda AB**.

A un ángulo formado en el punto O por dos radios se le llama **ángulo central**.

A una superficie limitada por dos radios del círculo y su arco se le llama **sector circular**.

A una porción de la superficie del círculo limitada por una cuerda se le llama **segmento circular**.

E
Escriba el nombre del elemento del círculo representado en cada imagen.
a.
b.
c. ∢AOB
d. Parte de la circunferencia
e. Segmento **AB**

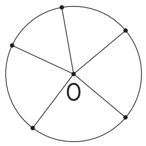
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 93

Solucionario de los ejercicios:

a. Segmento circular
b. Sector circular
c. Ángulo central
d. Arco AB ($\overset{\frown}{AB}$)
e. Cuerda AB

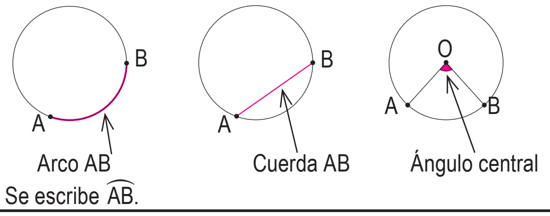
Fecha: dd – mm – aa
4-1-1 Sectores circulares y segmentos

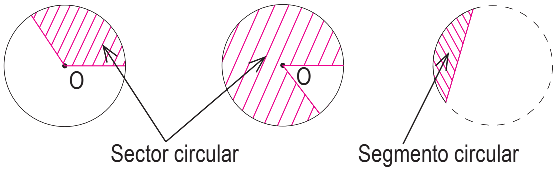
Ⓟ a. ¿Qué tipo de figura se forma si se conectan los puntos que están a la misma distancia de un punto fijo O?
b. ¿Cuál es el nombre del punto O?



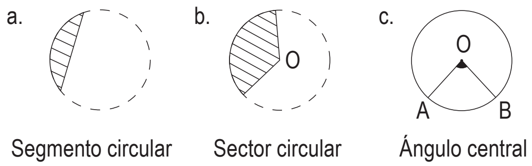
Ⓢ a. La figura es la circunferencia.
b. Es centro de la circunferencia.

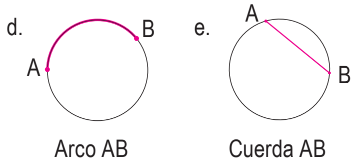
Ⓒ Los principales elementos de un círculo son:





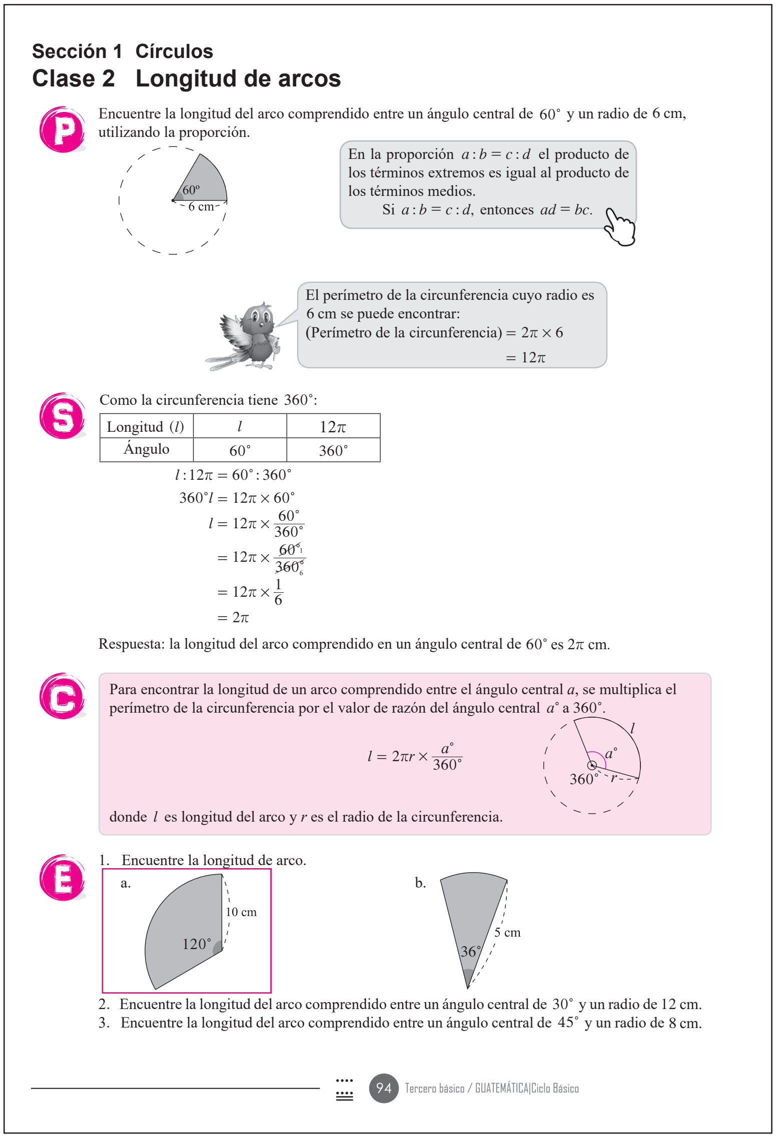
Ⓔ Escriba el nombre del elemento del círculo.





Sección 1 Círculos
Clase 2 Longitud de arcos

Aprendizaje esperado:
Encuentra la longitud de un arco.



Sección 1 Círculos
Clase 2 Longitud de arcos

P Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 60° y un radio de 6 cm, utilizando la proporción.

60°
6 cm

En la proporción $a:b=c:d$ el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.
Si $a:b=c:d$, entonces $ad=bc$.

El perímetro de la circunferencia cuyo radio es 6 cm se puede encontrar:
(Perímetro de la circunferencia) $= 2\pi \times 6$
$= 12\pi$

S Como la circunferencia tiene 360°:

Longitud (l)	l	12π
Ángulo	60°	360°

$$l : 12\pi = 60° : 360°$$
$$360° l = 12\pi \times 60°$$
$$l = 12\pi \times \frac{60°}{360°}$$
$$= 12\pi \times \frac{\cancel{60°}^{1}}{\cancel{360°}_{6}}$$
$$= 12\pi \times \frac{1}{6}$$
$$= 2\pi$$

Respuesta: la longitud del arco comprendido en un ángulo central de 60° es 2π cm.

C Para encontrar la longitud de un arco comprendido entre el ángulo central a, se multiplica el perímetro de la circunferencia por el valor de razón del ángulo central $a°$ a 360°.

$$l = 2\pi r \times \frac{a°}{360°}$$

l
$a°$
360°
r

donde l es longitud del arco y r es el radio de la circunferencia.

E 1. Encuentre la longitud de arco.

a. 10 cm, 120°

b. 5 cm, 36°

2. Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 30° y un radio de 12 cm.
3. Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 45° y un radio de 8 cm.

94 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $l = 2\pi \times 10 \times \frac{120°}{360°}$
$= 2\pi \times 10 \times \frac{1}{3}$
$= \frac{20}{3}\pi$
R: $\frac{20}{3}\pi$ cm

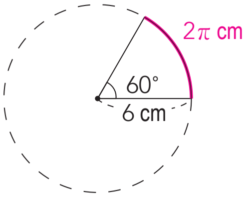
b. $l = 2\pi \times 5 \times \frac{36°}{360°}$
$= 2\pi \times 5 \times \frac{1}{10}$
$= \pi$
R: π cm

2. $l = 2\pi \times 12 \times \frac{30°}{360°}$
$= 2\pi \times 12 \times \frac{1}{12}$
$= 2\pi$
R: 2π cm

3. $l = 2\pi \times 8 \times \frac{45°}{360°}$
$= 2\pi \times 8 \times \frac{1}{8}$
$= 2\pi$
R: 2π cm

Fecha: dd – mm – aa
4-1-2 Longitud de arcos

Ⓟ Encuentre la longitud del arco comprendido entre un ángulo central de 60° y un radio de 6 cm, utilizando la proporción.



(Perímetro de la circunferencia) $= 2\pi \times$ radio
$= 2\pi \times 6$
$= 12\pi$

Ⓢ

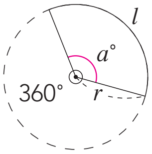
Longitud (l)	l	12π
Ángulo	60°	360°

$$l : 12\pi = 60° : 360°$$
$$360° l = 12\pi \times 60°$$
$$l = 12\pi \times \frac{60°}{360°}$$
$$l = 12\pi \times \frac{\cancel{60°}^{1}}{\cancel{360°}_{6}}$$
$$= 12\pi \times \frac{1}{6}$$
$$= 2\pi$$

R: 2π cm

Si $a:b=c:d$, entonces $ad=bc$.

Ⓒ



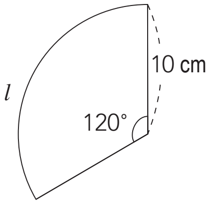
Para encontrar la longitud de un arco comprendido entre el ángulo central a:

$$l = 2\pi r \times \frac{a°}{360°}$$

donde l es longitud del arco y r es el radio de la circunferencia.

Ⓔ 1. Encuentre la longitud de arco.

a.

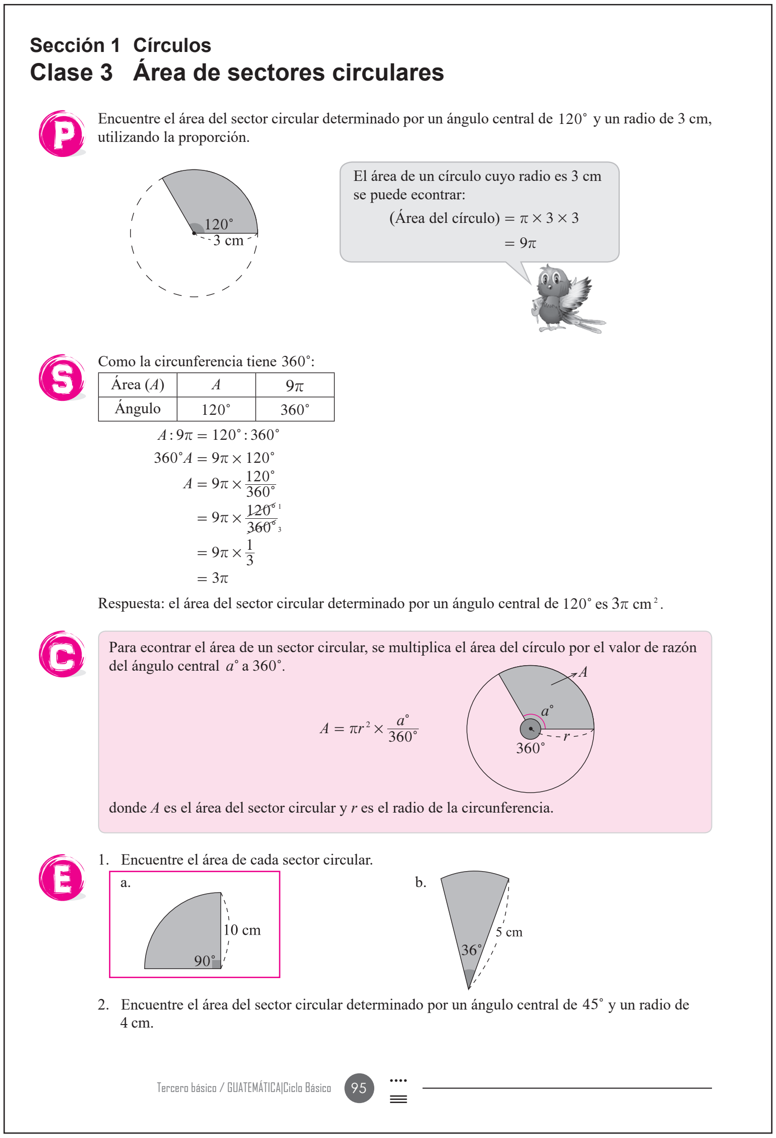


$$l = 2\pi \times 10 \times \frac{\cancel{120°}^{1}}{\cancel{360°}_{3}}$$
$$= 2\pi \times 10 \times \frac{1}{3}$$
$$= \frac{20}{3}\pi$$

R: $\frac{20}{3}\pi$ cm

Sección 1 Círculos
Clase 3 Área de sectores circulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área de un sector circular.



Sección 1 Círculos
Clase 3 Área de sectores circulares

P Encuentre el área del sector circular determinado por un ángulo central de 120° y un radio de 3 cm, utilizando la proporción.

El área de un círculo cuyo radio es 3 cm se puede ecnontrar:
(Área del círculo) $= \pi \times 3 \times 3$
$= 9\pi$

S Como la circunferencia tiene 360°:

Área (A)	A	9π
Ángulo	120°	360°

$$A : 9\pi = 120° : 360°$$
$$360°A = 9\pi \times 120°$$
$$A = 9\pi \times \frac{120°}{360°}$$
$$= 9\pi \times \frac{\cancel{120°}^{1}}{\cancel{360°}_{3}}$$
$$= 9\pi \times \frac{1}{3}$$
$$= 3\pi$$

Respuesta: el área del sector circular determinado por un ángulo central de 120° es 3π cm².

C Para econtrar el área de un sector circular, se multiplica el área del círculo por el valor de razón del ángulo central $a°$ a 360°.

$$A = \pi r^2 \times \frac{a°}{360°}$$

donde A es el área del sector circular y r es el radio de la circunferencia.

E 1. Encuentre el área de cada sector circular.

a.

b.

2. Encuentre el área del sector circular determinado por un ángulo central de 45° y un radio de 4 cm.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 95

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $A = \pi \times 10^2 \times \frac{90°}{360°}$
$= \pi \times 100 \times \frac{1}{4}$
$= 25\pi$
R: 25π cm²

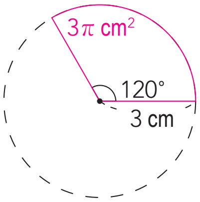
b. $A = \pi \times 5^2 \times \frac{36°}{360°}$
$= \pi \times 25 \times \frac{1}{10}$
$= \frac{5}{2}\pi$
R: $\frac{5}{2}\pi$ cm²

2. $A = \pi \times 4^2 \times \frac{45°}{360°}$
$= \pi \times 16 \times \frac{1}{8}$
$= 2\pi$
R: 2π cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-1-3 Área de sectores circulares

Ⓟ Encuentre el área del sector circular determinado por un ángulo central de 120° y un radio de 3 cm, utilizando la proporción

(Área del círculo) $= \pi \times$ radio $\times$ radio
$= \pi \times 3 \times 3$
$= 9\pi$



Ⓢ

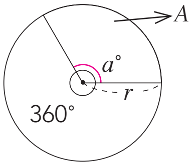
Área (A)	A	9π
Ángulo	120°	360°

Si $a : b = c : d$, entonces $ad = bc$.

$$A : 9\pi = 120° : 360°$$
$$360°A = 9\pi \times 120°$$
$$A = 9\pi \times \frac{120°}{360°}$$
$$A = 9\pi \times \frac{\cancel{120°}^{1}}{\cancel{360°}_{3}}$$
$$= 9\pi \times \frac{1}{3}$$
$$= 3\pi$$

R: 3π cm²

Ⓒ



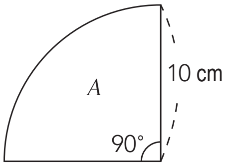
Para encontrar el área de un sector circular:

$$A = \pi r^2 \times \frac{a°}{360°}$$

donde A es el área del sector circular y r es el radio de la circunferencia.

Ⓔ 1. Encuentre el área de sector circular.

a.

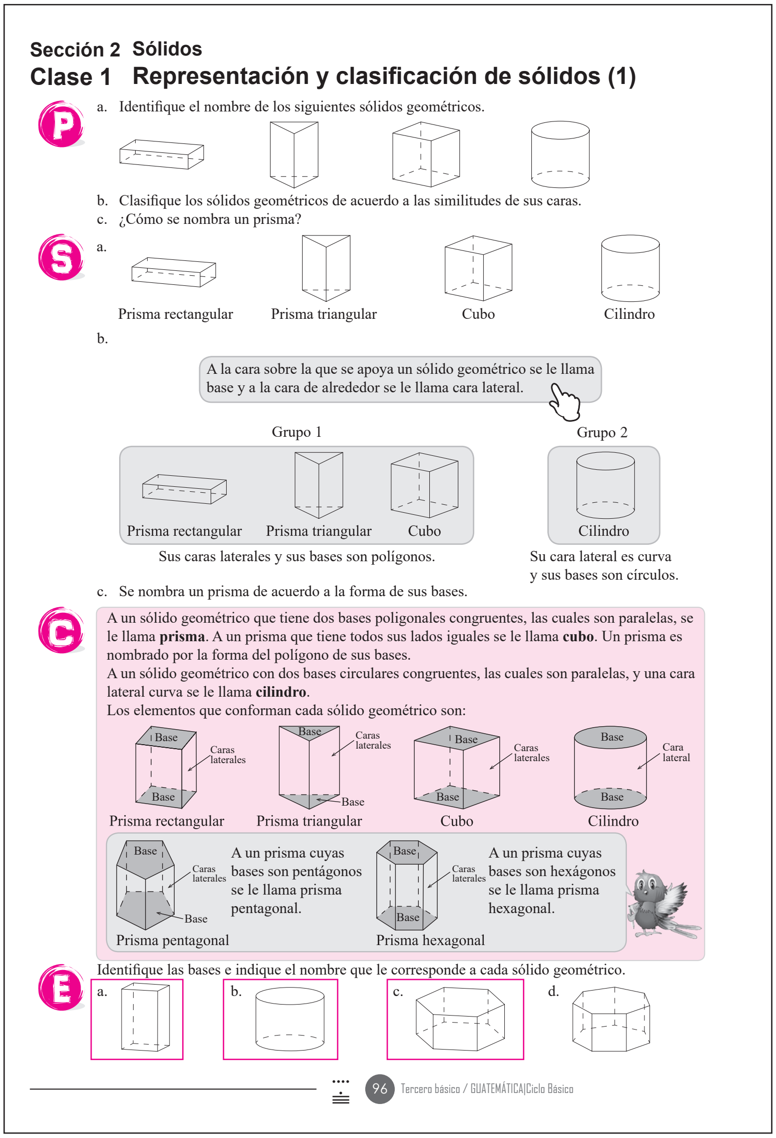


$$A = \pi \times 10^2 \times \frac{\cancel{90°}^{1}}{\cancel{360°}_{4}}$$
$$= \pi \times \overset{25}{\cancel{100}} \times \frac{1}{\cancel{4}_{1}}$$
$$= 25\pi$$

R: 25π cm²

Sección 2 Sólidos
Clase 1 Representación y clasificación de sólidos (1)

Aprendizaje esperado:
Identifica el nombre de sólidos geométricos (prisma y cilindro).



Sección 2 Sólidos
Clase 1 Representación y clasificación de sólidos (1)

P
a. Identifique el nombre de los siguientes sólidos geométricos.
b. Clasifique los sólidos geométricos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra un prisma?

S
a.
Prisma rectangular — Prisma triangular — Cubo — Cilindro

b.
A la cara sobre la que se apoya un sólido geométrico se le llama base y a la cara de alrededor se le llama cara lateral.

Grupo 1: Prisma rectangular, Prisma triangular, Cubo
Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2: Cilindro
Su cara lateral es curva y sus bases son círculos.

c. Se nombra un prisma de acuerdo a la forma de sus bases.

C
A un sólido geométrico que tiene dos bases poligonales congruentes, las cuales son paralelas, se le llama **prisma**. A un prisma que tiene todos sus lados iguales se le llama **cubo**. Un prisma es nombrado por la forma del polígono de sus bases.
A un sólido geométrico con dos bases circulares congruentes, las cuales son paralelas, y una cara lateral curva se le llama **cilindro**.
Los elementos que conforman cada sólido geométrico son:

Base, Caras laterales, Base — Prisma rectangular
Base, Caras laterales, Base — Prisma triangular
Base, Caras laterales, Base — Cubo
Base, Cara lateral, Base — Cilindro

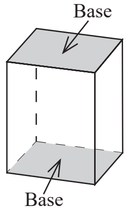
Base, Caras laterales, Base — Prisma pentagonal: A un prisma cuyas bases son pentágonos se le llama prisma pentagonal.
Base, Caras laterales, Base — Prisma hexagonal: A un prisma cuyas bases son hexágonos se le llama prisma hexagonal.

E
Identifique las bases e indique el nombre que le corresponde a cada sólido geométrico.
a. b. c. d.

96 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

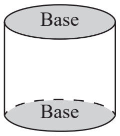
Solucionario del ejercicio:

a.



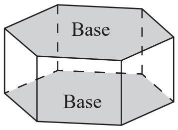
Prisma rectangular

b.



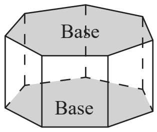
Cilindro

c.



Prisma hexagonal

d.



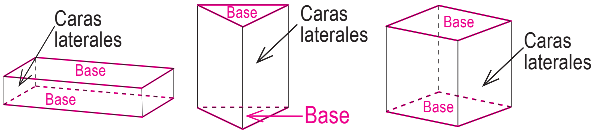
Prisma heptagonal

Fecha: dd – mm – aa
4-2-1 Representación y clasificación de sólidos (1)

Ⓟ a. Identifique el nombre de los sólidos geométricos.
b. Clasifiquelos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra un prisma?

Ⓢ a. b.

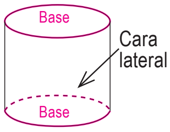
Grupo 1



Prisma rectangular — Prisma triangular — Cubo

Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2



Cilindro

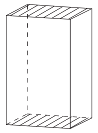
Su cara lateral es curva y sus bases son círculos.

c. Se nombra un prisma de acuerdo a la forma de sus bases.

Ⓒ A un sólido geométrico que tiene dos bases poligonales congruentes, las cuales son paralelas, se le llama prisma. A un prisma que tiene todos sus lados iguales se le llama cubo. Un prisma es nombrado por la forma del polígono de sus bases.
A un sólido geométrico con dos bases circulares congruentes, las cuales son paralelas, y una cara lateral curva se le llama cilindro.

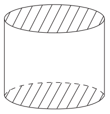
Ⓔ Identifique las bases e indique el nombre.

a.



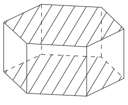
Prisma rectangular

b.



Cilindro

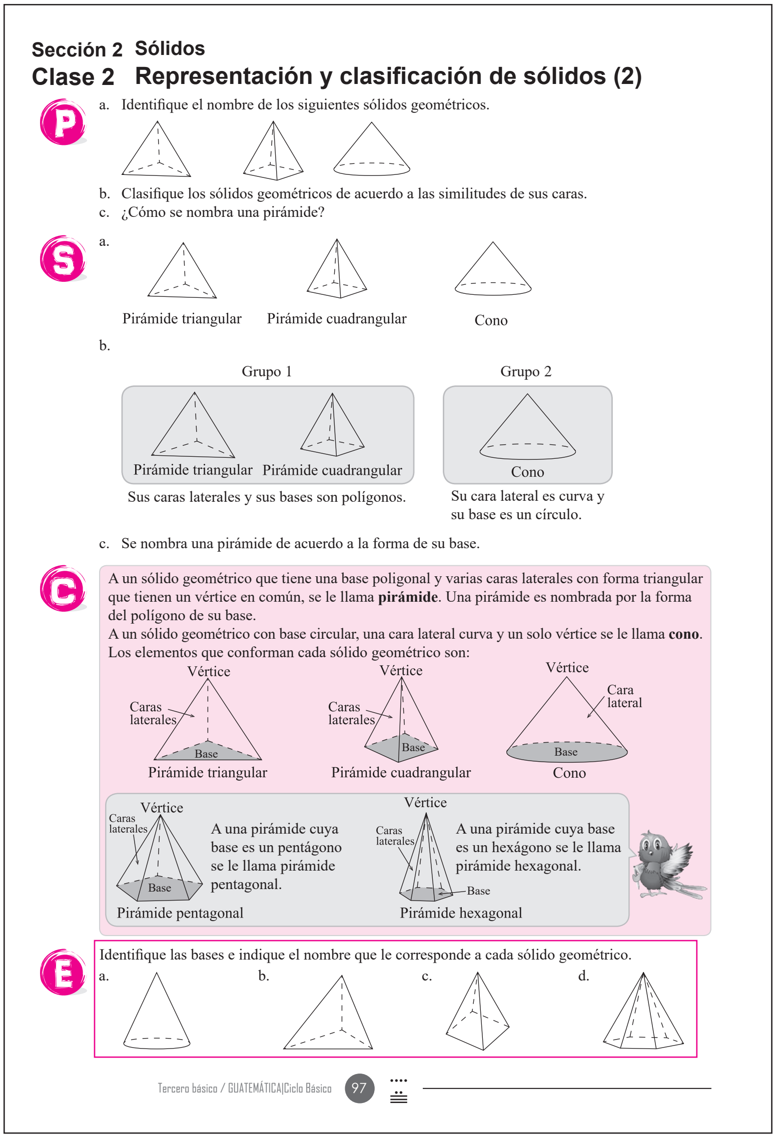
c.



Prisma hexagonal

Sección 2 Sólidos
Clase 2 Representación y clasificación de sólidos (2)

Aprendizaje esperado:
Identifica el nombre de sólidos geométricos (pirámide y cono).



Sección 2 Sólidos
Clase 2 Representación y clasificación de sólidos (2)

P
a. Identifique el nombre de los siguientes sólidos geométricos.
b. Clasifique los sólidos geométricos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra una pirámide?

S
a.
Pirámide triangular Pirámide cuadrangular Cono

b.
Grupo 1
Pirámide triangular Pirámide cuadrangular
Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

Grupo 2
Cono
Su cara lateral es curva y su base es un círculo.

c. Se nombra una pirámide de acuerdo a la forma de su base.

C
A un sólido geométrico que tiene una base poligonal y varias caras laterales con forma triangular que tienen un vértice en común, se le llama **pirámide**. Una pirámide es nombrada por la forma del polígono de su base.
A un sólido geométrico con base circular, una cara lateral curva y un solo vértice se le llama **cono**.
Los elementos que conforman cada sólido geométrico son:

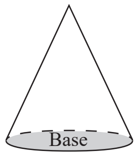
A una pirámide cuya base es un pentágono se le llama pirámide pentagonal.

A una pirámide cuya base es un hexágono se le llama pirámide hexagonal.

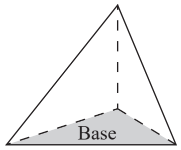
E
Identifique las bases e indique el nombre que le corresponde a cada sólido geométrico.
a. b. c. d.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 97

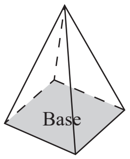
Solucionario de los ejercicios:

a.


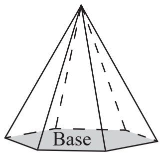
Cono

b.


Pirámide triangular

c.


Pirámide cuadrangular

d.


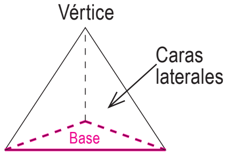
Pirámide hexagonal

Fecha: dd – mm – aa
4-2-2 Representación y clasificación de sólidos (2)

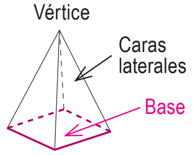
Ⓟ a. Identifique el nombre de los sólidos geométricos.
b. Clasifíquelos de acuerdo a las similitudes de sus caras.
c. ¿Cómo se nombra una pirámide?

Ⓢ a. b.

Grupo 1

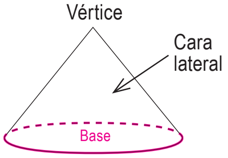


Pirámide triangular



Pirámide cuadrangular

Grupo 2



Cono

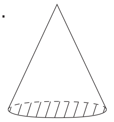
Sus caras laterales y sus bases son polígonos.

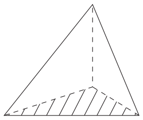
Su cara lateral es curva y su base es un círculo.

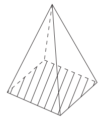
c. Se nombra una pirámide de acuerdo a la forma de su base.

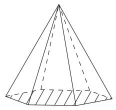
Ⓒ A un sólido geométrico que tiene una base poligonal y varias caras laterales con forma triangular que tienen un vértice en común, se le llama pirámide. Una pirámide es nombrada por la forma del polígono de su base.
A un sólido geométrico con base circular, una cara lateral curva y un solo vértice se le llama cono.

Ⓔ Identifique las bases e indique el nombre.

a.

Cono

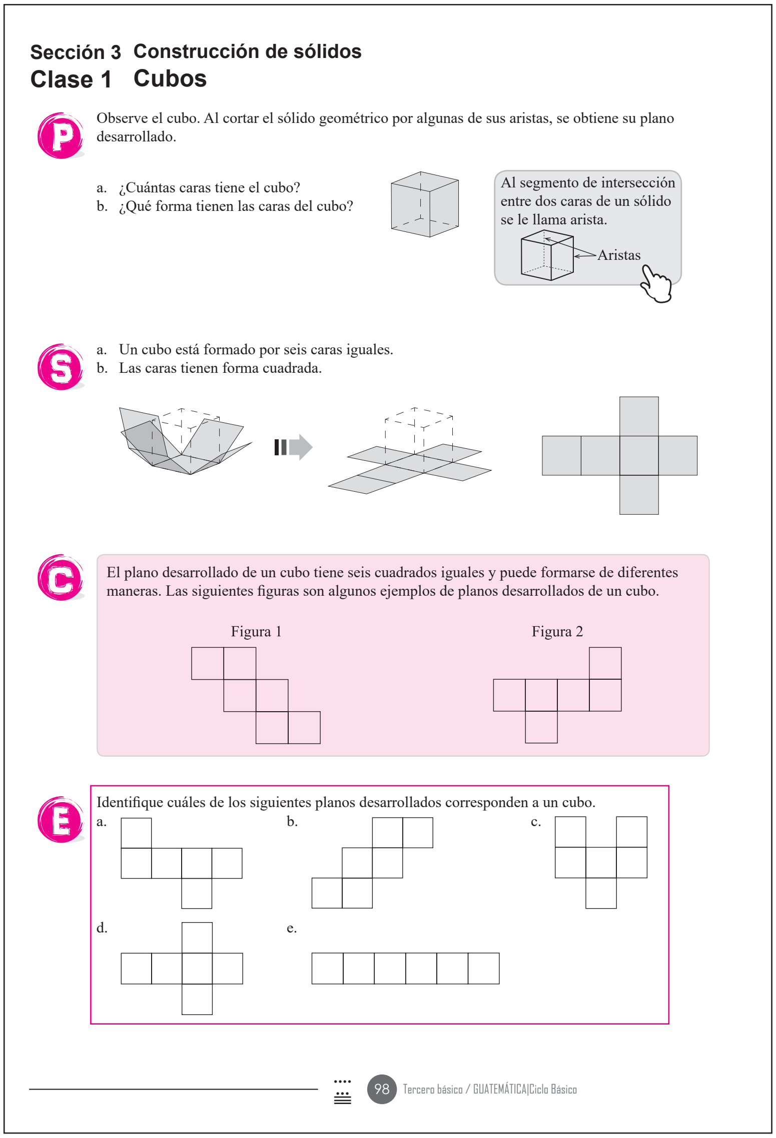
b.

Pirámide triangular

c.

Pirámide cuadrangular

d.

Pirámide hexagonal

Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 1 Cubos

Aprendizaje esperado:
Identifica el plano desarrollado de un cubo.



Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 1 Cubos

P Observe el cubo. Al cortar el sólido geométrico por algunas de sus aristas, se obtiene su plano desarrollado.

a. ¿Cuántas caras tiene el cubo?
b. ¿Qué forma tienen las caras del cubo?

Al segmento de intersección entre dos caras de un sólido se le llama arista.
Aristas

S a. Un cubo está formado por seis caras iguales.
b. Las caras tienen forma cuadrada.

C El plano desarrollado de un cubo tiene seis cuadrados iguales y puede formarse de diferentes maneras. Las siguientes figuras son algunos ejemplos de planos desarrollados de un cubo.

Figura 1 Figura 2

E Identifique cuáles de los siguientes planos desarrollados corresponden a un cubo.
a. b. c. d. e.

98 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

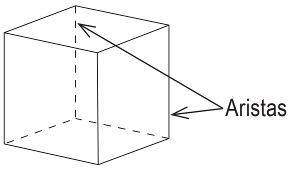
Solucionario del ejercicio:

a, b, d

Fecha: dd – mm – aa
4-3-1 Cubos

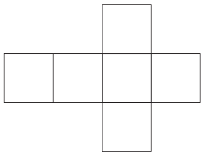
Ⓟ Al cortar el sólido geométrico por algunas de sus aristas, se obtiene su plano desarrollado.

a. ¿Cuántas caras tiene el cubo?
b. ¿Qué forma tienen las caras del cubo?



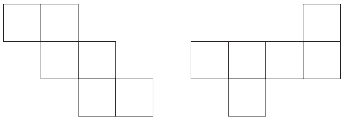
Ⓢ a. Está formado por seis caras iguales.

b. Tienen forma cuadrada.

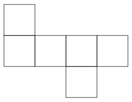


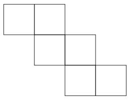
Plano desarrollado del cubo

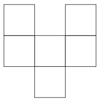
Ⓒ El plano desarrollado de un cubo tiene seis cuadros iguales y puede formarse de diferentes maneras.
Ejemplos:

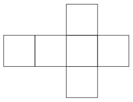


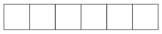
Ⓔ Identifique cuáles de los planos desarrollados corresponden a un cubo.

[✓ a.]


[✓ b.]


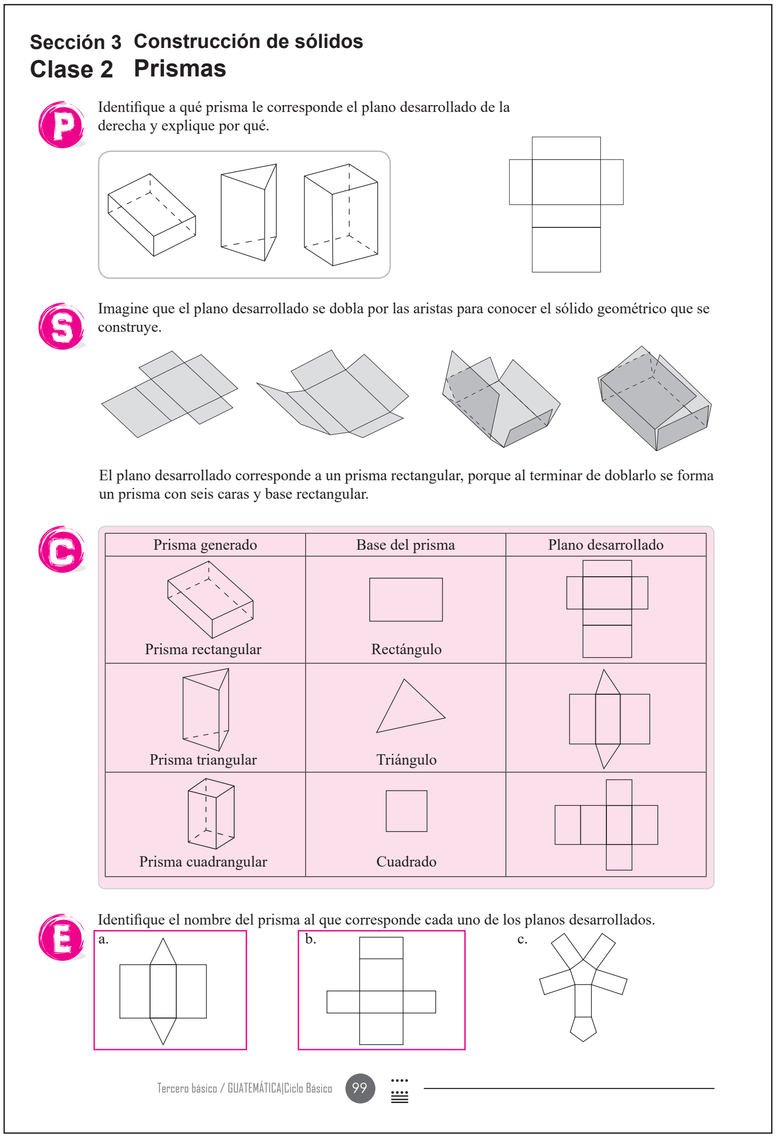
c.


[✓ d.]


e.


Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 2 Prismas

Aprendizaje esperado:
Identifica el nombre de un prisma dado su plano desarrollado.



Sección 3 **Construcción de sólidos**
Clase 2 **Prismas**

P Identifique a qué prisma le corresponde el plano desarrollado de la derecha y explique por qué.

S Imagine que el plano desarrollado se dobla por las aristas para conocer el sólido geométrico que se construye.

El plano desarrollado corresponde a un prisma rectangular, porque al terminar de doblarlo se forma un prisma con seis caras y base rectangular.

C

Prisma generado	Base del prisma	Plano desarrollado
Prisma rectangular	Rectángulo	
Prisma triangular	Triángulo	
Prisma cuadrangular	Cuadrado	

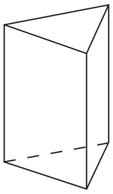
E Identifique el nombre del prisma al que corresponde cada uno de los planos desarrollados.

a. b. c.

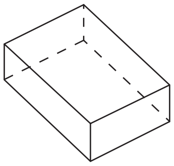
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 99

Solucionario de los ejercicios:

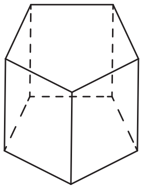
a. Prisma triangular



b. Prisma rectangular

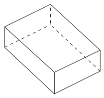
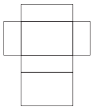
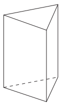
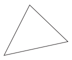
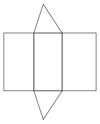
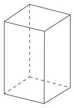
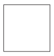
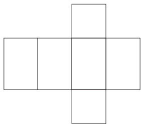


c. Prisma pentagonal



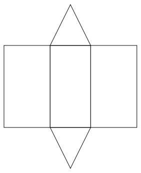
Fecha: dd – mm – aa
4-3-2 Prismas

Ⓒ

Prisma generado	Base del prisma	Plano desarrollado
 Prisma rectangular	 Rectángulo	
 Prisma triangular	 Triángulo	
 Prisma cuadrangular	 Cuadrado	

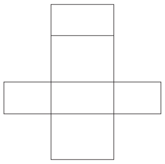
Ⓔ Identifique el nombre del prisma al que corresponden los planos desarrollados.

a.



Prisma triangular

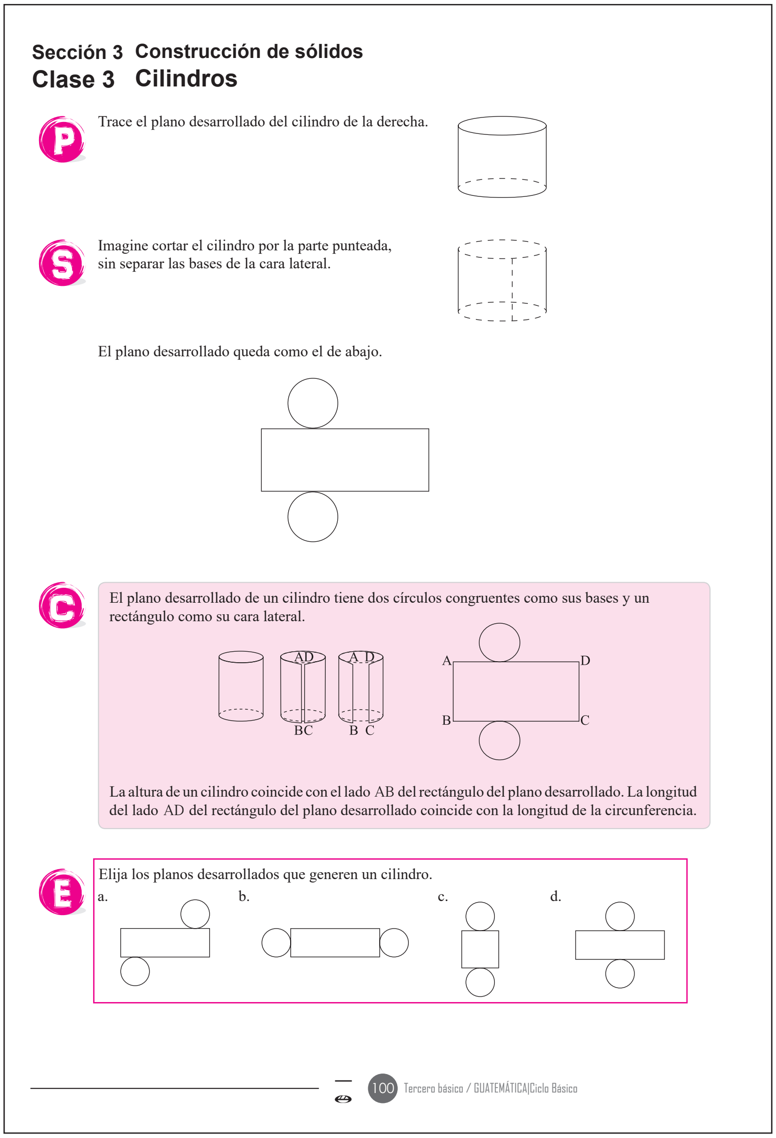
b.



Prisma rectangular

Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 3 Cilindros

Aprendizaje esperado:
Identifica el plano desarrollado de un cilindro.



Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 3 Cilindros

P Trace el plano desarrollado del cilindro de la derecha.

S Imagine cortar el cilindro por la parte punteada, sin separar las bases de la cara lateral.

El plano desarrollado queda como el de abajo.

C El plano desarrollado de un cilindro tiene dos círculos congruentes como sus bases y un rectángulo como su cara lateral.

La altura de un cilindro coincide con el lado AB del rectángulo del plano desarrollado. La longitud del lado AD del rectángulo del plano desarrollado coincide con la longitud de la circunferencia.

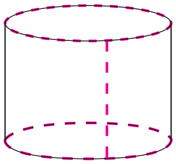
E Elija los planos desarrollados que generen un cilindro.

Solucionario del ejercicio:

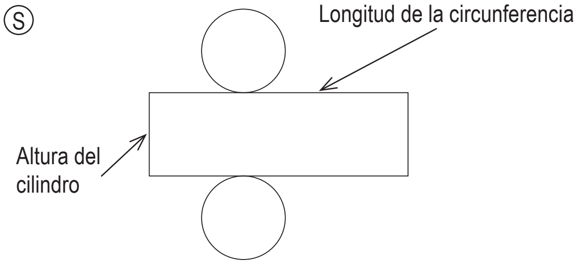
a, d

Fecha: dd – mm – aa
4-3-3 Cilindros

Ⓟ Trace el plano desarrollado del cilindro.



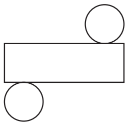
Ⓢ



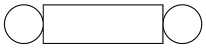
Ⓒ El plano desarrollado de un cilindro tiene dos círculos congruentes como sus bases y un rectángulo como su cara lateral.

Ⓔ Elija los planos desarrollados que generan un cilindro.

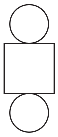
[✓ a.]



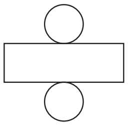
b.



c.

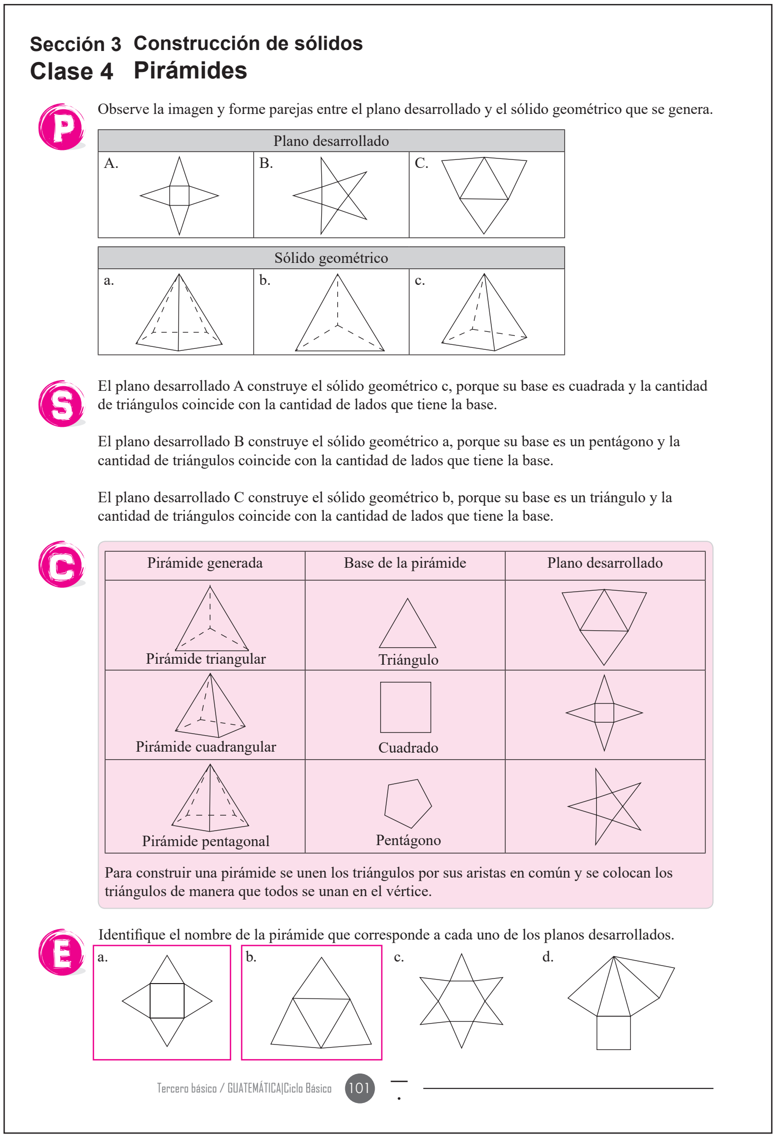


[✓ d.]



Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 4 Pirámides

Aprendizaje esperado:
Identifica el nombre de una pirámide dado su plano desarrollado.



Sección 3 **Construcción de sólidos**
Clase 4 **Pirámides**

P Observe la imagen y forme parejas entre el plano desarrollado y el sólido geométrico que se genera.

Plano desarrollado		
A.	B.	C.

Sólido geométrico		
a.	b.	c.

S El plano desarrollado A construye el sólido geométrico c, porque su base es cuadrada y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.

El plano desarrollado B construye el sólido geométrico a, porque su base es un pentágono y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.

El plano desarrollado C construye el sólido geométrico b, porque su base es un triángulo y la cantidad de triángulos coincide con la cantidad de lados que tiene la base.

C

Pirámide generada	Base de la pirámide	Plano desarrollado
Pirámide triangular	Triángulo	
Pirámide cuadrangular	Cuadrado	
Pirámide pentagonal	Pentágono	

Para construir una pirámide se unen los triángulos por sus aristas en común y se colocan los triángulos de manera que todos se unan en el vértice.

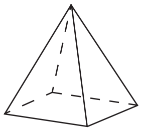
E Identifique el nombre de la pirámide que corresponde a cada uno de los planos desarrollados.

a. b. c. d.

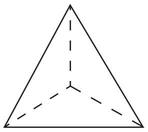
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 101

Solucionario de los ejercicios:

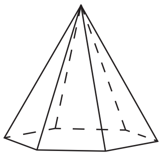
a. Pirámide cuadrangular



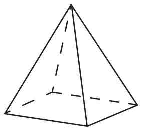
b. Pirámide triangular



c. Pirámide hexagonal

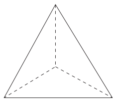
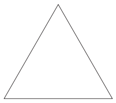
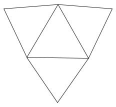
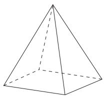
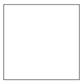
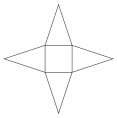
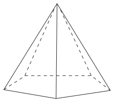
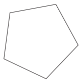
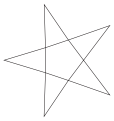


d. Pirámide cuadrangular



Fecha: dd – mm – aa
4-3-4 Pirámides

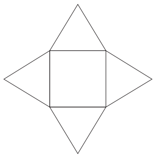
Ⓒ

Pirámide generada	Base de la pirámide	Plano desarrollado
 Pirámide triangular	 Triángulo	
 Pirámide cuadrangular	 Cuadrado	
 Pirámide pentagonal	 Pentágono	

Para construir una pirámide se unen los triángulos por sus aristas en común y se colocan los triángulos de manera que todos se unan en el vértice.

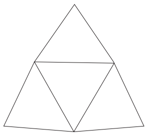
Ⓔ Identifique el nombre de la pirámide que corresponde a los planos desarrollados.

a.



Pirámide cuadrangular

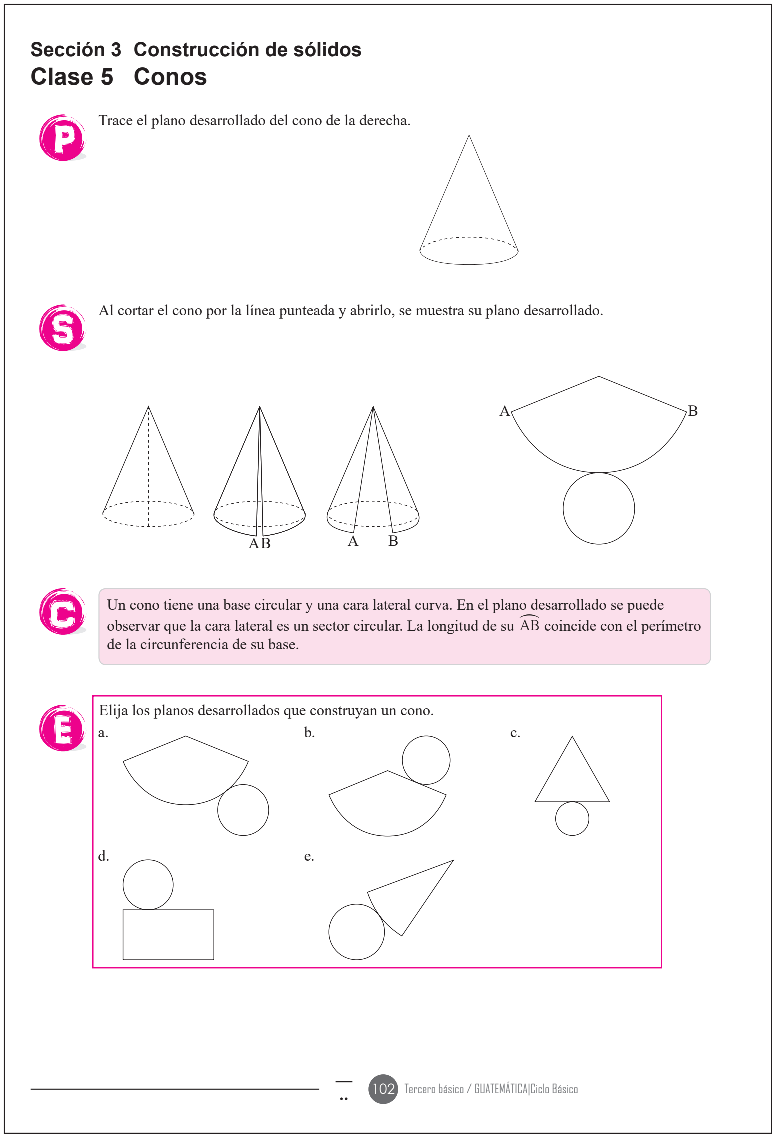
b.



Pirámide triangular

Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 5 Conos

Aprendizaje esperado:
Identifica el plano desarrollado de un cono.



Sección 3 Construcción de sólidos
Clase 5 Conos

P Trace el plano desarrollado del cono de la derecha.

S Al cortar el cono por la línea punteada y abrirlo, se muestra su plano desarrollado.

C Un cono tiene una base circular y una cara lateral curva. En el plano desarrollado se puede observar que la cara lateral es un sector circular. La longitud de su $\overset{\frown}{AB}$ coincide con el perímetro de la circunferencia de su base.

E Elija los planos desarrollados que construyan un cono.

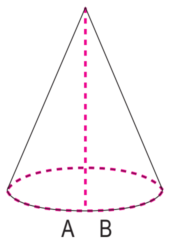
a.
b.
c.
d.
e.

Solucionario del ejercicio:

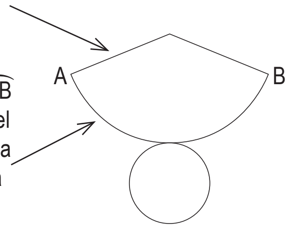
a

Fecha: dd – mm – aa
4-3-5 Conos

Ⓟ Trace el plano desarrollado del cono.



Ⓢ Sector circular

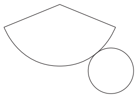


La longitud $\overset{\frown}{AB}$ coincide con el perímetro de la circunferencia de su base.

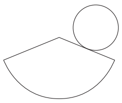
Ⓒ Un cono tiene una base circular y una cara lateral curva. En el plano desarrollado se puede observar que la cara lateral es un sector circular. La longitud de su $\overset{\frown}{AB}$ coincide con el perímetro de la circunferencia de su base.

Ⓔ Elija los planos desarrollados que construyan un cono.

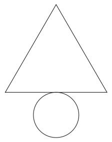
[✓ a.]



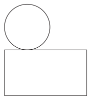
b.



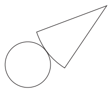
c.



d.

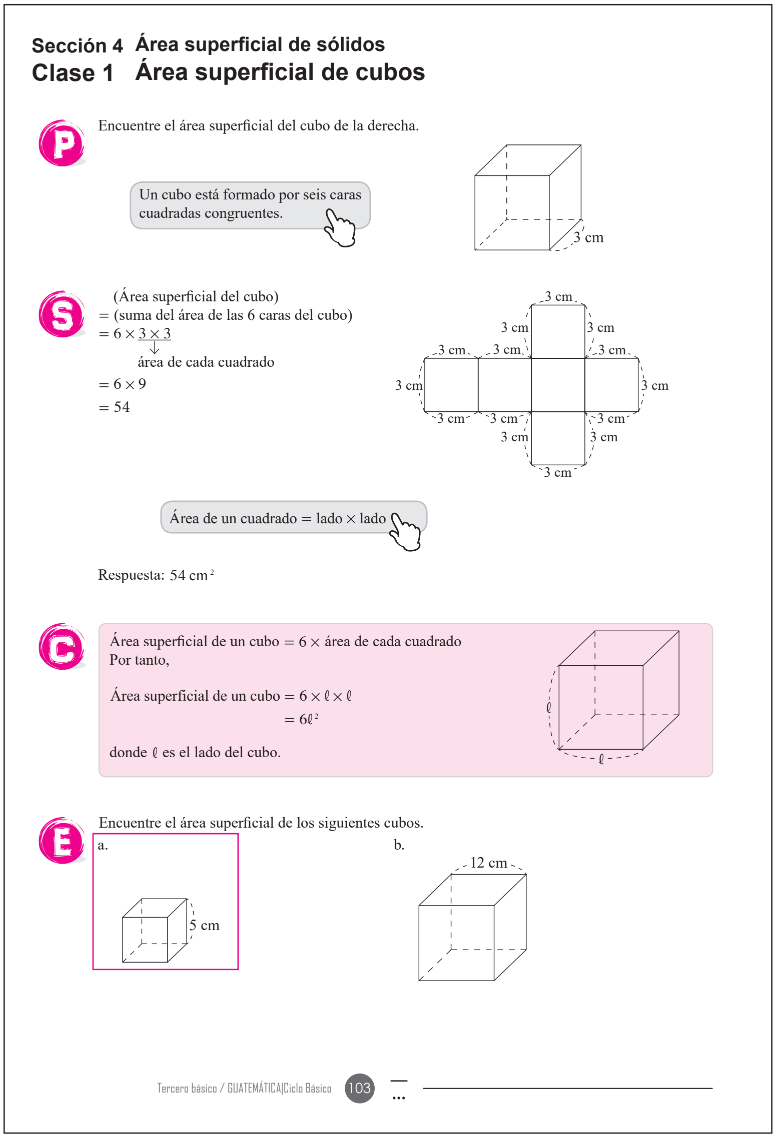


e.



Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 1 Área superficial de cubos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un cubo.



Sección 4 **Área superficial de sólidos**
Clase 1 **Área superficial de cubos**

P Encuentre el área superficial del cubo de la derecha.

Un cubo está formado por seis caras cuadradas congruentes.

S (Área superficial del cubo)
= (suma del área de las 6 caras del cubo)
$= 6 \times \underbrace{3 \times 3}_{\text{área de cada cuadrado}}$
$= 6 \times 9$
$= 54$

Área de un cuadrado = lado × lado

Respuesta: 54 cm^2

C Área superficial de un cubo = 6 × área de cada cuadrado
Por tanto,

Área superficial de un cubo $= 6 \times \ell \times \ell$
$= 6\ell^2$

donde ℓ es el lado del cubo.

E Encuentre el área superficial de los siguientes cubos.

a.

b.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 103

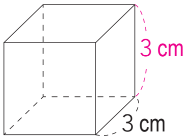
Solucionario de los ejercicios:

a. (Área superficial del cubo) $= 6 \times 5^2 = 6 \times 25 = 150$
R: 150 cm^2

b. (Área superficial del cubo) $= 6 \times 12^2 = 6 \times 144 = 864$
R: 864 cm^2

Fecha: dd – mm – aa
4-4-1 Área superficial de cubos

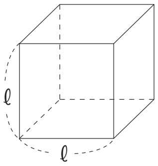
Ⓟ Encuentre el área superficial del cubo.



Ⓢ (Área superficial del cubo)
= (área de las 6 caras del cubo)
$= 6 \times \underline{3 \times 3} \longrightarrow$ área de cada cuadrado
$= 6 \times \underline{9}$
$= 54$

R: 54 cm^2

Ⓒ

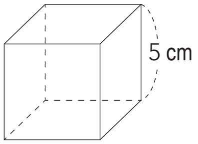


Área superficial de un cubo $= 6 \times \ell \times \ell$
$= 6\ell^2$

donde ℓ es el lado del cubo.

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.

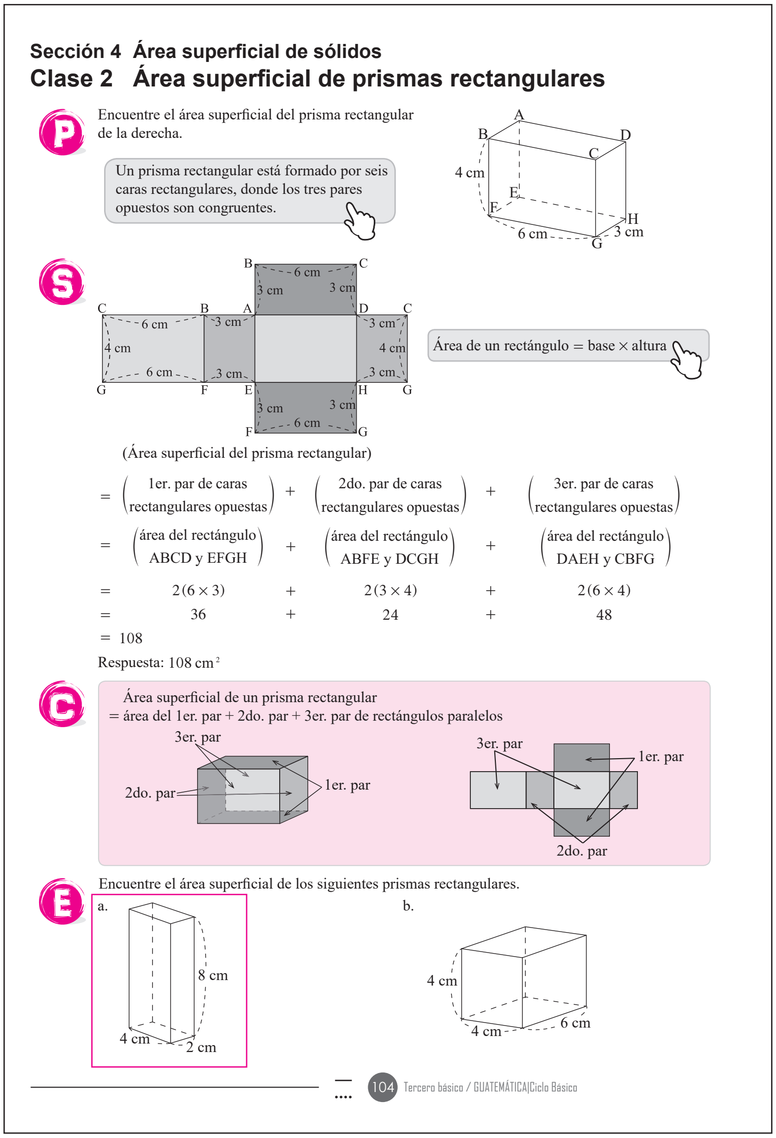


(Área superficial del cubo)
$= 6 \times 5^2$
$= 6 \times 25$
$= 150$

R: 150 cm^2

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 2 Área superficial de prismas rectangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un prisma rectangular.



Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 2 Área superficial de prismas rectangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial del prisma rectangular de la derecha.

Un prisma rectangular está formado por seis caras rectangulares, donde los tres pares opuestos son congruentes.

Ⓢ

Área de un rectángulo = base × altura

(Área superficial del prisma rectangular)

= (1er. par de caras rectangulares opuestas) + (2do. par de caras rectangulares opuestas) + (3er. par de caras rectangulares opuestas)

= (área del rectángulo ABCD y EFGH) + (área del rectángulo ABFE y DCGH) + (área del rectángulo DAEH y CBFG)

= $2(6 \times 3)$ + $2(3 \times 4)$ + $2(6 \times 4)$

= 36 + 24 + 48

= 108

Respuesta: 108 cm^2

Ⓒ Área superficial de un prisma rectangular
= área del 1er. par + 2do. par + 3er. par de rectángulos paralelos

Ⓔ Encuentre el área superficial de los siguientes prismas rectangulares.

a.

b.

104 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

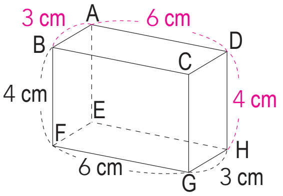
Solucionario del ejercicio:

a. (Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(4 \times 2) + 2(2 \times 8) + 2(4 \times 8)$
$= 16 + 32 + 64 = 112$
R: 112 cm^2

b. (Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(4 \times 6) + 2(6 \times 4) + 2(4 \times 4)$
$= 48 + 48 + 32 = 128$
R: 128 cm^2

Fecha: dd – mm – aa
4-4-2 Área superficial de prismas rectangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial del prisma rectangular.



Ⓢ (Área superficial del prisma rectangular)

= 1er. par + 2do. par + 3er. par

= (área del rectángulo ABCD y EFGH) + (área del rectángulo ABFE y DCGH) + (área del rectángulo DAEH y CBFG)

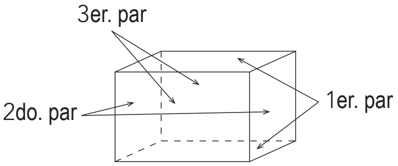
= $2(6 \times 3)$ + $2(3 \times 4)$ + $2(6 \times 4)$

= 36 + 24 + 48

= 108

R: 108 cm^2

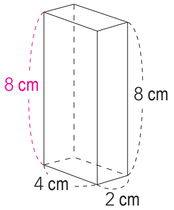
Ⓒ



Área superficial de un prisma rectangular
= área de 1er. par + 2do. par + 3er. par de rectángulos paralelos

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.

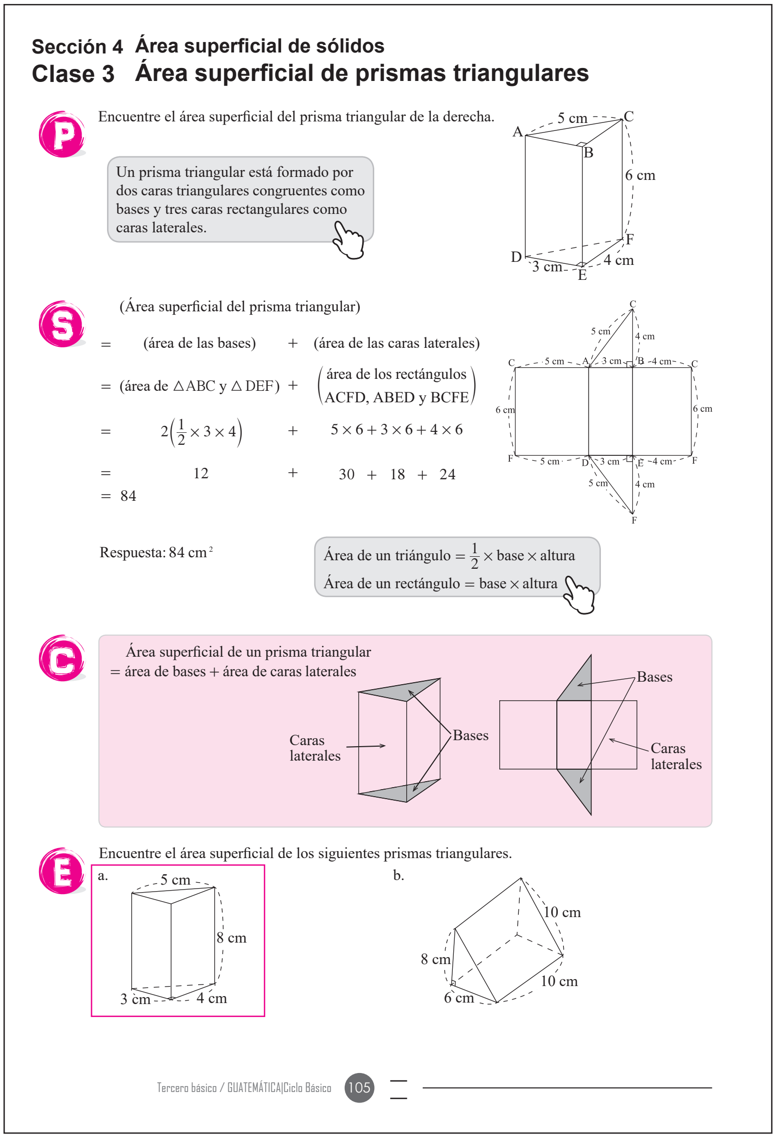


(Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(4 \times 2) + 2(2 \times 8) + 2(4 \times 8)$
$= 16 + 32 + 64$
$= 112$

R: 112 cm^2

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 3 Área superficial de prismas triangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un prisma triangular.



Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 3 Área superficial de prismas triangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial del prisma triangular de la derecha.

Un prisma triangular está formado por dos caras triangulares congruentes como bases y tres caras rectangulares como caras laterales.

Ⓢ (Área superficial del prisma triangular)

= (área de las bases) + (área de las caras laterales)

= (área de △ABC y △DEF) + (área de los rectángulos ACFD, ABED y BCFE)

$= 2\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right) + 5\times 6+3\times 6+4\times 6$

$= 12 + 30 + 18 + 24$

$= 84$

Respuesta: 84 cm²

Área de un triángulo $= \frac{1}{2}\times$ base $\times$ altura
Área de un rectángulo = base × altura

Ⓒ Área superficial de un prisma triangular
= área de bases + área de caras laterales

Ⓔ Encuentre el área superficial de los siguientes prismas triangulares.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 105

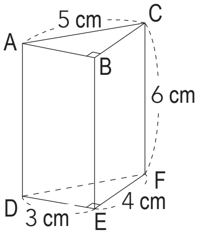
Solucionario de los ejercicios:

a. (Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)+5\times 8+3\times 8+4\times 8$
$= 12+40+24+32 = 108$
R: 108 cm²

b. (Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2}\times 6\times 8\right)+10\times 10+6\times 10+8\times 10$
$= 48+100+60+80 = 288$
R: 288cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-4-3 Área superficial de prismas triangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial del prisma triangular.



Ⓢ (Área superficial del prisma triangular)

= (área de las bases) + (área de caras laterales)

= (área de △ABC y △DEF) + (área de los rectángulos ACFD, ABED y BCFE)

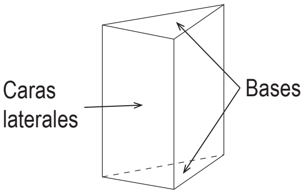
$= 2\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right) + 5\times 6+3\times 6+4\times 6$

$= 12 + 30 + 18 + 24$

$= 84$

R: 84 cm²

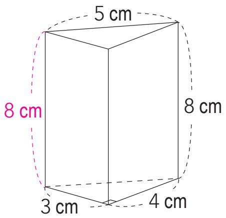
Ⓒ



Área superficial de un prisma triangular
= área de bases + área de caras laterales

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.



(Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2}\times 3\times 4\right)+5\times 8+3\times 8+4\times 8$
$= 12+40+24+32$
$= 108$

R: 108 cm²

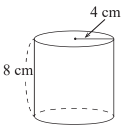
Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 4 Área superficial de cilindros

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un cilindro.

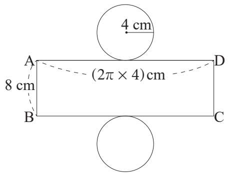
Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 4 Área superficial de cilindros

P Encuentre el área superficial del cilindro de la derecha.

Un cilindro está formado por dos bases circulares que son congruentes y una cara lateral que forma un rectángulo cuando se extiende.



S (Área superficial del cilindro)
= (área de las bases) + (área de la cara lateral)
= (área de dos círculos) + (área del rectángulo ABCD)



Para encontrar el área del rectángulo ABCD primero se encuentra la longitud del AD.

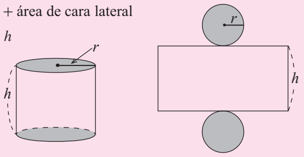
Área de un rectángulo = base × altura

$= \quad 2(\pi \times 4^2) \quad + \quad (2\pi \times 4) \times 8$
$= \quad 32\pi \quad + \quad 64\pi$
$= 96\pi$

Respuesta: 96π cm^2

Área de un círculo $= \pi \times$ radio $\times$ radio
$= \pi r^2$
Perímetro de una circunferencia
$= \pi \times$ diámetro
$= \pi \times 2 \times$ radio
$= 2\pi r$

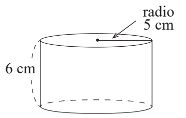
C Área superficial de un cilindro = área de bases + área de cara lateral
$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$



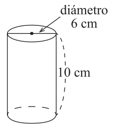
donde r es el radio del círculo (base) y h es la altura del cilindro.

E Encuentre el área superficial de los siguientes cilindros.

a.



b.



Solucionario del ejercicio:

a. (Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times 5^2 + 2\pi \times 5 \times 6 = 50\pi + 60\pi$
$= 110\pi$

R: 110π cm^2

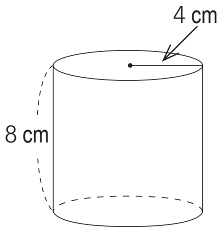
b. (Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2\pi \times \left(\frac{6}{2}\right) \times 10$
$= 2\pi \times 3^2 + 2\pi \times 3 \times 10 = 18\pi + 60\pi$
$= 78\pi$

R: 78π cm^2

Fecha: dd – mm – aa
4-4-4 Área superficial de cilindros

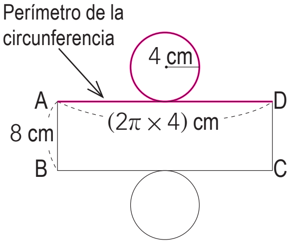
Ⓟ Encuentre el área superficial del cilindro.

Área de un círculo $= \pi r^2$
Perímetro de una circunferencia $= 2\pi r$

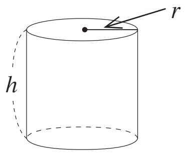


Ⓢ (Área superficial del cilindro)
= (área de bases) + (área de la cara lateral)
$= \quad 2(\pi \times 4^2) \quad + \quad (2\pi \times 4) \times 8$
$= \quad 32\pi \quad + \quad 64\pi$
$= 96\pi$

R: 96π cm^2



Ⓒ

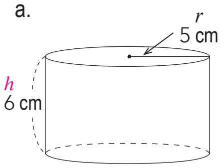


Área superficial de un cilindro
= área de bases + área de cara lateral
$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$

donde r es el radio del círculo (base) y h es la altura del cilindro.

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.

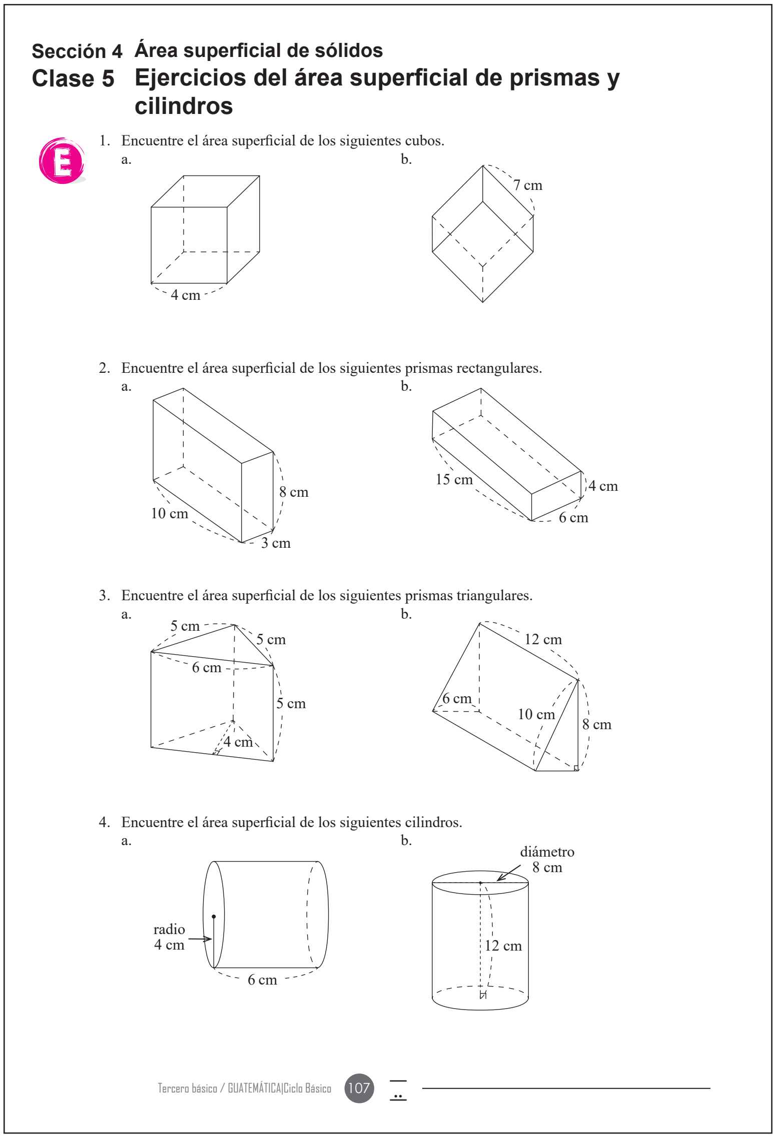


(Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times 5^2 + 2\pi \times 5 \times 6$
$= 50\pi + 60\pi$
$= 110\pi$

R: 110π cm^2

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 5 Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un prisma y un cilindro.



Sección 4 **Área superficial de sólidos**
Clase 5 **Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros**

E

1. Encuentre el área superficial de los siguientes cubos.

2. Encuentre el área superficial de los siguientes prismas rectangulares.

3. Encuentre el área superficial de los siguientes prismas triangulares.

4. Encuentre el área superficial de los siguientes cilindros.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 107

Solucionario de los ejercicios:

1. a. (Área superficial del cubo) $= 6 \times 4^2 = 6 \times 16$
$= 96$
R: 96 cm²

b. (Área superficial del cubo) $= 6 \times 7^2 = 6 \times 49$
$= 294$
R: 294 cm²

2. a. (Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(10 \times 3) + 2(3 \times 8) + 2(10 \times 8)$
$= 60 + 48 + 160 = 268$
R: 268 cm²

b. (Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(15 \times 6) + 2(6 \times 4) + 2(15 \times 4)$
$= 180 + 48 + 120 = 348$
R: 348 cm²

3. a. (Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\right) + 6 \times 5 + 5 \times 5 + 5 \times 5$
$= 24 + 30 + 25 + 25 = 104$
R: 104 cm²

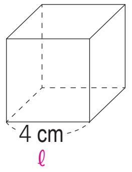
b. (Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 8\right) + 10 \times 12 + 6 \times 12 + 8 \times 12$
$= 48 + 120 + 72 + 96 = 336$
R: 336 cm²

4. a. (Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times 4^2 + 2\pi \times 4 \times 6 = 32\pi + 48\pi = 80\pi$
R: 80π cm²

b. (Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 + 2\pi \times \left(\frac{8}{2}\right) \times 12$
$= 2\pi \times 4^2 + 2\pi \times 4 \times 12 = 32\pi + 96\pi = 128\pi$
R: 128π cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-4-5 Ejercicios del área superficial de prismas y cilindros
Ⓔ 1. Encuentre el área superficial del cubo.

a.

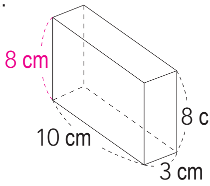


Área superficial de un cubo = $6\ell^2$

(Área superficial del cubo)
$= 6 \times 4^2$
$= 6 \times 16$
$= 96$ R: 96 cm²

2. Encuentre el área superficial del prisma rectangular.

a.

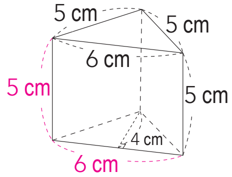


Área superficial de un prisma rectangular
= área del 1er. par + 2do. par + 3er. par
de rectángulos paralelos

(Área superficial del prisma rectangular)
$= 2(10 \times 3) + 2(3 \times 8) + 2(10 \times 8)$
$= 60 + 48 + 160$
$= 268$ R: 268 cm²

3. Encuentre el área superficial del prisma triangular.

a.

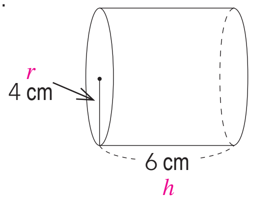


Área superficial de un prisma triangular
= área de bases + área de caras laterales

(Área superficial del prisma triangular)
$= 2\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 4\right) + 6 \times 5 + 5 \times 5 + 5 \times 5$
$= 24 + 30 + 25 + 25$
$= 104$ R: 104 cm²

4. Encuentre el área superficial del cilindro.

a.

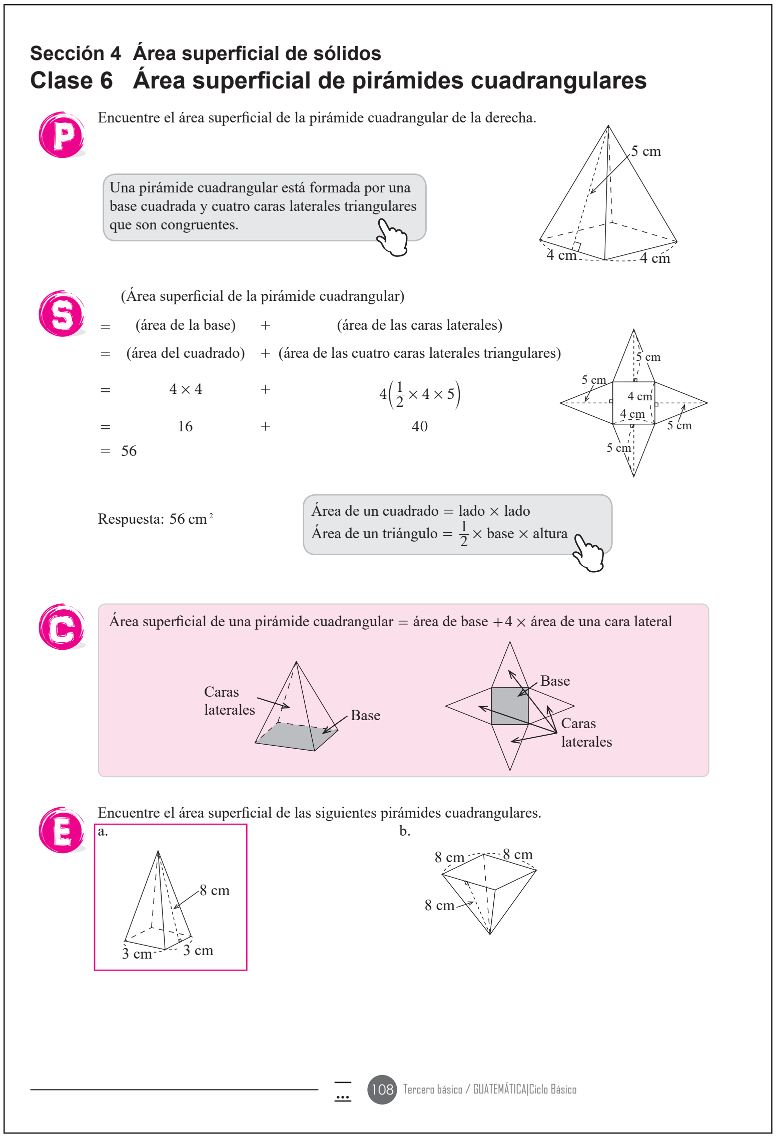


(Área superficial del cilindro)
$= 2\pi r^2 + 2\pi r \times h$

(Área superficial del cilindro)
$= 2\pi \times 4^2 + 2\pi \times 4 \times 6$
$= 32\pi + 48\pi$
$= 80\pi$ R: 80π cm²

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 6 Área superficial de pirámides cuadrangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de una pirámide cuadrangular.



Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 6 Área superficial de pirámides cuadrangulares

P Encuentre el área superficial de la pirámide cuadrangular de la derecha.

Una pirámide cuadrangular está formada por una base cuadrada y cuatro caras laterales triangulares que son congruentes.

S (Área superficial de la pirámide cuadrangular)

$= \text{(área de la base)} + \text{(área de las caras laterales)}$

$= \text{(área del cuadrado)} + \text{(área de las cuatro caras laterales triangulares)}$

$= 4 \times 4 + 4\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 5\right)$

$= 16 + 40$

$= 56$

Respuesta: 56 cm²

Área de un cuadrado = lado × lado
Área de un triángulo = $\frac{1}{2}$ × base × altura

C Área superficial de una pirámide cuadrangular = área de base +4 × área de una cara lateral

E Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.

b.

108 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

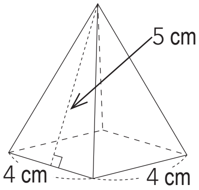
Solucionario del ejercicio:

a. (Área superficial de la pirámide cuadrangular)
$= 3 \times 3 + 4\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 8\right) = 9 + 48 = 57$
R: 57 cm²

b. (Área superficial de la pirámide cuadrangular)
$= 8 \times 8 + 4\left(\frac{1}{2} \times 8 \times 8\right) = 64 + 128 = 192$
R: 192 cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-4-6 Área superficial de pirámides cuadrangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial de la pirámide cuadrangular.



Ⓢ (Área superficial de la pirámide cuadrangular)

$= \text{(área de la base cuadrada)} + \text{(área de las cuatro caras laterales triangulares)}$

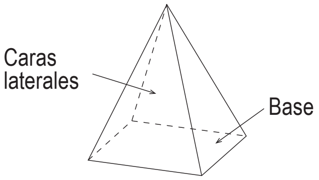
$= 4 \times 4 + 4\left(\frac{1}{2} \times 4 \times 5\right)$

$= 16 + 40$

$= 56$

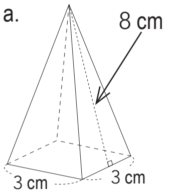
R: 56 cm²

Ⓒ



Área superficial de una pirámide cuadrangular
= área de base + 4 × área de una cara lateral

Ⓔ Encuentre el área superficial.

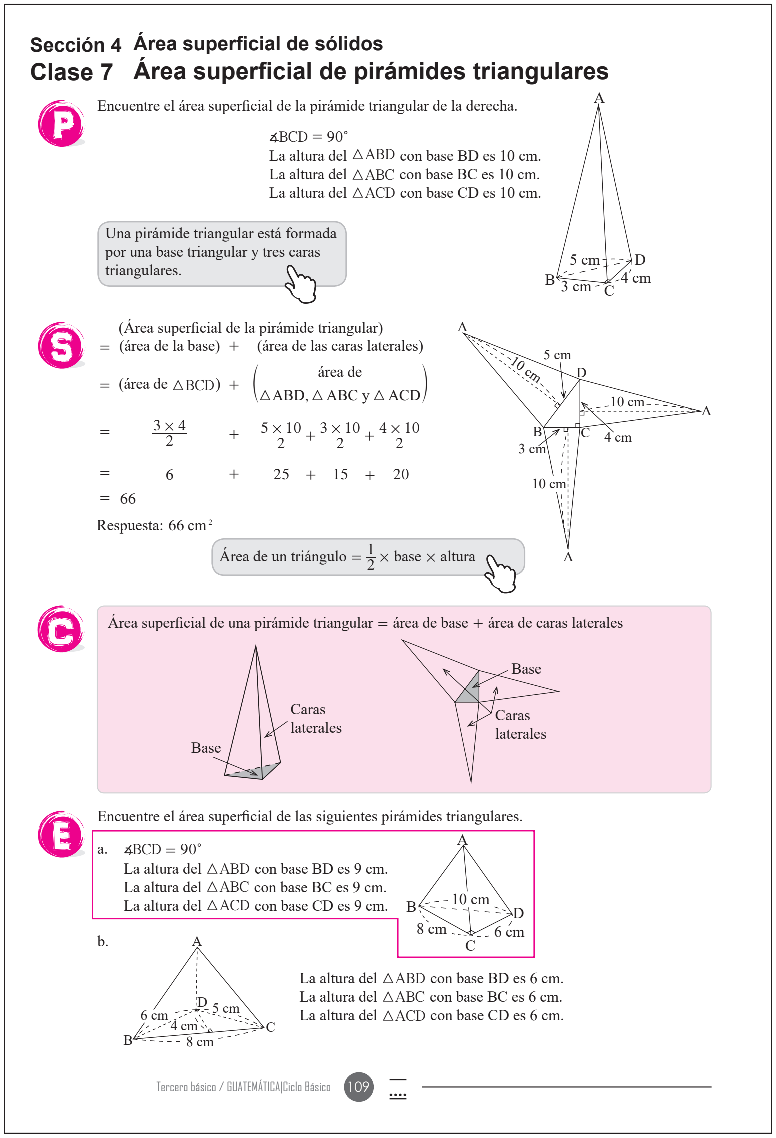
a.


(Área superficial de la pirámide cuadrangular)
$= 3 \times 3 + 4\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 8\right)$
$= 9 + 48$
$= 57$

R: 57 cm²

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 7 Área superficial de pirámides triangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de una pirámide triangular.



Sección 4 **Área superficial de sólidos**
Clase 7 **Área superficial de pirámides triangulares**

P Encuentre el área superficial de la pirámide triangular de la derecha.

$\measuredangle BCD = 90°$
La altura del △ABD con base BD es 10 cm.
La altura del △ABC con base BC es 10 cm.
La altura del △ACD con base CD es 10 cm.

Una pirámide triangular está formada por una base triangular y tres caras triangulares.

S (Área superficial de la pirámide triangular)
= (área de la base) + (área de las caras laterales)
= (área de △BCD) + (área de △ABD, △ABC y △ACD)
$= \frac{3\times4}{2} + \frac{5\times10}{2} + \frac{3\times10}{2} + \frac{4\times10}{2}$
= 6 + 25 + 15 + 20
= 66

Respuesta: 66 cm²

Área de un triángulo $= \frac{1}{2} \times$ base × altura

C Área superficial de una pirámide triangular = área de base + área de caras laterales

E Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides triangulares.

a. $\measuredangle BCD = 90°$
La altura del △ABD con base BD es 9 cm.
La altura del △ABC con base BC es 9 cm.
La altura del △ACD con base CD es 9 cm.

b. La altura del △ABD con base BD es 6 cm.
La altura del △ABC con base BC es 6 cm.
La altura del △ACD con base CD es 6 cm.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 109

Solucionario de los ejercicios:

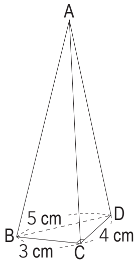
a. (Área superficial de la pirámide triangular)
$= \frac{8\times6}{2} + \frac{10\times9}{2} + \frac{8\times9}{2} + \frac{6\times9}{2} = 24 + 45 + 36 + 27$
$= 132$
R: 132 cm²

b. (Área superficial de la pirámide triangular)
$= \frac{8\times4}{2} + \frac{6\times6}{2} + \frac{8\times6}{2} + \frac{5\times6}{2} = 16 + 18 + 24 + 15$
$= 73$
R: 73 cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-4-7 Área superficial de pirámides triangulares

Ⓟ Encuentre el área superficial de la pirámide triangular.

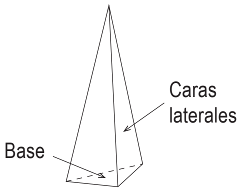
$\measuredangle BCD = 90°$
La altura del △ABD con base BD es 10 cm.
La altura del △ABC con base BC es 10 cm.
La altura del △ACD con base CD es 10 cm.



Ⓢ (Área superficial de la pirámide triangular)
= (área de la base) + (área de las caras laterales)
= (área de △BCD) + (área de △ABD, △ABC y △ACD)
$= \frac{3\times4}{2} + \frac{5\times10}{2} + \frac{3\times10}{2} + \frac{4\times10}{2}$
= 6 + 25 + 15 + 20
= 66

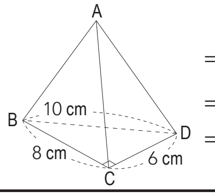
R: 66 cm²

Ⓒ



Área superficial de una pirámide triangular
= área de base + área de caras laterales

Ⓔ Encuentre el área superficial.
a. $\measuredangle BCD = 90°$
La altura del △ABD con base BD es 9 cm.
La altura del △ABC con base BC es 9 cm.
La altura del △ACD con base CD es 9 cm.

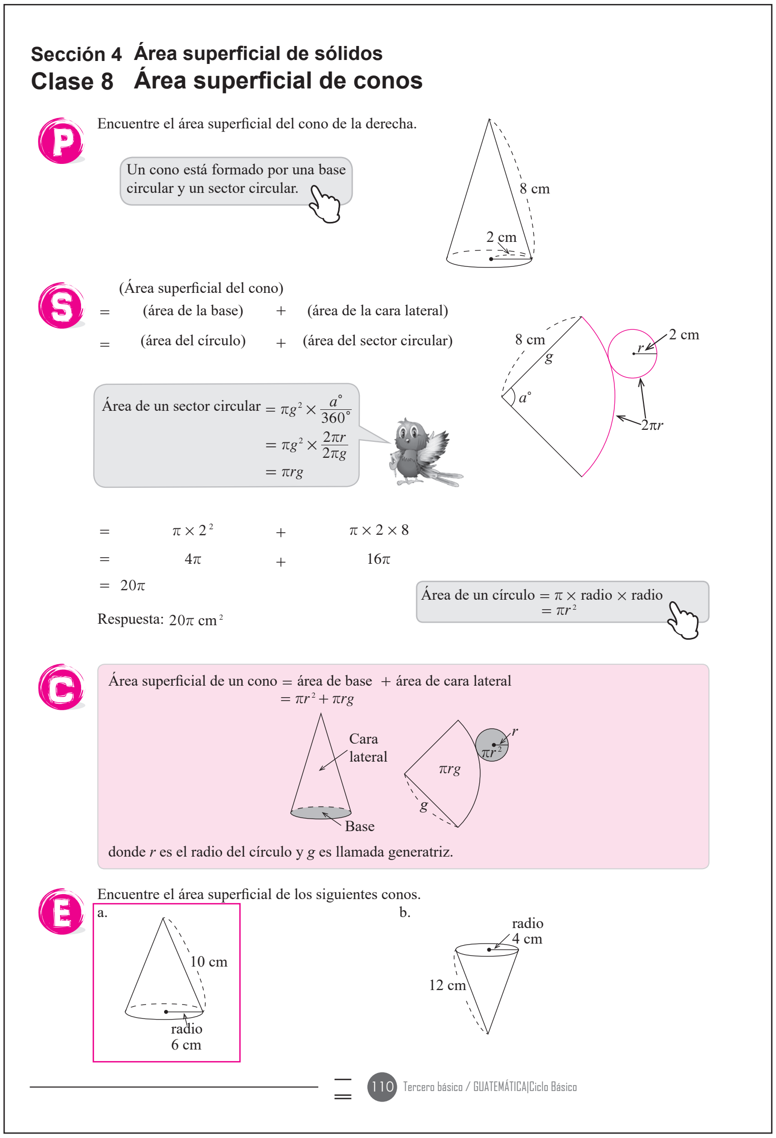


(Área superficial de la pirámide triangular)
$= \frac{8\times6}{2} + \frac{10\times9}{2} + \frac{8\times9}{2} + \frac{6\times9}{2}$
$= 24 + 45 + 36 + 27$
$= 132$

R: 132 cm²

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 8 Área superficial de conos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de un cono.



Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 8 Área superficial de conos

P Encuentre el área superficial del cono de la derecha.

Un cono está formado por una base circular y un sector circular.

S (Área superficial del cono)

= (área de la base) + (área de la cara lateral)

= (área del círculo) + (área del sector circular)

Área de un sector circular $= \pi g^2 \times \frac{a^\circ}{360^\circ}$
$= \pi g^2 \times \frac{2\pi r}{2\pi g}$
$= \pi rg$

$= \pi \times 2^2 + \pi \times 2 \times 8$

$= 4\pi + 16\pi$

$= 20\pi$

Área de un círculo $= \pi \times$ radio $\times$ radio $= \pi r^2$

Respuesta: 20π cm²

C Área superficial de un cono = área de base + área de cara lateral $= \pi r^2 + \pi rg$

donde r es el radio del círculo y g es llamada generatriz.

E Encuentre el área superficial de los siguientes conos.

a.

b.

110 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

a. (Área superficial del cono) $= \pi \times 6^2 + \pi \times 6 \times 10$
$= 36\pi + 60\pi = 96\pi$
R: 96π cm²

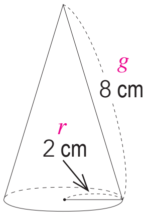
b. (Área superficial del cono) $= \pi \times 4^2 + \pi \times 4 \times 12$
$= 16\pi + 48\pi = 64\pi$
R: 64π cm²

Fecha: dd – mm – aa
4-4-8 Área superficial de conos

Ⓟ Encuentre el área superficial del cono.

Área de un círculo $= \pi r^2$

Área de un sector circular $= \pi rg$



Ⓢ (Área superficial del cono)

= (área de la base) + (área de la cara lateral)

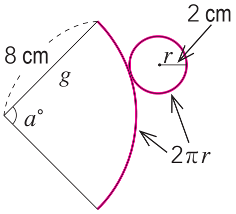
= (área del círculo) + (área del sector circular)

$= \pi \times 2^2 + \pi \times 2 \times 8$

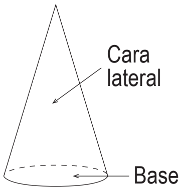
$= 4\pi + 16\pi$

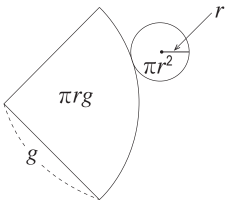
$= 20\pi$

R: 20π cm²



Ⓒ



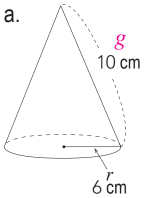


Área superficial de un cono
= área de base + área de cara lateral
$= \pi r^2 + \pi rg$

donde r es el radio del círculo y g es llamada generatriz.

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.

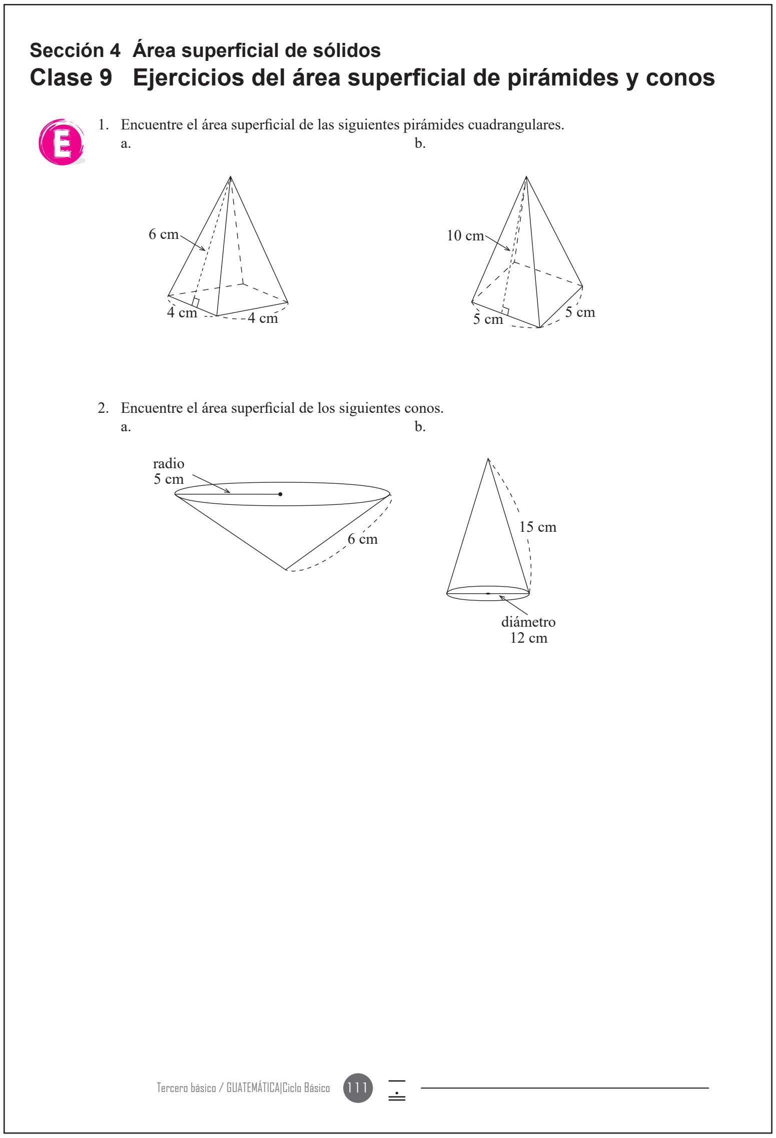


(Área superficial del cono)
$= \pi \times 6^2 + \pi \times 6 \times 10$
$= 36\pi + 60\pi$
$= 96\pi$

R: 96π cm²

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de una pirámide y un cono.



Sección 4 Área superficial de sólidos

Clase 9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos

1. Encuentre el área superficial de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a. b.

2. Encuentre el área superficial de los siguientes conos.

a. b.

Solucionario de los ejercicios:

1. a. (Área superficial de la pirámide cuadrangular)
$= 4\times4+4\left(\frac{1}{2}\times4\times6\right)=16+48=64$
R: 64 cm^2

b. (Área superficial de la pirámide cudrangular)
$= 5\times5+4\left(\frac{1}{2}\times5\times10\right)=25+100=125$
R: 125 cm^2

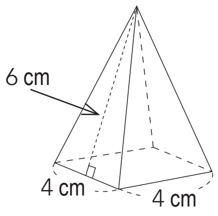
2. a. (Área superficial del cono) $=\pi\times5^2+\pi\times5\times6$
$=25\pi+30\pi=55\pi\ \text{cm}^2$
R: $55\pi\ \text{cm}^2$

b. (Área superficial del cono)
$=\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)^2+\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)\times15=\pi\times6^2+\pi\times6\times15$
$=36\pi+90\pi=126\pi$
R: $126\pi\ \text{cm}^2$

Fecha: dd – mm – aa
4-4-9 Ejercicios del área superficial de pirámides y conos

Ⓔ 1. Encuentre el área superficial de la pirámide cuadrangular.

a.



Área superficial de una pirámide cuadrangular
= área de base + 4 × área de una cara lateral

(Área superficial de la pirámide cuadrangular)

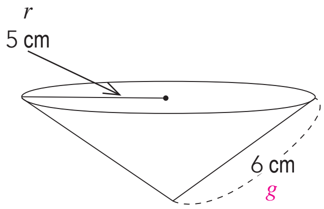
$= 4\times4+4\left(\frac{1}{2}\times4\times6\right)$

$= 16+48$

$= 64$ R: 64 cm^2

2. Encuentre el área superficial del cono.

a.



Área superficial de un cono = $\pi r^2+\pi rg$

(Área superficial del cono)

$=\pi\times5^2+\pi\times5\times6$

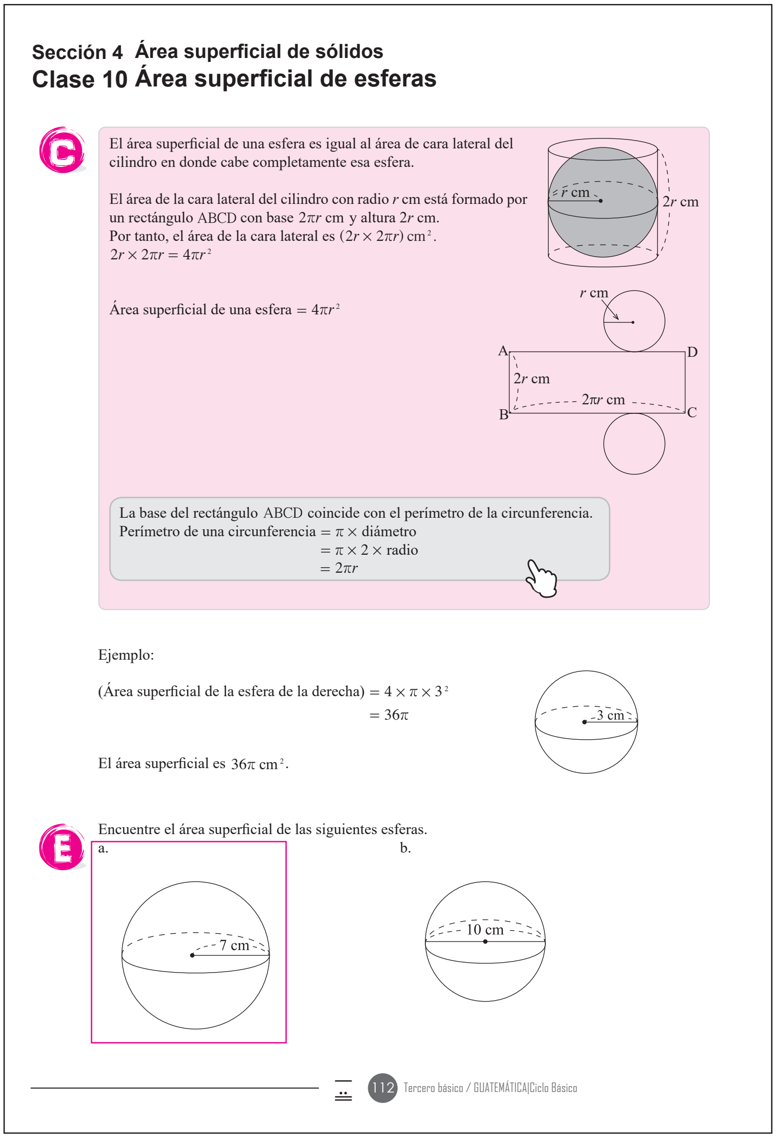
$=25\pi+30\pi$

$=55\pi$

R: $55\pi\ \text{cm}^2$

Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 10 Área superficial de esferas

Aprendizaje esperado:
Encuentra el área superficial de una esfera.



Sección 4 Área superficial de sólidos
Clase 10 Área superficial de esferas

C El área superficial de una esfera es igual al área de cara lateral del cilindro en donde cabe completamente esa esfera.

El área de la cara lateral del cilindro con radio r cm está formado por un rectángulo ABCD con base $2\pi r$ cm y altura $2r$ cm.
Por tanto, el área de la cara lateral es $(2r \times 2\pi r)$ cm^2.
$2r \times 2\pi r = 4\pi r^2$

Área superficial de una esfera $= 4\pi r^2$

La base del rectángulo ABCD coincide con el perímetro de la circunferencia.
Perímetro de una circunferencia $= \pi \times$ diámetro
$= \pi \times 2 \times$ radio
$= 2\pi r$

Ejemplo:

(Área superficial de la esfera de la derecha) $= 4 \times \pi \times 3^2$
$= 36\pi$

El área superficial es 36π cm^2.

E Encuentre el área superficial de las siguientes esferas.

a.

b.

112 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

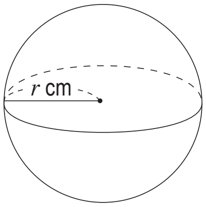
Solucionario del ejercicio:

a. (Área superficial de la esfera)
$= 4 \times \pi \times 7^2 = 196\pi$
R: 196π cm^2

b. (Área superficial de la esfera)
$= 4 \times \pi \times \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 4 \times \pi \times 5^2 = 100\pi$
R: 100π cm^2

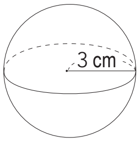
Fecha: dd – mm – aa
4-4-10 Área superficial de esferas

Ⓒ El área superficial de una esfera es igual al área de cara lateral del cilindro donde cabe completamente esa esfera.



Área superficial de una esfera $= 4\pi r^2$

Ejemplo:

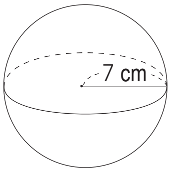


(Área superficial de la esfera) $= 4 \times \pi \times 3^2$
$= 36\pi$

R: 36π cm^2

Ⓔ Encuentre el área superficial.

a.

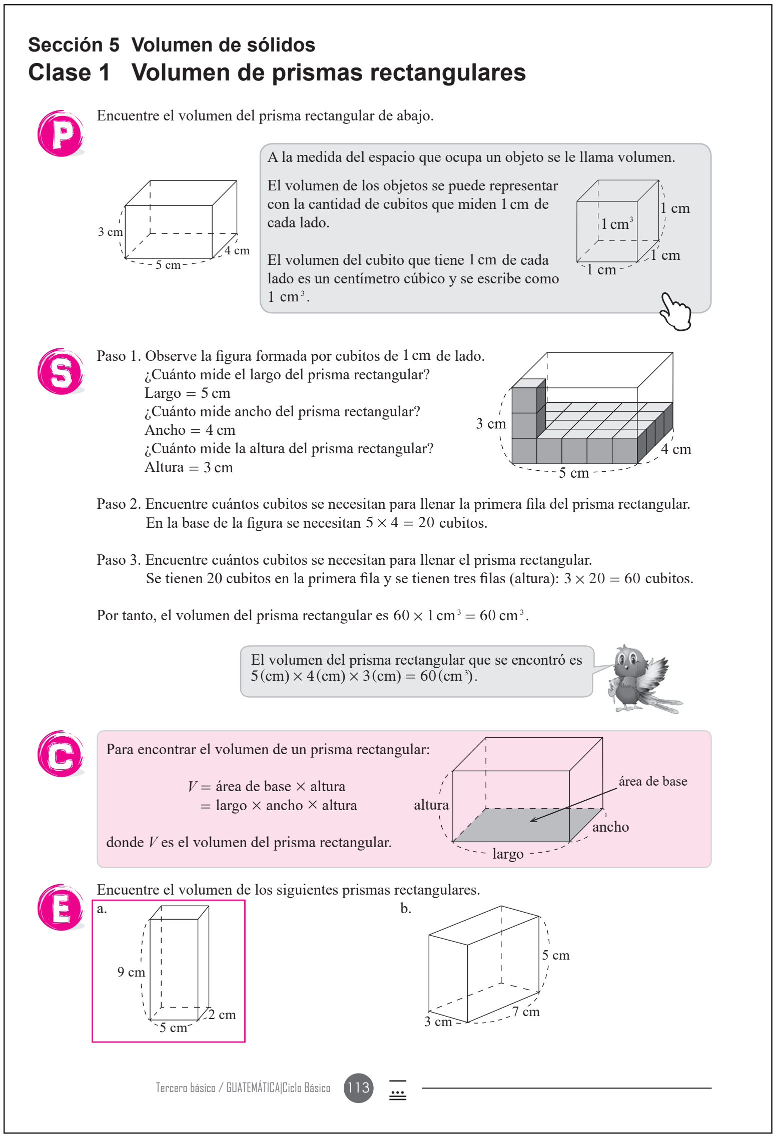


(Área superficial de la esfera)
$= 4 \times \pi \times 7^2$
$= 196\pi$

R: 196π cm^2

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 1 Volumen de prismas rectangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un prisma rectangular.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 1 Volumen de prismas rectangulares

P Encuentre el volumen del prisma rectangular de abajo.

A la medida del espacio que ocupa un objeto se le llama volumen.

El volumen de los objetos se puede representar con la cantidad de cubitos que miden 1 cm de cada lado.

El volumen del cubito que tiene 1 cm de cada lado es un centímetro cúbico y se escribe como 1 cm³.

S Paso 1. Observe la figura formada por cubitos de 1 cm de lado.
¿Cuánto mide el largo del prisma rectangular?
Largo = 5 cm
¿Cuánto mide ancho del prisma rectangular?
Ancho = 4 cm
¿Cuánto mide la altura del prisma rectangular?
Altura = 3 cm

Paso 2. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar la primera fila del prisma rectangular.
En la base de la figura se necesitan 5 × 4 = 20 cubitos.

Paso 3. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar el prisma rectangular.
Se tienen 20 cubitos en la primera fila y se tienen tres filas (altura): 3 × 20 = 60 cubitos.

Por tanto, el volumen del prisma rectangular es 60 × 1 cm³ = 60 cm³.

El volumen del prisma rectangular que se encontró es 5 (cm) × 4 (cm) × 3 (cm) = 60 (cm³).

C Para encontrar el volumen de un prisma rectangular:

V = área de base × altura
= largo × ancho × altura

donde V es el volumen del prisma rectangular.

E Encuentre el volumen de los siguientes prismas rectangulares.

a.

b.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 113

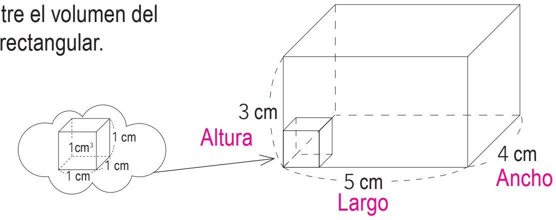
Solucionario de los ejercicios:

a. $V = 5 \times 2 \times 9 = 90$
R: 90 cm³

b. $V = 7 \times 3 \times 5 = 105$
R: 105 cm³

Fecha: dd – mm – aa
4-5-1 Volumen de prismas rectangulares

Ⓟ Encuentre el volumen del prisma rectangular.



Ⓢ Paso 1. Largo = 5 cm, Ancho = 4 cm, Altura = 3 cm
Paso 2. ¿Cuántos cubitos de 1 cm³ se necesitan para llenar la primera fila?
$5 \times 4 = 20$ cubitos
Paso 3. ¿Cuántos cubitos de 1 cm³ se necesitan para llenar el prisma?
$3 \times 20 = 60$ cubitos
Por tanto, el volumen del prisma rectangular es $60 \times 1\,\text{cm}^3 = 60\,\text{cm}^3$.

R: El volumen del prisma rectangular es 5 (cm) × 4 (cm) × 3 (cm) = 60 (cm³).

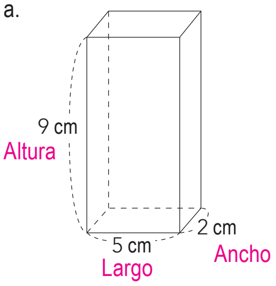
Ⓒ Para encontrar el volumen de un prisma rectangular:

V = área de base × altura
= largo × ancho × altura

donde V es el volumen del prisma rectangular.

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.

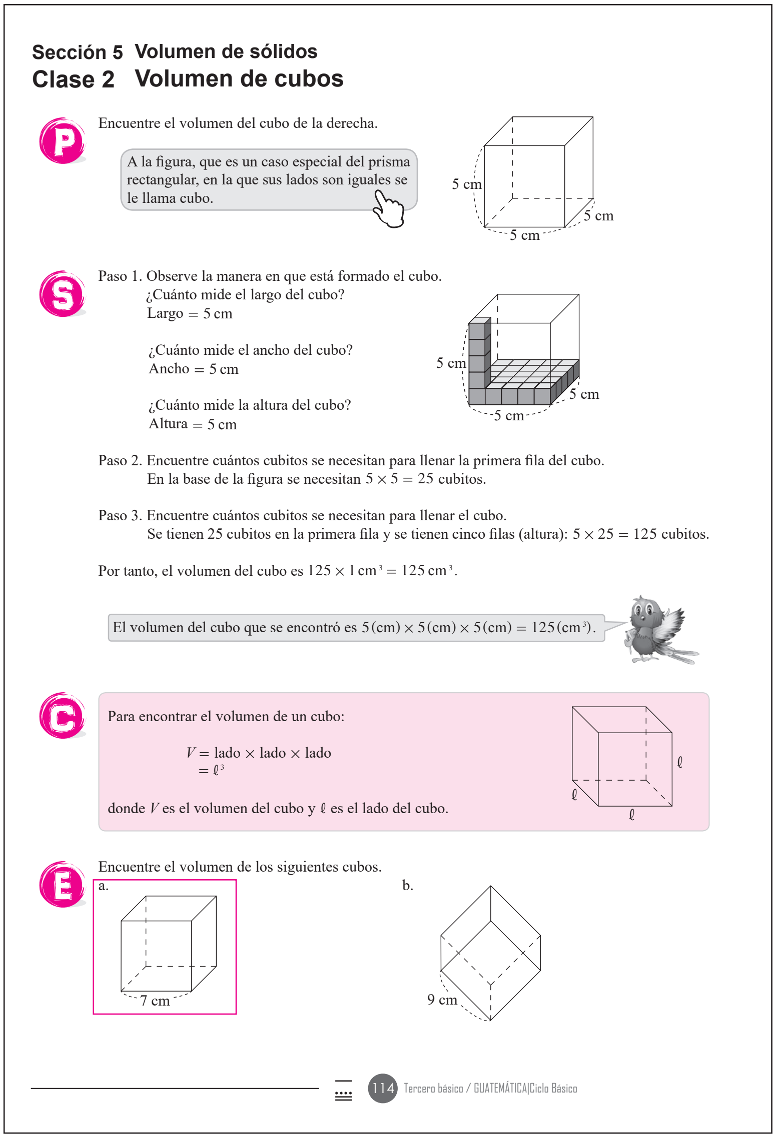


$V = 5 \times 2 \times 9$
$= 90$

R: 90 cm³

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 2 Volumen de cubos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un cubo.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 2 Volumen de cubos

P Encuentre el volumen del cubo de la derecha.

A la figura, que es un caso especial del prisma rectangular, en la que sus lados son iguales se le llama cubo.

S Paso 1. Observe la manera en que está formado el cubo.
¿Cuánto mide el largo del cubo?
Largo = 5 cm

¿Cuánto mide el ancho del cubo?
Ancho = 5 cm

¿Cuánto mide la altura del cubo?
Altura = 5 cm

Paso 2. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar la primera fila del cubo.
En la base de la figura se necesitan $5 \times 5 = 25$ cubitos.

Paso 3. Encuentre cuántos cubitos se necesitan para llenar el cubo.
Se tienen 25 cubitos en la primera fila y se tienen cinco filas (altura): $5 \times 25 = 125$ cubitos.

Por tanto, el volumen del cubo es $125 \times 1\ \text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$.

El volumen del cubo que se encontró es $5(\text{cm}) \times 5(\text{cm}) \times 5(\text{cm}) = 125(\text{cm}^3)$.

C Para encontrar el volumen de un cubo:

V = lado × lado × lado
$= \ell^3$

donde V es el volumen del cubo y ℓ es el lado del cubo.

E Encuentre el volumen de los siguientes cubos.

a.

b.

114 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

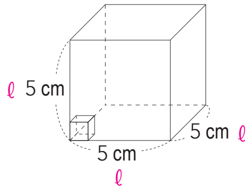
Solucionario del ejercicio:

a. $V = 7 \times 7 \times 7 = 343$
R: $343\ \text{cm}^3$

b. $V = 9 \times 9 \times 9 = 729$
R: $729\ \text{cm}^3$

Fecha: dd – mm – aa
4-5-2 Volumen de cubos

Ⓟ Encuentre el volumen del cubo.



Ⓢ Paso 1. Largo = 5 cm, Ancho = 5 cm, Altura = 5 cm
Paso 2. ¿Cuántos cubitos de 1 cm^3 se necesitan para llenar la primera fila?
$5 \times 5 = 25$ cubitos
Paso 3. ¿Cuántos cubitos de 1 cm^3 se necesitan para llenar el prisma?
$5 \times 25 = 125$ cubitos
Por tanto, el volumen del prisma rectangular es $125 \times 1\text{cm}^3 = 125\ \text{cm}^3$.

R: El volumen del cubo es $5\ (\text{cm}) \times 5\ (\text{cm}) \times 5\ (\text{cm}) = 125\ (\text{cm}^3)$.

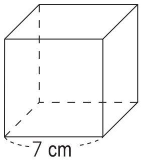
Ⓒ Para encontrar el volumen de un cubo:

V = lado × lado × lado
$= \ell^3$

donde V es el volumen del cubo y ℓ es el lado del cubo.

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.

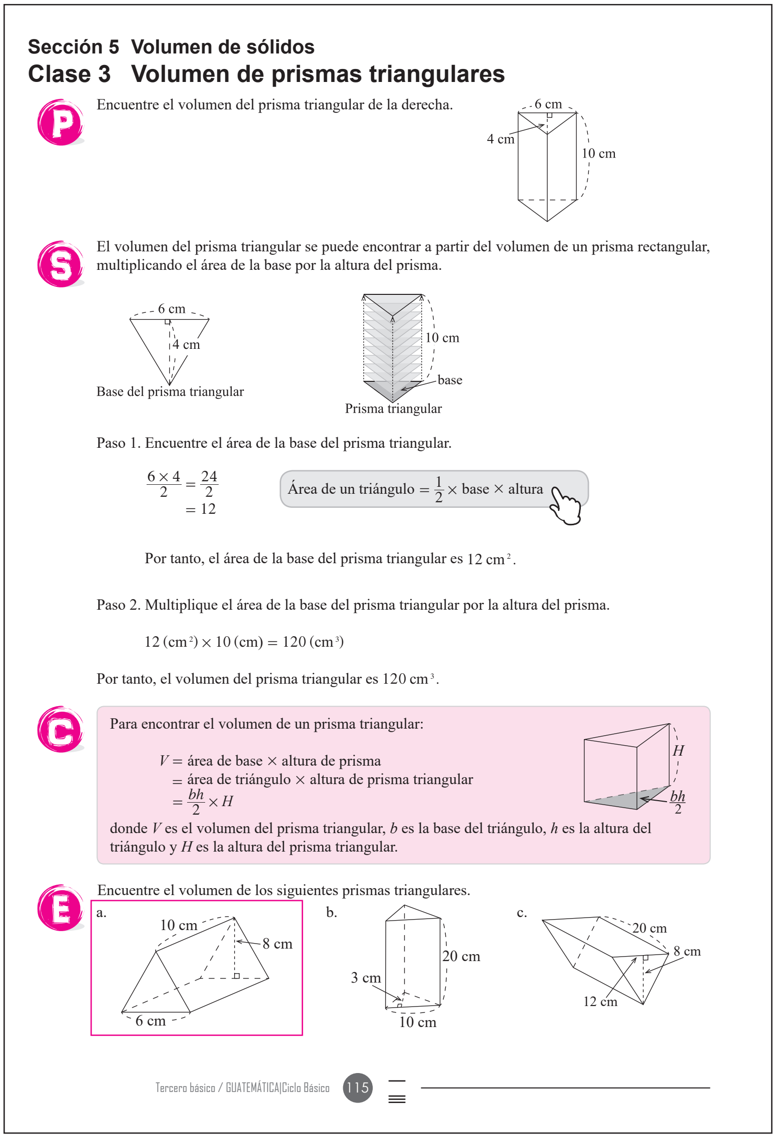


$V = 7 \times 7 \times 7$
$= 343$

R: $343\ \text{cm}^3$

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 3 Volumen de prismas triangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un prisma triangular.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 3 Volumen de prismas triangulares

P Encuentre el volumen del prisma triangular de la derecha.

S El volumen del prisma triangular se puede encontrar a partir del volumen de un prisma rectangular, multiplicando el área de la base por la altura del prisma.

Paso 1. Encuentre el área de la base del prisma triangular.

$$\frac{6\times 4}{2} = \frac{24}{2}$$
$$= 12$$

Área de un triángulo $= \frac{1}{2} \times$ base × altura

Por tanto, el área de la base del prisma triangular es 12 cm^2.

Paso 2. Multiplique el área de la base del prisma triangular por la altura del prisma.

12 (cm^2) × 10 (cm) = 120 (cm^3)

Por tanto, el volumen del prisma triangular es 120 cm^3.

C Para encontrar el volumen de un prisma triangular:

$V =$ área de base × altura de prisma
$=$ área de triángulo × altura de prisma triangular
$= \frac{bh}{2} \times H$

donde V es el volumen del prisma triangular, b es la base del triángulo, h es la altura del triángulo y H es la altura del prisma triangular.

E Encuentre el volumen de los siguientes prismas triangulares.

Solucionario de los ejercicios:

a. $V = \frac{6\times 8}{2}\times 10 = 240$
R: 240 cm^3

b. $V = \frac{10\times 3}{2}\times 20 = 300$
R: 300 cm^3

c. $V = \frac{12\times 8}{2}\times 20 = 960$
R: 960 cm^3

Fecha: dd – mm – aa
4-5-3 Volumen de prismas triangulares

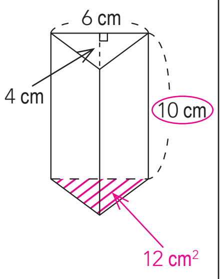
Ⓟ Encuentre el volumen del prisma triangular.

Ⓢ El volumen del prisma triangular se puede encontrar multiplicando el área de la base por la altura del prisma.

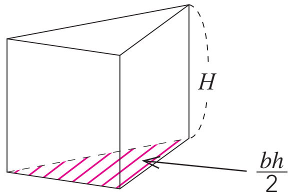
Paso 1. Encuentre el área de la base del prisma.
$$\frac{6\times 4}{2} = \frac{24}{2}$$
$$= 12\ (\text{cm}^2)$$

Paso 2. Multiplique el área de la base del prisma por la altura.
12 (cm^2) × 10 (cm) = 120 (cm^3)

Por tanto, el volumen del prisma triangular es 120 cm^3.



Ⓒ

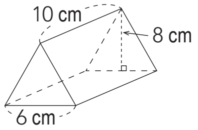


Para encontrar el volumen de un prisma triangular:
$V =$ área de base × altura
$= \frac{bh}{2} \times H$

donde V es el volumen del prisma triangular, b es la base del triángulo, h es la altura del triángulo y H es la altura del prisma triangular.

Ⓔ Encuentre el volumen.

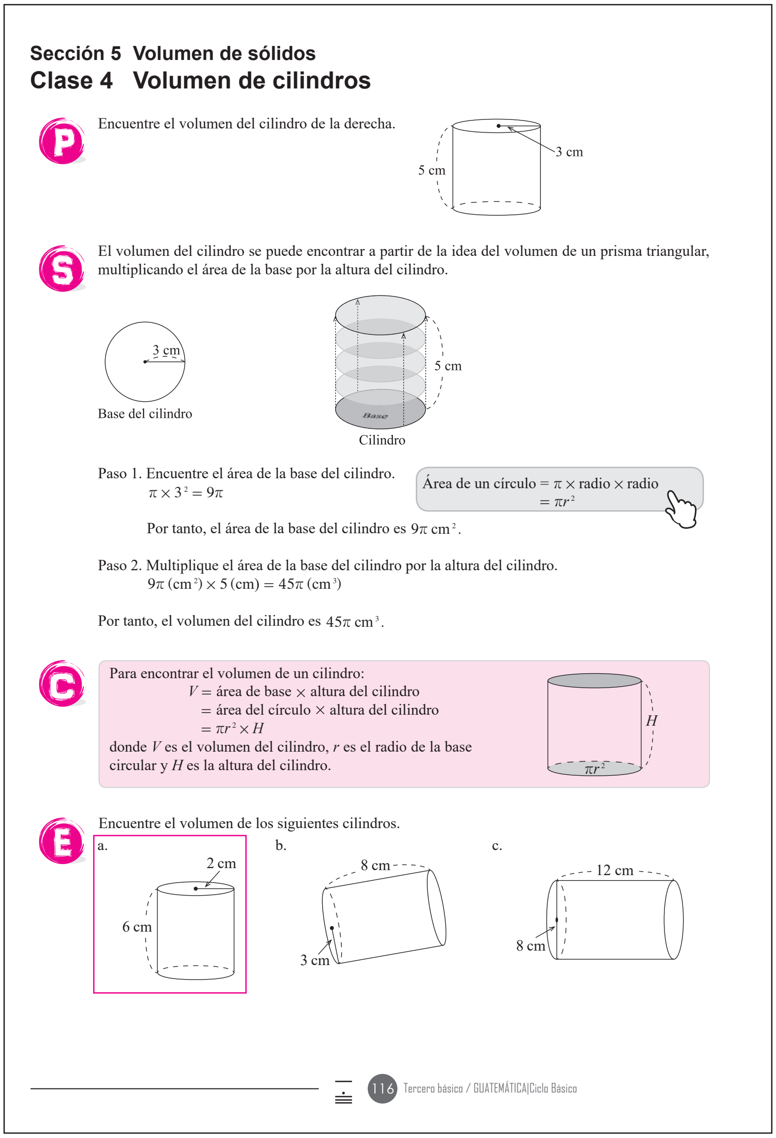
a.



$V = \frac{6\times 8}{2}\times 10$
$= 240$
R: 240 cm^3

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 4 Volumen de cilindros

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un cilindro.



Sección 5 Volumen de sólidos

Clase 4 Volumen de cilindros

Ⓟ Encuentre el volumen del cilindro de la derecha.

Ⓢ El volumen del cilindro se puede encontrar a partir de la idea del volumen de un prisma triangular, multiplicando el área de la base por la altura del cilindro.

Paso 1. Encuentre el área de la base del cilindro.
$\pi \times 3^2 = 9\pi$

Área de un círculo = π × radio × radio
$= \pi r^2$

Por tanto, el área de la base del cilindro es 9π cm².

Paso 2. Multiplique el área de la base del cilindro por la altura del cilindro.
$9\pi\ (\text{cm}^2) \times 5\ (\text{cm}) = 45\pi\ (\text{cm}^3)$

Por tanto, el volumen del cilindro es 45π cm³.

Ⓒ Para encontrar el volumen de un cilindro:
V = área de base × altura del cilindro
= área del círculo × altura del cilindro
$= \pi r^2 \times H$
donde V es el volumen del cilindro, r es el radio de la base circular y H es la altura del cilindro.

Ⓔ Encuentre el volumen de los siguientes cilindros.

Solucionario del ejercicio:

a. $V = \pi \times 2^2 \times 6 = 24\pi$
R: 24π cm³

b. $V = \pi \times 3^2 \times 8 = 72\pi$
R: 72π cm³

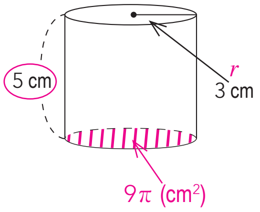
c. $V = \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 12 = \pi \times 4^2 \times 12 = 192\pi$
R: 192π cm³

Fecha: dd – mm – aa
4-5-4 Volumen de cilindros

Ⓟ Encuentre el volumen del cilindro.

Ⓢ

Área de un círculo = πr^2



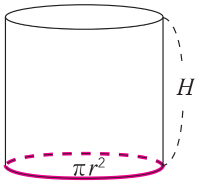
El volumen del cilindro se puede encontrar multiplicando el área de la base por la altura de cilindro.

Paso 1. Encuentre el área de la base del cilindro.
$\pi \times 3^2 = 9\pi\ (\text{cm}^2)$

Paso 2. Multiplique el área de la base por la altura.
$9\pi\ (\text{cm}^2) \times 5\ (\text{cm}) = 45\pi\ (\text{cm}^3)$

Por tanto, el volumen del cilindro es 45π cm³.

Ⓒ

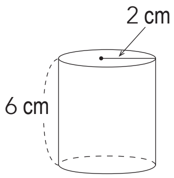


Para encontrar el volumen de un cilindro:
V = área de base × altura
$= \pi r^2 \times H$

donde V es el volumen del cilindro, r es el radio de la base circular y H es la altura del cilindro.

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.

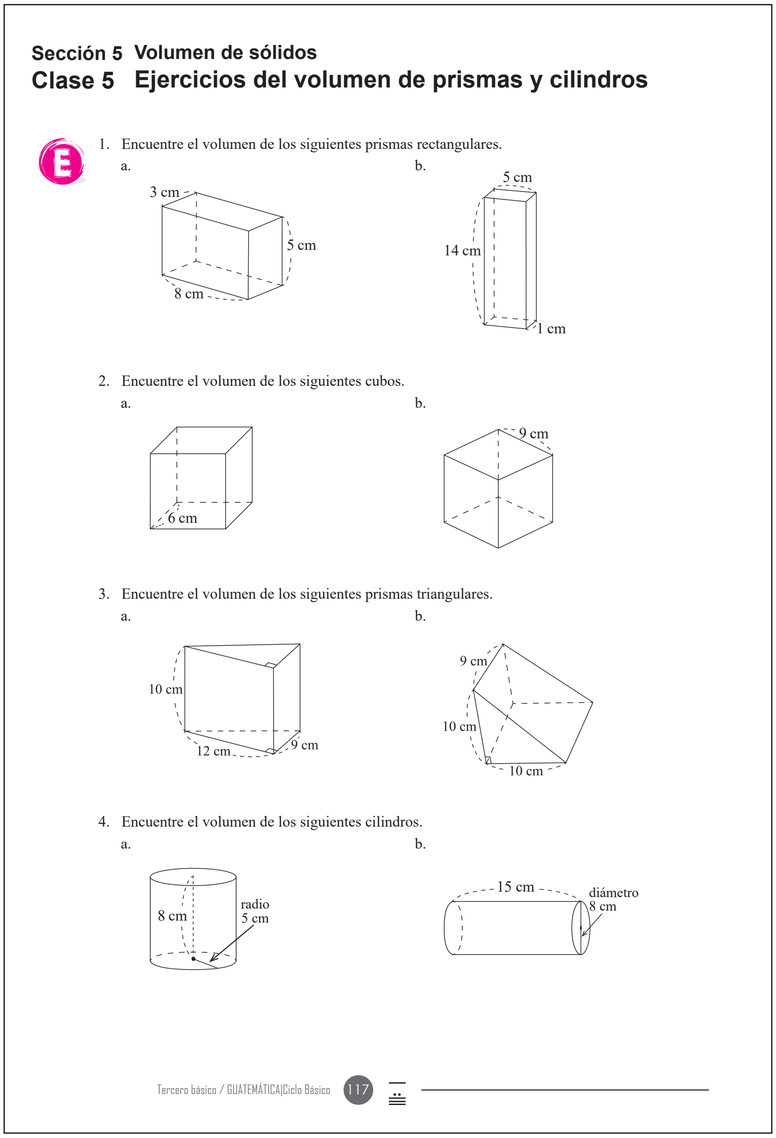


$V = \pi \times 2^2 \times 6$
$= 24\pi$

R: 24π cm³

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 5 Ejercicios del volumen de prismas y cilindros

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un prisma y un cilindro.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 5 Ejercicios del volumen de prismas y cilindros

1. Encuentre el volumen de los siguientes prismas rectangulares.
   a.
   b.
2. Encuentre el volumen de los siguientes cubos.
   a.
   b.
3. Encuentre el volumen de los siguientes prismas triangulares.
   a.
   b.
4. Encuentre el volumen de los siguientes cilindros.
   a.
   b.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 117

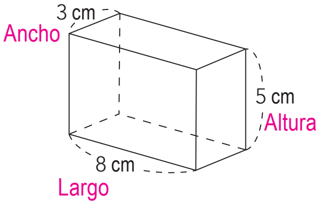
Solucionario de los ejercicios:

1. a. $V = 8 \times 3 \times 5 = 120$
   R: 120 cm^3
   b. $V = 5 \times 1 \times 14 = 70$
   R: 70 cm^3
2. a. $V = 6 \times 6 \times 6 = 216$
   R: 216 cm^3
   b. $V = 9 \times 9 \times 9 = 729$
   R: 729 cm^3
3. a. $V = \frac{9 \times 12}{2} \times 10 = 540$
   R: 540 cm^3
   b. $V = \frac{10 \times 10}{2} \times 9 = 450$
   R: 450 cm^3
4. a. $V = \pi \times 5^2 \times 8 = 200\pi$
   R: 200π cm^3
   b. $V = \pi \times \left(\frac{8}{2}\right)^2 \times 15 = \pi \times 4^2 \times 15 = 240\pi$
   R: 240π cm^3

Fecha: dd – mm – aa
4-5-5 Ejercicios del volumen de prismas y cilindros

Ⓔ 1. Encuentre el volumen del prisma rectangular.

a.



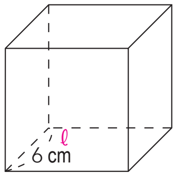
$V =$ largo × ancho × altura

$V = 8 \times 3 \times 5$
$= 120$

R: 120 cm^3

2. Encuentre el volumen del cubo.

a.



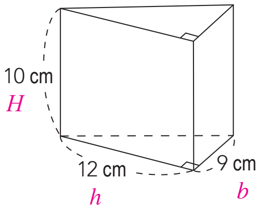
$V = \ell^3$

$V = 6 \times 6 \times 6$
$= 216$

R: 216 cm^3

3. Encuentre el volumen del prisma triangular.

a.



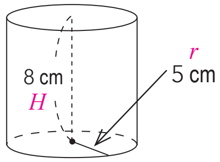
$V = \frac{bh}{2} \times H$

$V = \frac{9 \times 12}{2} \times 10$
$= 540$

R: 540 cm^3

4. Encuentre el volumen del cilindro.

a.



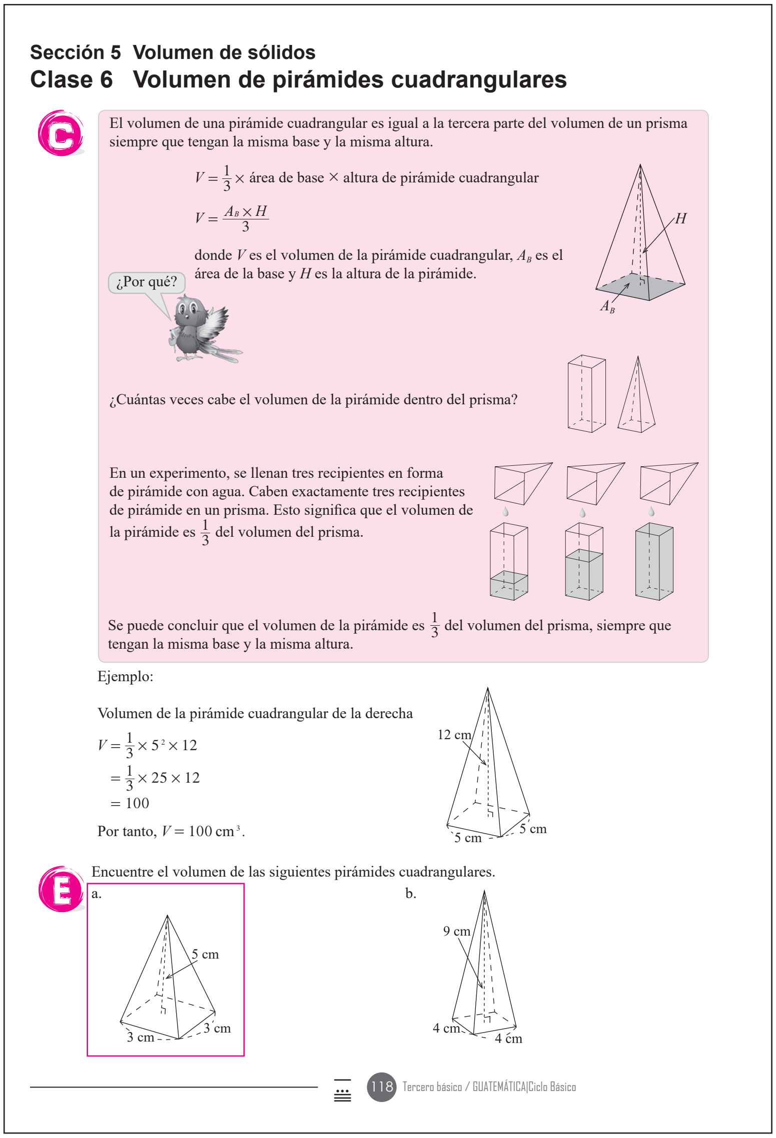
$V = \pi r^2 \times H$

$V = \pi \times 5^2 \times 8$
$= 200\pi$

R: 200π cm^3

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 6 Volumen de pirámides cuadrangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de una pirámide cuadrangular.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 6 Volumen de pirámides cuadrangulares

C El volumen de una pirámide cuadrangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$V = \frac{1}{3} \times$ área de base $\times$ altura de pirámide cuadrangular

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen de la pirámide cuadrangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.

¿Por qué?

¿Cuántas veces cabe el volumen de la pirámide dentro del prisma?

En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de pirámide con agua. Caben exactamente tres recipientes de pirámide en un prisma. Esto significa que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma.

Se puede concluir que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

Ejemplo:

Volumen de la pirámide cuadrangular de la derecha

$V = \frac{1}{3} \times 5^2 \times 12$

$= \frac{1}{3} \times 25 \times 12$

$= 100$

Por tanto, $V = 100$ cm³.

E Encuentre el volumen de las siguientes pirámides cuadrangulares.

a.

b.

118 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

a. $V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 5 = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 = 15$

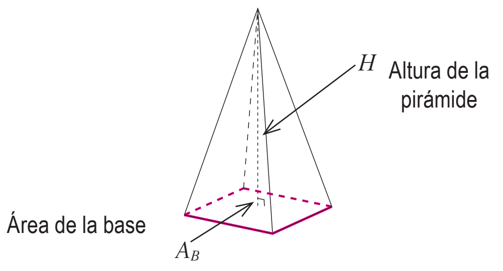
R: 15 cm³

b. $V = \frac{1}{3} \times 4^2 \times 9 = \frac{1}{3} \times 16 \times 9 = 48$

R: 48 cm³

Fecha: dd – mm – aa
4-5-6 Volumen de pirámides cuadrangulares

Ⓒ El volumen de una pirámide cuadrangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma siempre que tengan la misma base y la misma altura.

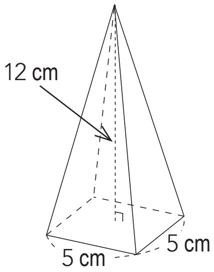


$V = \frac{1}{3} \times$ área de base $\times$ altura de pirámide cuadrangular

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen de la pirámide cuadrangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.

Ejemplo:



$V = \frac{1}{3} \times 5^2 \times 12$

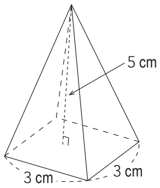
$= \frac{1}{3} \times 25 \times 12$

$= 100$

R: 100 cm³

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.



$V = \frac{1}{3} \times 3^2 \times 5$

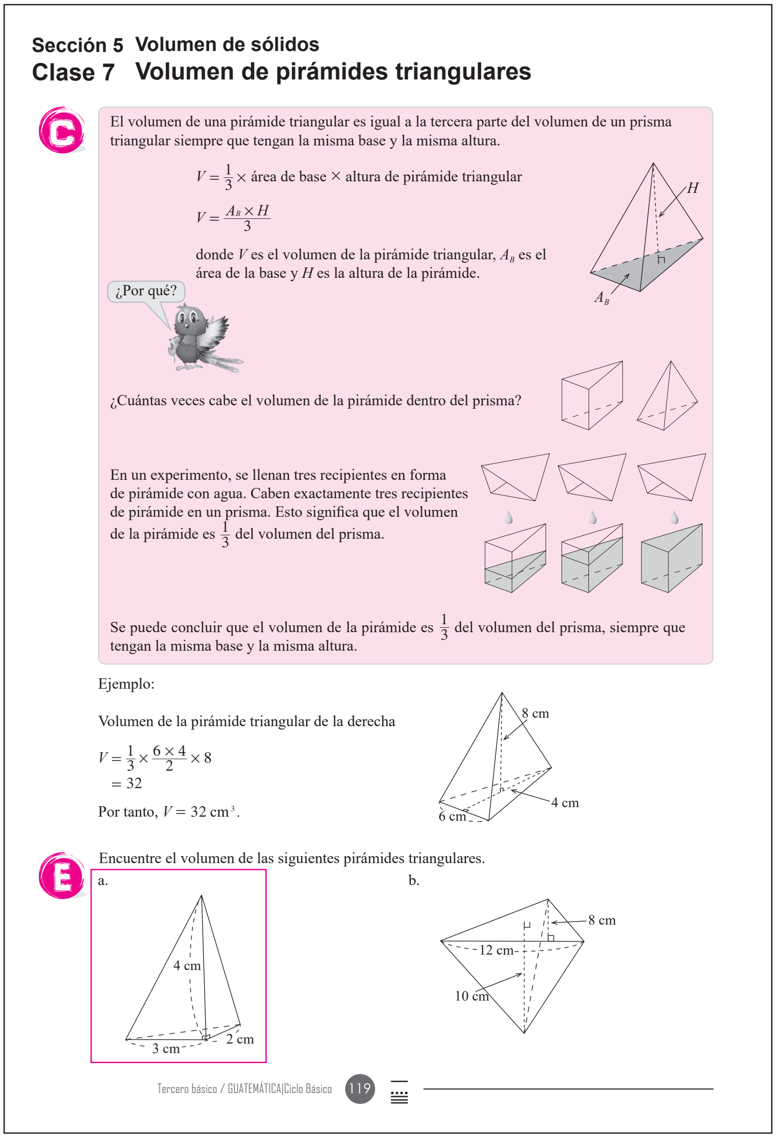
$= \frac{1}{3} \times 9 \times 5$

$= 15$

R: 15 cm³

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 7 Volumen de pirámides triangulares

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de una pirámide triangular.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 7 Volumen de pirámides triangulares

Ⓒ El volumen de una pirámide triangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma triangular siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$V = \frac{1}{3} \times$ área de base × altura de pirámide triangular

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen de la pirámide triangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.

¿Cuántas veces cabe el volumen de la pirámide dentro del prisma?

En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de pirámide con agua. Caben exactamente tres recipientes de pirámide en un prisma. Esto significa que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma.

Se puede concluir que el volumen de la pirámide es $\frac{1}{3}$ del volumen del prisma, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

Ejemplo:

Volumen de la pirámide triangular de la derecha

$V = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 4}{2} \times 8$
$= 32$

Por tanto, $V = 32\ \text{cm}^3$.

Ⓔ Encuentre el volumen de las siguientes pirámides triangulares.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 119

Solucionario de los ejercicios:

a. $V = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 2}{2} \times 4 = 4$

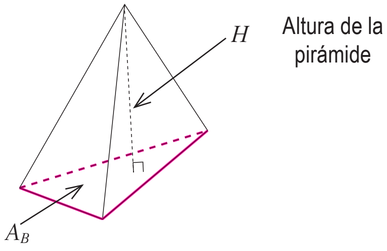
R: 4 cm^3

b. $V = \frac{1}{3} \times \frac{12 \times 8}{2} \times 10 = 160$

R: 160 cm^3

Fecha: dd – mm – aa
4-5-7 Volumen de pirámides triangulares

Ⓒ El volumen de una pirámide triangular es igual a la tercera parte del volumen de un prisma triangular siempre que tengan la misma base y la misma altura.

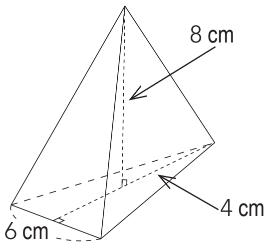


$V = \frac{1}{3} \times$ área de base × altura de pirámide triangular

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen de la pirámide triangular, A_B es el área de la base y H es la altura de la pirámide.

Ejemplo:

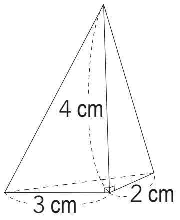


$V = \frac{1}{3} \times \frac{6 \times 4}{2} \times 8$
$= 32$

R: 32 cm^3

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.

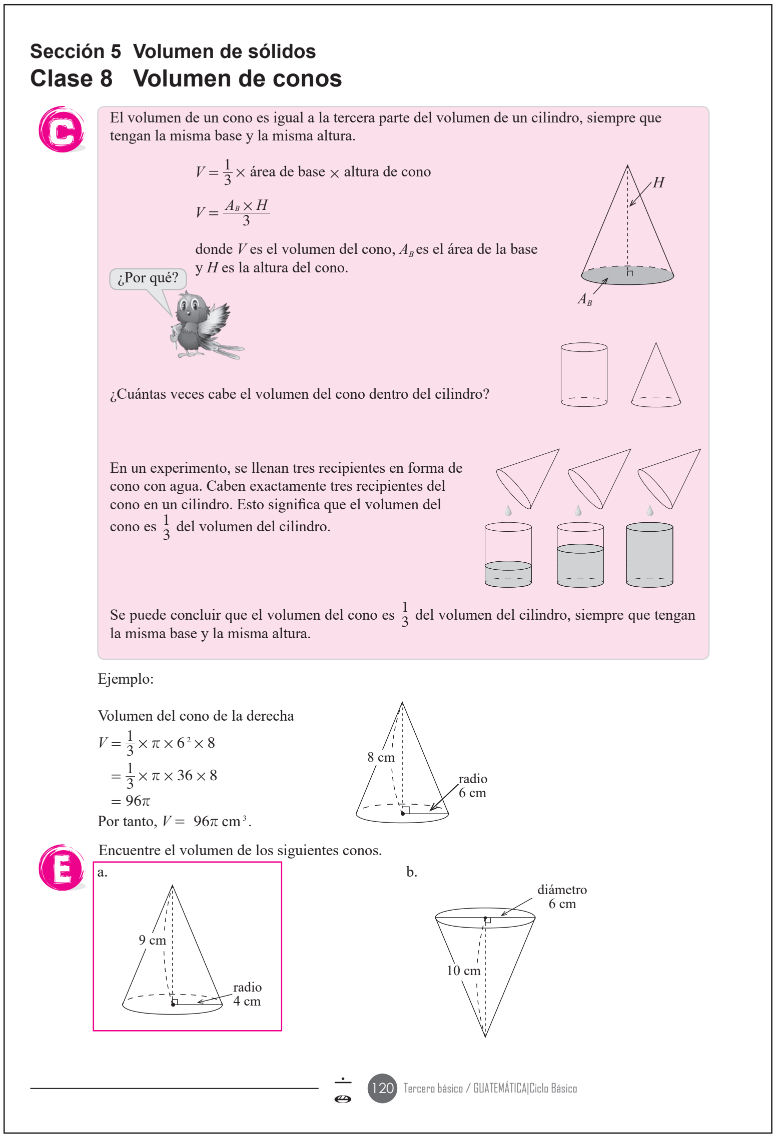


$V = \frac{1}{3} \times \frac{3 \times 2}{2} \times 4$
$= 4$

R: 4 cm^3

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 8 Volumen de conos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de un cono.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 8 Volumen de conos

C El volumen de un cono es igual a la tercera parte del volumen de un cilindro, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

$V = \frac{1}{3} \times$ área de base × altura de cono

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen del cono, A_B es el área de la base y H es la altura del cono.

¿Por qué?

¿Cuántas veces cabe el volumen del cono dentro del cilindro?

En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de cono con agua. Caben exactamente tres recipientes del cono en un cilindro. Esto significa que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.

Se puede concluir que el volumen del cono es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

Ejemplo:

Volumen del cono de la derecha

$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8$

$= \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8$

$= 96\pi$

Por tanto, $V = 96\pi$ cm³.

E Encuentre el volumen de los siguientes conos.

a. b.

Solucionario del ejercicio:

a. $V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9 = \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 9 = 48\pi$

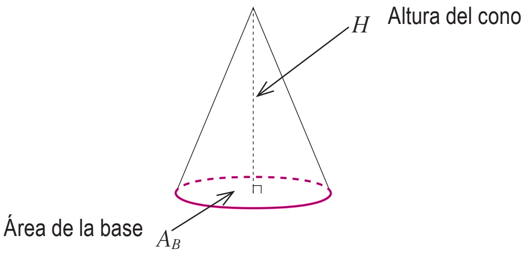
R: 48π cm³

b. $V = \frac{1}{3} \times \pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 \times 10 = \frac{1}{3} \times \pi \times 9 \times 10 = 30\pi$

R: 30π cm³

Fecha: dd – mm – aa
4-5-8 Volumen de conos

Ⓒ El volumen de un cono es igual a la tercera parte del volumen de un cilindro, siempre que tengan la misma base y la misma altura.

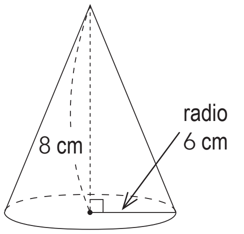


$V = \frac{1}{3} \times$ área de base × altura de cono

$V = \frac{A_B \times H}{3}$

donde V es el volumen del cono, A_B es el área de la base y H es la altura del cono.

Ejemplo:



$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8$

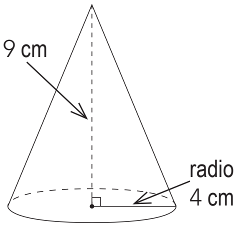
$= \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8$

$= 96\pi$

R: 96π cm³

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.



$V = \frac{1}{3} \times \pi \times 4^2 \times 9$

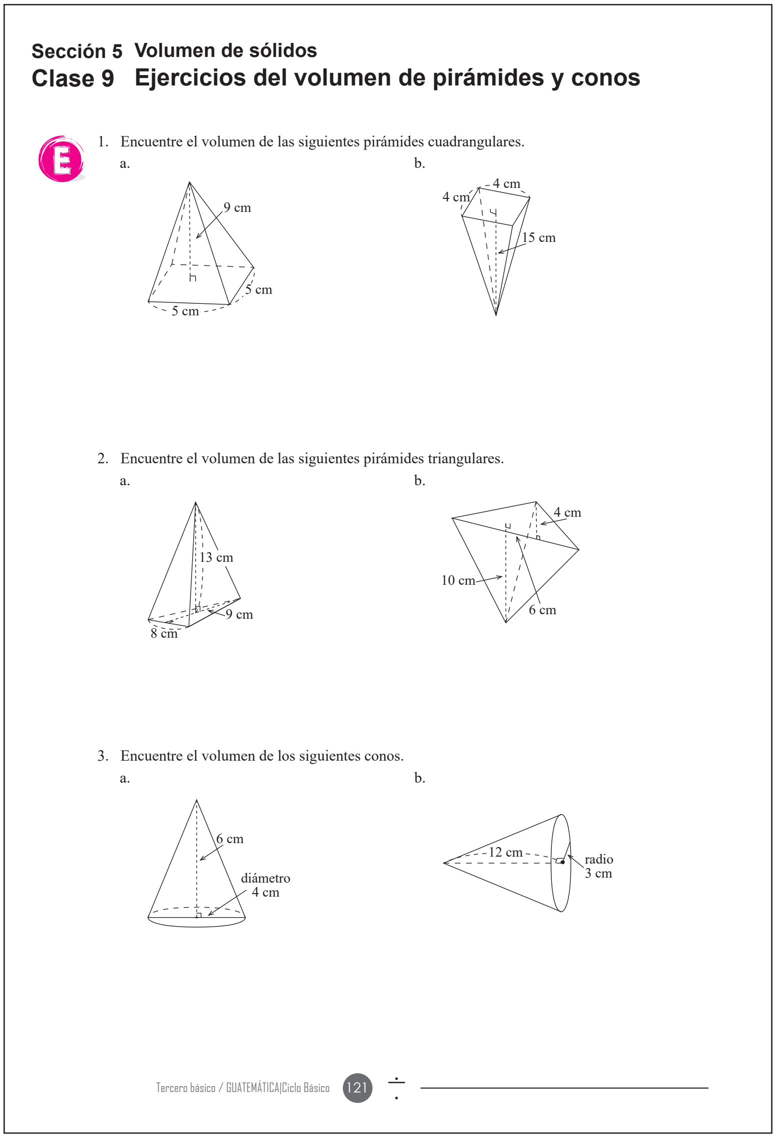
$= \frac{1}{3} \times \pi \times 16 \times 9$

$= 48\pi$

R: 48π cm³

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de una pirámide y un cono.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos

E 1. Encuentre el volumen de las siguientes pirámides cuadrangulares.
a. b.

2. Encuentre el volumen de las siguientes pirámides triangulares.
a. b.

3. Encuentre el volumen de los siguientes conos.
a. b.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 121

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $V=\frac{1}{3}\times 5^2\times 9=\frac{1}{3}\times 25\times 9=75$

R: 75 cm^3

b. $V=\frac{1}{3}\times 4^2\times 15=\frac{1}{3}\times 16\times 15=80$

R: 80 cm^3

2. a. $V=\frac{1}{3}\times\frac{8\times 9}{2}\times 13=156$

R: 156 cm^3

b. $V=\frac{1}{3}\times\frac{6\times 4}{2}\times 10=40$

R: 40 cm^3

3. a. $V=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2\times 6=\frac{1}{3}\times\pi\times 4\times 6=8\pi$

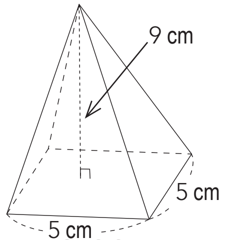
R: 8π cm^3

b. $V=\frac{1}{3}\times\pi\times 3^2\times 12=\frac{1}{3}\times\pi\times 9\times 12=36\pi$

R: 36π cm^3

Fecha: dd – mm – aa
4-5-9 Ejercicios del volumen de pirámides y conos

Ⓔ 1. Encuentre el volumen de la pirámide cuadrangular.
a.



$V=\frac{1}{3}\times$ área de base $\times$ altura de pirámide cuadrangular

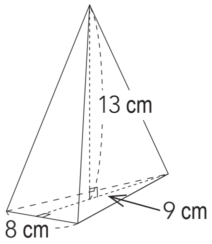
$V=\frac{1}{3}\times 5^2\times 9$

$=\frac{1}{3}\times 25\times 9$

$=75$

R: 75 cm^3

2. Encuentre el volumen de la pirámide triangular.
a.



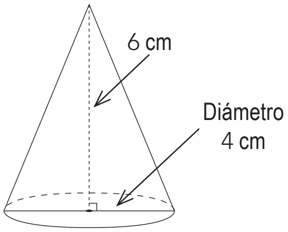
$V=\frac{1}{3}\times$ área de base $\times$ altura de pirámide triangular

$V=\frac{1}{3}\times\frac{8\times 9}{2}\times 13$

$=156$

R: 156 cm^3

3. Encuentre el volumen del cono.
a.



$V=\frac{1}{3}\times$ área de base $\times$ altura de cono

$V=\frac{1}{3}\times\pi\times\left(\frac{4}{2}\right)^2\times 6$

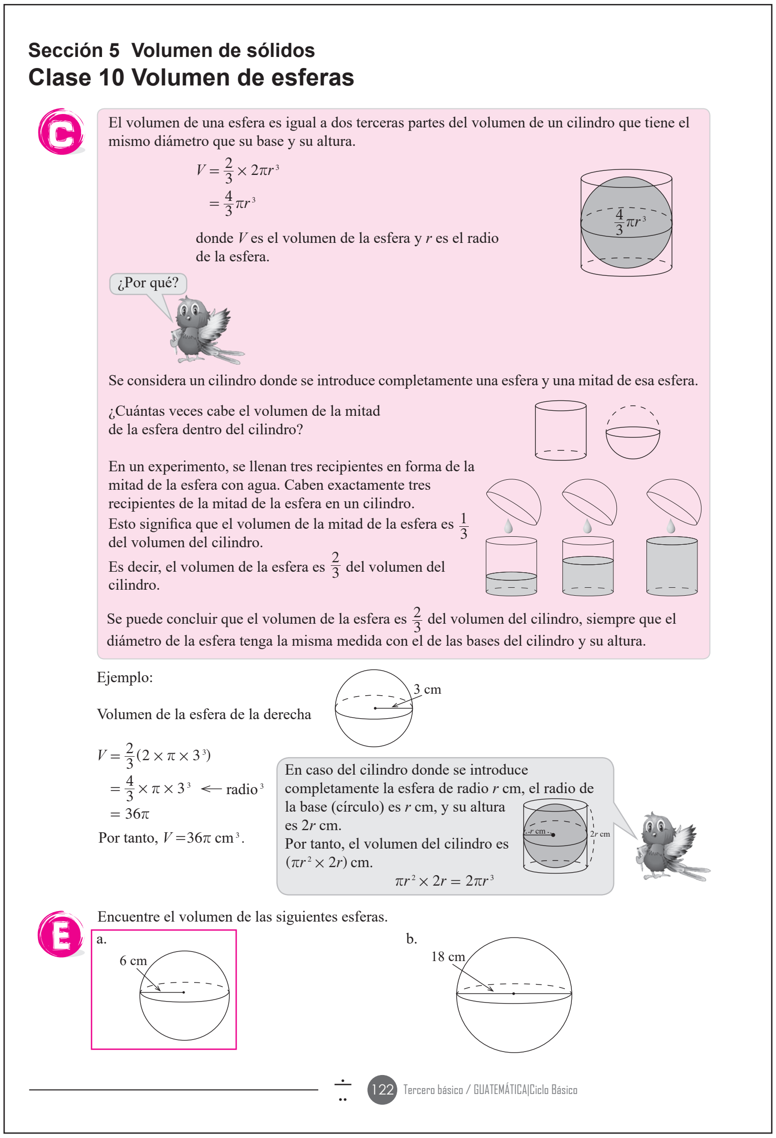
$=\frac{1}{3}\times\pi\times 4\times 6$

$=8\pi$

R: 8π cm^3

Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 10 Volumen de esferas

Aprendizaje esperado:
Encuentra el volumen de una esfera.



Sección 5 Volumen de sólidos
Clase 10 Volumen de esferas

C El volumen de una esfera es igual a dos terceras partes del volumen de un cilindro que tiene el mismo diámetro que su base y su altura.

$$V = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$

donde V es el volumen de la esfera y r es el radio de la esfera.

Se considera un cilindro donde se introduce completamente una esfera y una mitad de esa esfera.

¿Cuántas veces cabe el volumen de la mitad de la esfera dentro del cilindro?

En un experimento, se llenan tres recipientes en forma de la mitad de la esfera con agua. Caben exactamente tres recipientes de la mitad de la esfera en un cilindro.
Esto significa que el volumen de la mitad de la esfera es $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.
Es decir, el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro.

Se puede concluir que el volumen de la esfera es $\frac{2}{3}$ del volumen del cilindro, siempre que el diámetro de la esfera tenga la misma medida con el de las bases del cilindro y su altura.

Ejemplo:

Volumen de la esfera de la derecha

$$V = \frac{2}{3}(2 \times \pi \times 3^3)$$
$$= \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3 \leftarrow \text{radio}^3$$
$$= 36\pi$$

Por tanto, $V = 36\pi$ cm^3.

En caso del cilindro donde se introduce completamente la esfera de radio r cm, el radio de la base (círculo) es r cm, y su altura es $2r$ cm.
Por tanto, el volumen del cilindro es ($\pi r^2 \times 2r$) cm.

$$\pi r^2 \times 2r = 2\pi r^3$$

E Encuentre el volumen de las siguientes esferas.

a.

b.

Solucionario del ejercicio:

a. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3 = 288\pi$

R: 288π cm^3

b. $V = \frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{18}{2}\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times 9^3$

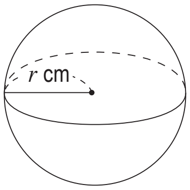
$= 972\pi$

R: 972π cm^3

Fecha: dd – mm – aa
4-5-10 Volumen de esferas

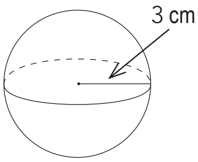
Ⓒ El volumen de una esfera es igual a dos terceras partes del volumen de un cilindro que tiene el mismo diámetro que su base y su altura.

$$V = \frac{2}{3} \times 2\pi r^3$$
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$



donde V es el volumen de la esfera y r es el radio de la esfera.

Ejemplo:

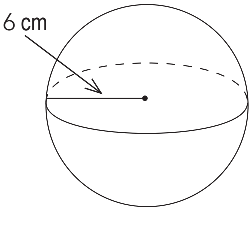


$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 3^3$$
$$= 36\pi$$

R: 36π cm^3

Ⓔ Encuentre el volumen.

a.

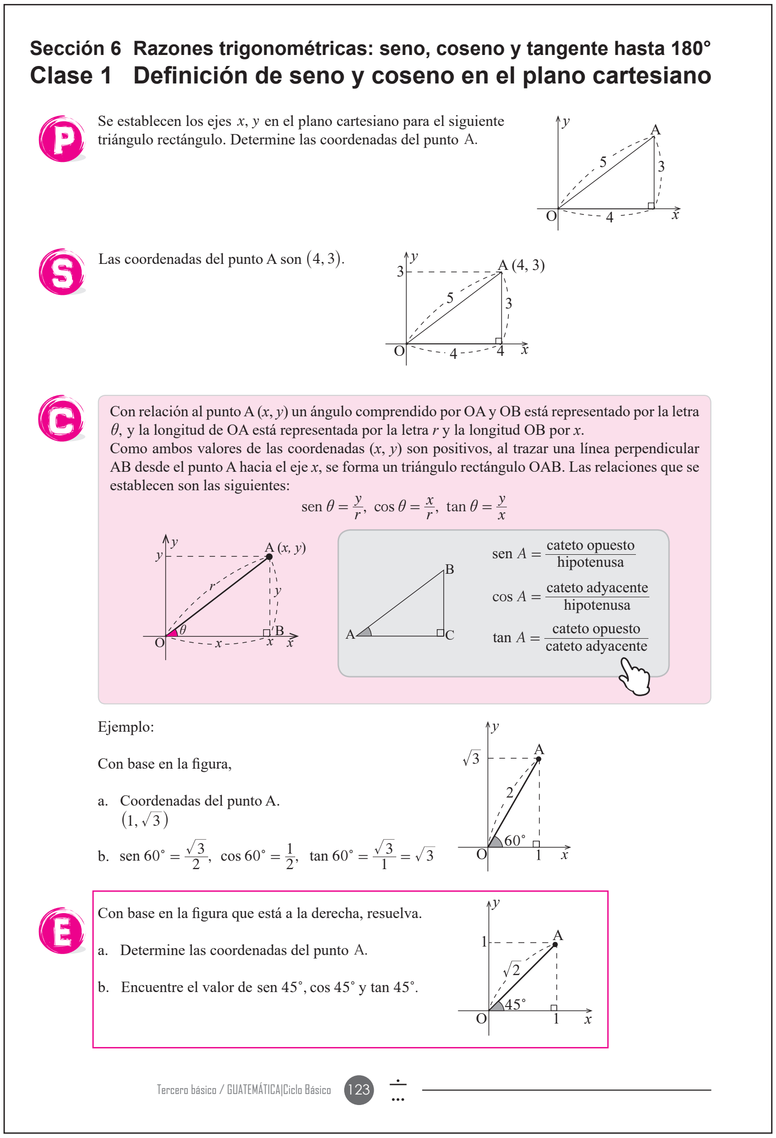


$$V = \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3$$
$$= 288\pi$$

R: 288π cm^3

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180º
Clase 1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano

Aprendizaje esperado:
Encuentra el valor de las razones trigonométricas de un ángulo agudo.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano

P Se establecen los ejes x, y en el plano cartesiano para el siguiente triángulo rectángulo. Determine las coordenadas del punto A.

S Las coordenadas del punto A son $(4, 3)$.

C Con relación al punto A (x, y) un ángulo comprendido por OA y OB está representado por la letra θ, y la longitud de OA está representada por la letra r y la longitud OB por x.
Como ambos valores de las coordenadas (x, y) son positivos, al trazar una línea perpendicular AB desde el punto A hacia el eje x, se forma un triángulo rectángulo OAB. Las relaciones que se establecen son las siguientes:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r},\quad \cos\theta = \frac{x}{r},\quad \tan\theta = \frac{y}{x}$$

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

Ejemplo:

Con base en la figura,

a. Coordenadas del punto A.
$(1, \sqrt{3})$

b. $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

E Con base en la figura que está a la derecha, resuelva.

a. Determine las coordenadas del punto A.

b. Encuentre el valor de sen 45°, cos 45° y tan 45°.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 123

Solucionario de los ejercicios:

a. A (1, 1)

b. $\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

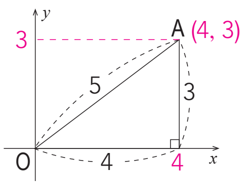
$\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

Fecha: dd – mm – aa
4-6-1 Definición de seno y coseno en el plano cartesiano

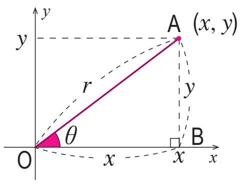
Ⓟ Determine las coordenadas del punto A en el plano cartesiano.

Ⓢ



Las coordenadas del punto A son (4, 3).

Ⓒ

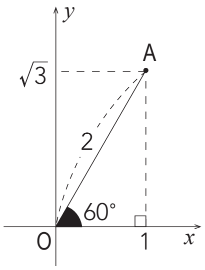


$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

Ejemplo:



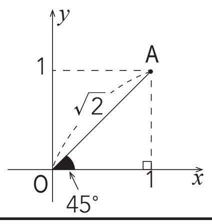
a. Coordenadas del punto A.
$(1, \sqrt{3})$

b. $\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

$\tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

Ⓔ Con base en la figura:



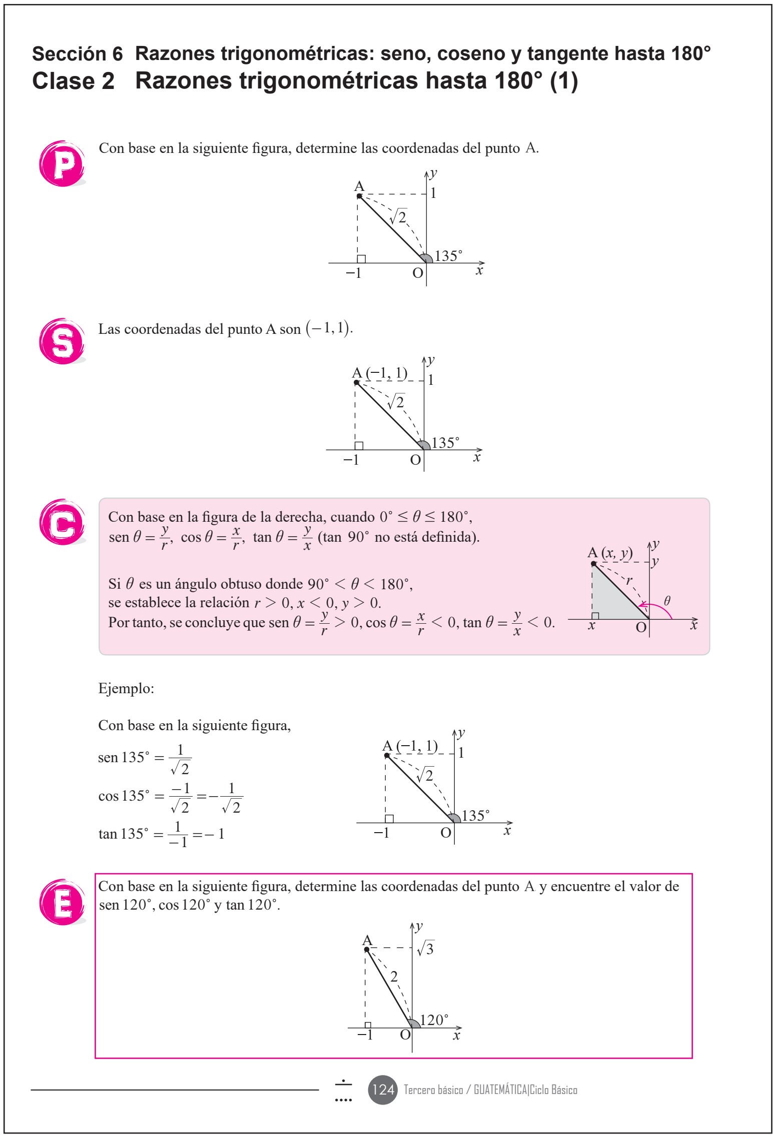
a. Determine las coordenadas del punto A.
$(1, 1)$

b. Encuentre el valor de sen 45°, cos 45° y tan 45°.

$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\tan 45^\circ = \frac{1}{1} = 1$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180º
Clase 2 Razones trigonométricas hasta 180º (1)

Aprendizaje esperado:
Encuentra el valor de las razones trigonométricas de un ángulo obtuso.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 2 Razones trigonométricas hasta 180° (1)

P Con base en la siguiente figura, determine las coordenadas del punto A.

S Las coordenadas del punto A son $(-1, 1)$.

C Con base en la figura de la derecha, cuando $0° \leq \theta \leq 180°$,
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (tan 90° no está definida).

Si θ es un ángulo obtuso donde $90° < \theta < 180°$,
se establece la relación $r > 0, x < 0, y > 0$.
Por tanto, se concluye que $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} > 0$, $\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$.

Ejemplo:

Con base en la siguiente figura,

$\operatorname{sen} 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$

E Con base en la siguiente figura, determine las coordenadas del punto A y encuentre el valor de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

124 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

$A(-1, \sqrt{3})$

$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

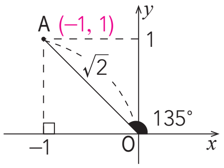
$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

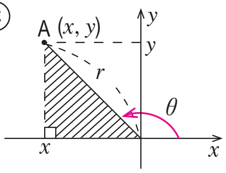
Fecha: dd – mm – aa
4-6-2 Razones trigonométricas hasta 180° (1)

Ⓟ Con base en la figura, determine las coordenadas del punto A.

Ⓢ Las coordenadas del punto A son $(-1, 1)$.

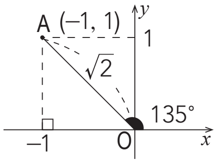


Ⓒ



Con base en la figura cuando $0° \leq \theta \leq 180°$,
$\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r}$, $\cos\theta = \frac{x}{r}$, $\tan\theta = \frac{y}{x}$ (tan 90° no está definida).
Si θ es un ángulo obtuso donde $90° < \theta < 180°$,
se establece la relación $r > 0, x < 0, y > 0$.
Por tanto, se concluye que $\operatorname{sen}\theta = \frac{y}{r} > 0$,
$\cos\theta = \frac{x}{r} < 0$, $\tan\theta = \frac{y}{x} < 0$.

Ejemplo:



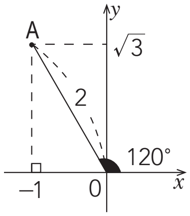
$\operatorname{sen} 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$

Ⓔ Con base en la figura, determine las coordenadas del punto A y encuentre el valor de sen 120°, cos 120°, tan 120°.

Las coordenadas del punto A son $(-1, \sqrt{3})$.



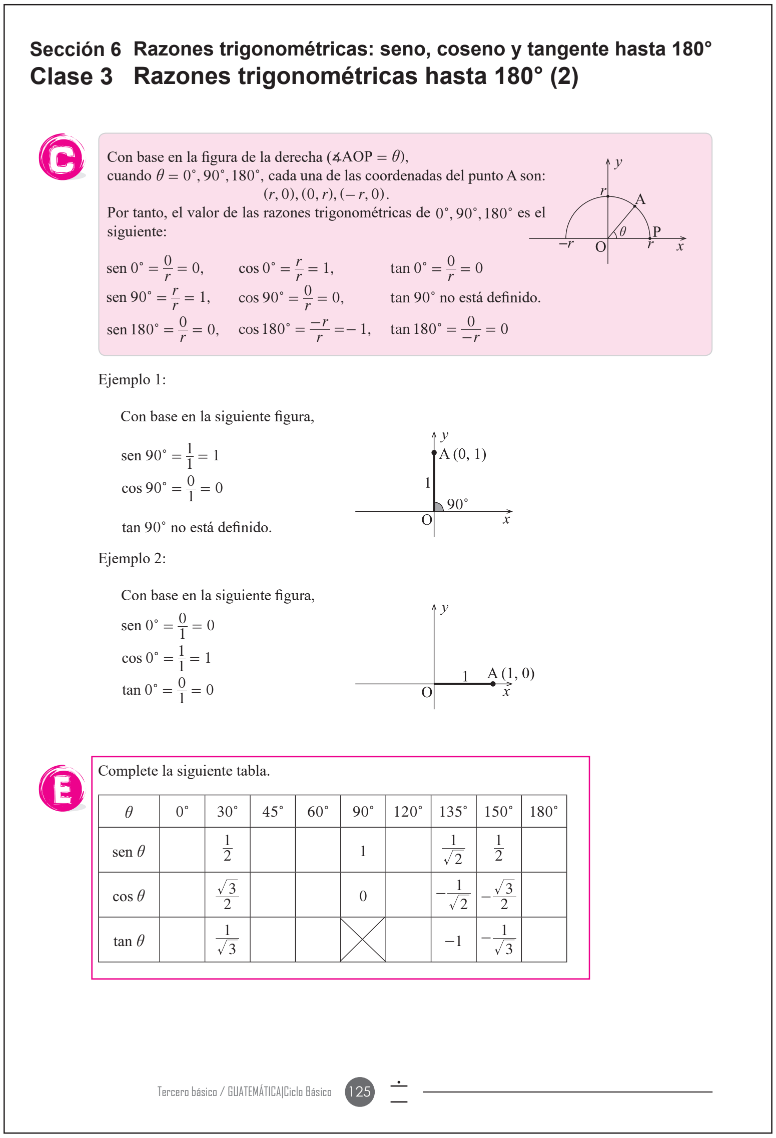
$\operatorname{sen} 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$,

$\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180º
Clase 3 Razones trigonométricas hasta 180º (2)

Aprendizaje esperado:
Encuentra el valor de las razones trigonométricas para 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150° y 180°.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°

Clase 3 Razones trigonométricas hasta 180° (2)

Ⓒ Con base en la figura de la derecha (∡AOP = θ), cuando $\theta = 0°, 90°, 180°$, cada una de las coordenadas del punto A son: $(r, 0), (0, r), (-r, 0)$.
Por tanto, el valor de las razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° es el siguiente:

$\text{sen } 0° = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 0° = \frac{r}{r} = 1$, $\tan 0° = \frac{0}{r} = 0$

$\text{sen } 90° = \frac{r}{r} = 1$, $\cos 90° = \frac{0}{r} = 0$, tan 90° no está definido.

$\text{sen } 180° = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 180° = \frac{-r}{r} = -1$, $\tan 180° = \frac{0}{-r} = 0$

Ejemplo 1:

Con base en la siguiente figura,

$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{0}{1} = 0$

tan 90° no está definido.

Ejemplo 2:

Con base en la siguiente figura,

$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$

Ⓔ Complete la siguiente tabla.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen θ		$\frac{1}{2}$			1		$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	
cos θ		$\frac{\sqrt{3}}{2}$			0		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	
tan θ		$\frac{1}{\sqrt{3}}$			╳		-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 125

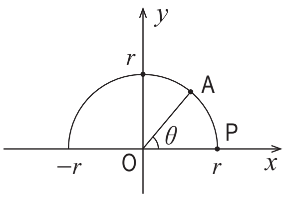
Solucionario del ejercicio:

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Fecha: dd – mm – aa

4-6-3 Razones trigonométricas hasta 180° (2)

Ⓒ Con base en la figura de la derecha (∡AOP= θ), cuando $\theta = 0°, 90°, 180°$, cada una de las coordenadas del punto A son: $(r, 0), (0, r), (-r, 0)$.
Por tanto, el valor de las razones trigonométricas de 0°, 90°, 180° es el siguiente:

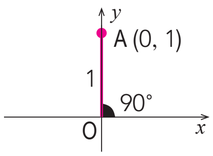


$\text{sen } 0° = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 0° = \frac{r}{r} = 1$, $\tan 0° = \frac{0}{r} = 0$

$\text{sen } 90° = \frac{r}{r} = 1$, $\cos 90° = \frac{0}{r} = 0$, tan 90° no está definido.

$\text{sen } 180° = \frac{0}{r} = 0$, $\cos 180° = \frac{-r}{r} = -1$, $\tan 180° = \frac{0}{-r} = 0$

Ejemplo 1:

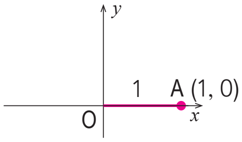


$\text{sen } 90° = \frac{1}{1} = 1$

$\cos 90° = \frac{0}{1} = 0$

tan 90° no está definido.

Ejemplo 2:



$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$

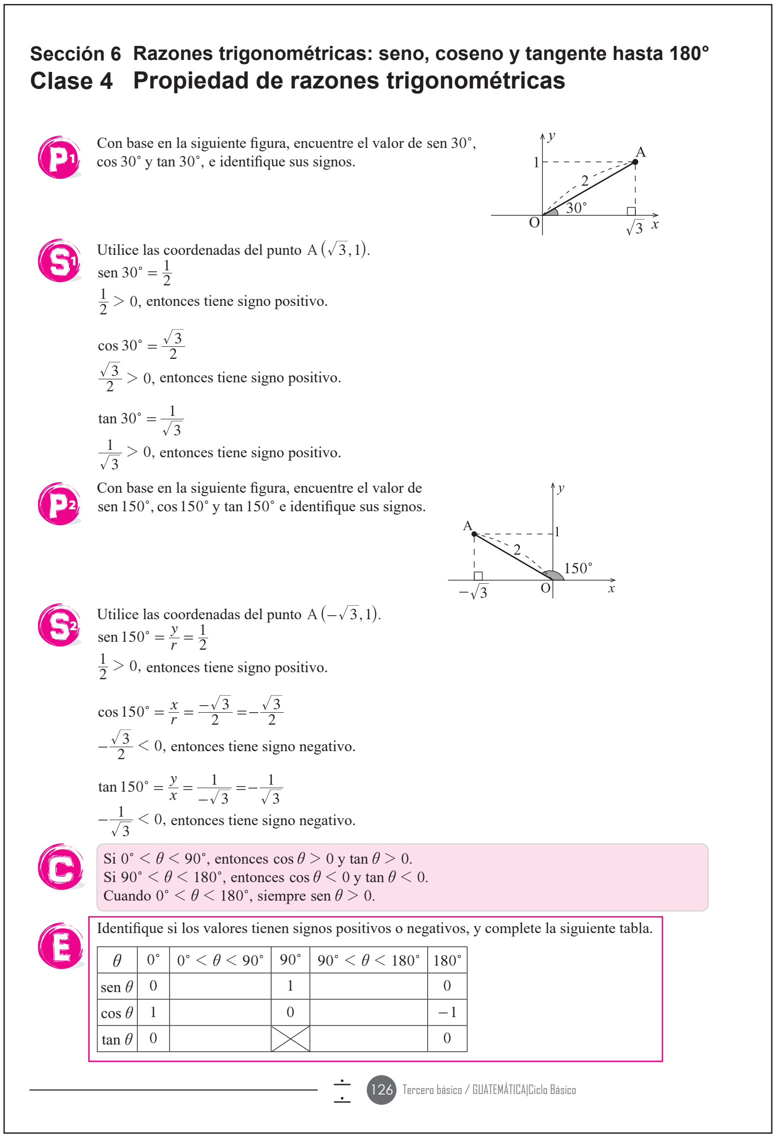
$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$

Ⓔ Complete la tabla.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sen θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	╳	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180º
Clase 4 Propiedad de razones trigonométricas

Aprendizaje esperado:
Identifica el signo de los valores de seno, coseno y tangente.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 4 Propiedad de razones trigonométricas

P1 Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de sen 30°, cos 30° y tan 30°, e identifique sus signos.

S1 Utilice las coordenadas del punto A $(\sqrt{3}, 1)$.
$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$, entonces tiene signo positivo.

P2 Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de sen 150°, cos 150° y tan 150° e identifique sus signos.

S2 Utilice las coordenadas del punto A $(-\sqrt{3}, 1)$.
$\text{sen } 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$
$\frac{1}{2} > 0$, entonces tiene signo positivo.

$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, entonces tiene signo negativo.

$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$
$-\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$, entonces tiene signo negativo.

C Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, entonces $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta > 0$.
Si $90^\circ < \theta < 180^\circ$, entonces $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$.
Cuando $0^\circ < \theta < 180^\circ$, siempre $\text{sen }\theta > 0$.

E Identifique si los valores tienen signos positivos o negativos, y complete la siguiente tabla.

θ	0°	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	180°
sen θ	0		1		0
cos θ	1		0		−1
tan θ	0		☒		0

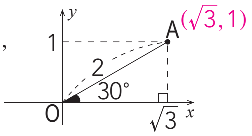
126 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

θ	0°	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	180°
sen θ	0	+	1	+	0
cos θ	1	+	0	−	−1
tan θ	0	+	☒	−	0

Fecha: dd – mm – aa
4-6-4 Propiedad de razones trigonométricas

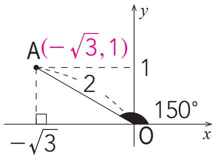
Ⓟ1 Con base en la figura, encuentre el valor de sen 30°, cos 30° y tan 30°, e identifique sus signos.



Ⓢ1

$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} > 0$	Signo positivo
$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} > 0$	Signo positivo
$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} > 0$	Signo positivo

Ⓟ2 Encuentre el valor de sen 150°, cos 150° y tan 150°, e identifique sus signos.



Ⓢ2

$\text{sen } 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} > 0$	Signo positivo
$\cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$	Signo negativo
$\tan 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}} < 0$	Signo negativo

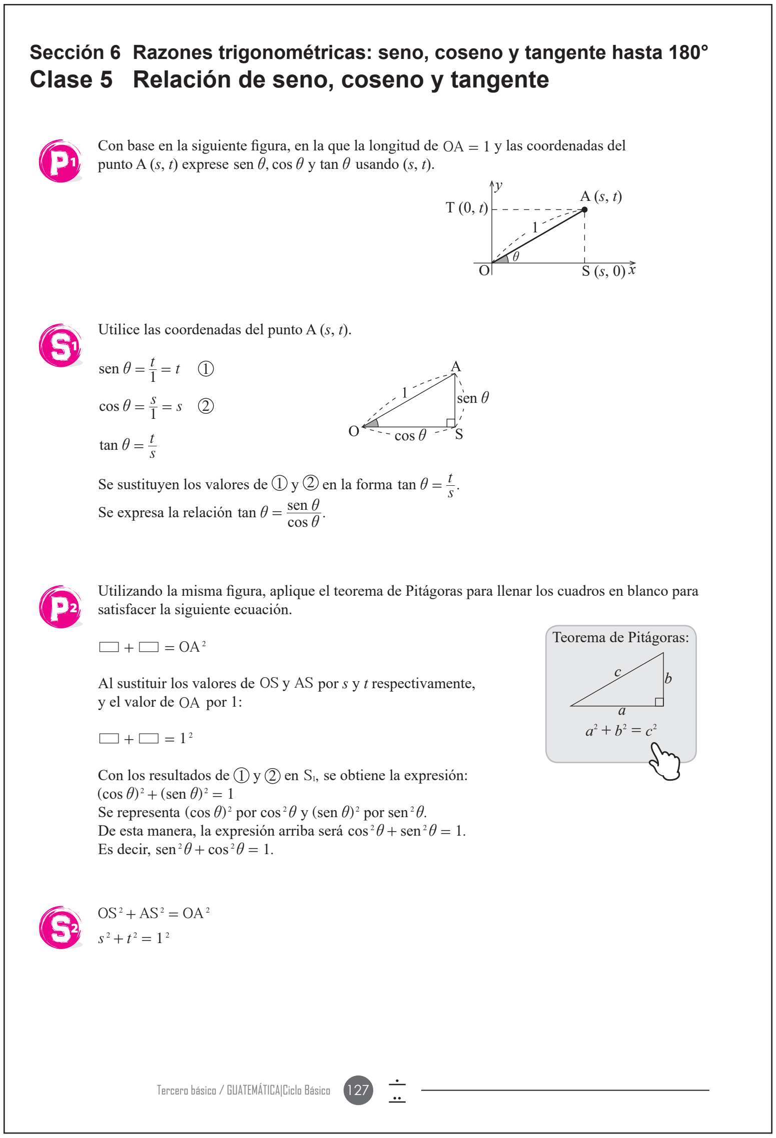
Ⓒ Si $0^\circ < \theta < 90^\circ$, entonces $\cos\theta > 0$ y $\tan\theta > 0$.
Si $90^\circ < \theta < 180^\circ$, entonces $\cos\theta < 0$ y $\tan\theta < 0$.
Si $0^\circ < \theta < 180^\circ$, siempre $\text{sen }\theta > 0$.

Ⓔ Identifique si los valores tienen signos positivos o negativos, y complete la tabla.

θ	0°	$0^\circ < \theta < 90^\circ$	90°	$90^\circ < \theta < 180^\circ$	180°
sen θ	0	+	1	+	0
cos θ	1	+	0	−	–1
tan θ	0	+	☒	−	0

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180º
Clase 5 Relación de seno, coseno y tangente

Aprendizaje esperado:
Encuentra el valor de las razones trigonométricas usando relación entre seno, coseno y tangente.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 5 Relación de seno, coseno y tangente

P1 Con base en la siguiente figura, en la que la longitud de OA $= 1$ y las coordenadas del punto A (s, t) exprese sen θ, cos θ y tan θ usando (s, t).

S1 Utilice las coordenadas del punto A (s, t).

$\text{sen}\,\theta = \frac{t}{1} = t$ ①

$\cos\theta = \frac{s}{1} = s$ ②

$\tan\theta = \frac{t}{s}$

Se sustituyen los valores de ① y ② en la forma $\tan\theta = \frac{t}{s}$.
Se expresa la relación $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$.

P2 Utilizando la misma figura, aplique el teorema de Pitágoras para llenar los cuadros en blanco para satisfacer la siguiente ecuación.

$\square + \square = \text{OA}^2$

Al sustituir los valores de OS y AS por s y t respectivamente, y el valor de OA por 1:

$\square + \square = 1^2$

Con los resultados de ① y ② en S₁, se obtiene la expresión:
$(\cos\theta)^2 + (\text{sen}\,\theta)^2 = 1$
Se representa $(\cos\theta)^2$ por $\cos^2\theta$ y $(\text{sen}\,\theta)^2$ por $\text{sen}^2\theta$.
De esta manera, la expresión arriba será $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$.
Es decir, $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

S2 $\text{OS}^2 + \text{AS}^2 = \text{OA}^2$
$s^2 + t^2 = 1^2$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 127

Solucionario de los ejercicios:

a. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

Siendo $\cos\theta > 0$,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Además, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

R: $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

Fecha: dd – mm – aa
4-6-5 Relación de seno, coseno y tangente

Ⓒ Relación entre seno, coseno y tangente:

1. $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$
2. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\,\theta = 1$

Ejemplo:
Si $0° < \theta < 90°$ y $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$,
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{25-16}{25} = \frac{9}{25}$$

Siendo $\cos\theta > 0$,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Además, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

Ⓔ a. Si $0° < \theta < 90°$ y $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$,
encuentre el valor de $\cos\theta$ y $\tan\theta$.
$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25-9}{25} = \frac{16}{25}$$

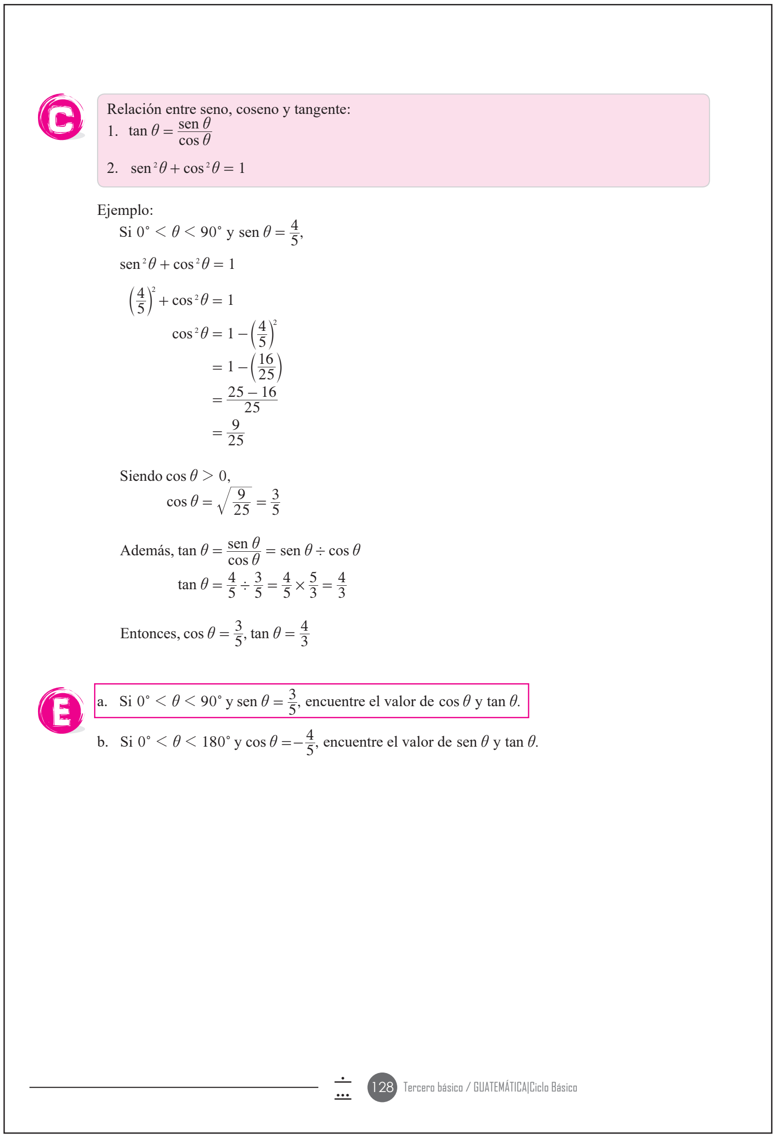
Siendo $\cos\theta > 0$,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Además, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{3}{5} \times \frac{5}{4} = \frac{3}{4}$$

Entonces, $\cos\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = \frac{3}{4}$



C

Relación entre seno, coseno y tangente:

1. $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta}$
2. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

Ejemplo:

Si $0° < \theta < 90°$ y $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$,

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\begin{aligned}\cos^2\theta &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2\\ &= 1 - \left(\frac{16}{25}\right)\\ &= \frac{25-16}{25}\\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

Siendo $\cos\theta > 0$,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$$

Además, $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{5} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{3}$$

Entonces, $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

E

a. Si $0° < \theta < 90°$ y $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$, encuentre el valor de $\cos\theta$ y $\tan\theta$.

b. Si $0° < \theta < 180°$ y $\cos\theta = -\frac{4}{5}$, encuentre el valor de $\text{sen}\,\theta$ y $\tan\theta$.

b. $\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\text{sen}^2\theta + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = 1$$

$$\begin{aligned}\text{sen}^2\theta &= 1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2\\ &= 1 - \frac{16}{25}\\ &= \frac{25-16}{25}\\ &= \frac{9}{25}\end{aligned}$$

Siendo $\text{sen}\,\theta > 0$,

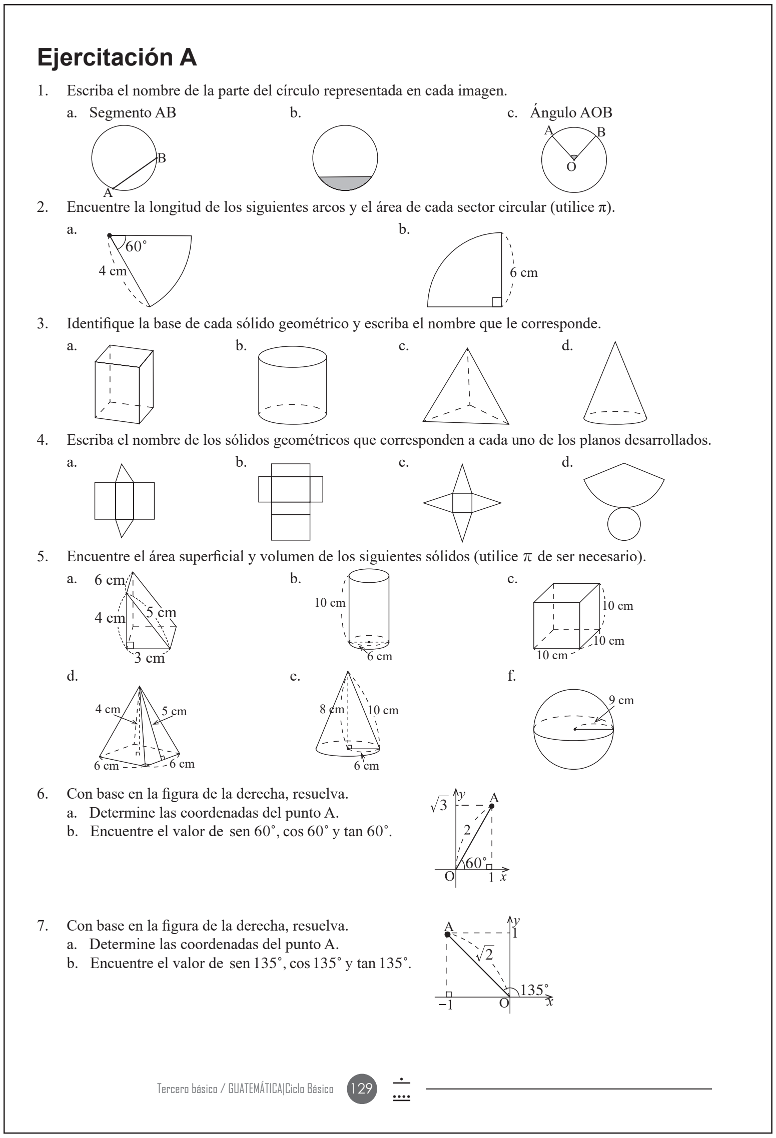
$$\begin{aligned}\text{sen}\,\theta &= \sqrt{\frac{9}{25}}\\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

Además, $\tan\theta = \dfrac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\begin{aligned}\tan\theta &= \frac{3}{5} \div \left(-\frac{4}{5}\right)\\ &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{5}{4}\right)\\ &= -\frac{3}{4}\end{aligned}$$

R: $\text{sen}\,\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = -\frac{3}{4}$

Ejercitación A



Ejercitación A

1. Escriba el nombre de la parte del círculo representada en cada imagen.
   a. Segmento AB b. c. Ángulo AOB

2. Encuentre la longitud de los siguientes arcos y el área de cada sector circular (utilice π).
   a. b.

3. Identifique la base de cada sólido geométrico y escriba el nombre que le corresponde.
   a. b. c. d.

4. Escriba el nombre de los sólidos geométricos que corresponden a cada uno de los planos desarrollados.
   a. b. c. d.

5. Encuentre el área superficial y volumen de los siguientes sólidos (utilice π de ser necesario).
   a. b. c.
   d. e. f.

6. Con base en la figura de la derecha, resuelva.
   a. Determine las coordenadas del punto A.
   b. Encuentre el valor de sen 60°, cos 60° y tan 60°.

7. Con base en la figura de la derecha, resuelva.
   a. Determine las coordenadas del punto A.
   b. Encuentre el valor de sen 135°, cos 135° y tan 135°.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 129

Solucionario:

1. a. Cuerda AB b. Segmento circular
   c. Ángulo central

2. a.

$$l = 2\pi \times 4 \times \frac{60^\circ}{360^\circ} \qquad A = \pi \times 4^2 \times \frac{60^\circ}{360^\circ}$$
$$= 2\pi \times 4 \times \frac{1}{6} \qquad = \pi \times 16 \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{4}{3}\pi \qquad = \frac{8}{3}\pi$$

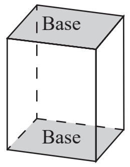
R: $\frac{4}{3}\pi$ cm R: $\frac{8}{3}\pi$ cm^2

b.

$$l = 2\pi \times 6 \times \frac{90^\circ}{360^\circ} \qquad A = \pi \times 6^2 \times \frac{90^\circ}{360^\circ}$$
$$= 2\pi \times 6 \times \frac{1}{4} \qquad = \pi \times 36 \times \frac{1}{4}$$
$$= 3\pi \qquad = 9\pi$$

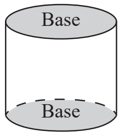
R: 3π cm R: 9π cm^2

3. a.



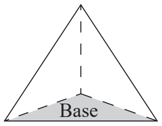
Prisma rectangular

b.



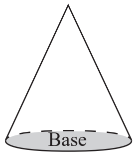
Cilindro

c.



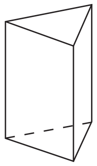
Pirámide triangular

d.



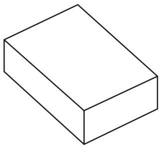
Cono

4. a.



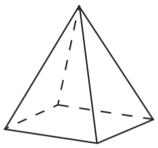
Prisma triangular

b.



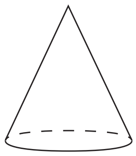
Prisma rectangular

c.



Pirámide cuadrangular

d.



Cono

5. a.

$$(\text{Área superficial}) = 2\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 4\right) + 3 \times 6 + 4 \times 6$$
$$+ 5 \times 6$$
$$= 12 + 18 + 24 + 30$$
$$= 84$$

R: 84 cm^2

$$(\text{Volumen}) = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \times 6$$
$$= 36$$

R: 36 cm^3

b. $(\text{Área superficial}) = 2\pi \times \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 2\pi \times \left(\frac{6}{2}\right) \times 10$
$= 2\pi \times 3^2 + 2\pi \times 3 \times 10$
$= 18\pi + 60\pi$
$= 78\pi$
R: $78\pi\,\text{cm}^2$
$(\text{Volumen}) = \pi \times 3^2 \times 10$
$= 90\pi$
R: $90\pi\,\text{cm}^3$

c. $(\text{Área superficial}) = 6 \times 10^2$
$= 600$
R: $= 600\ \text{cm}^2$
$(\text{Volumen}) = 10 \times 10 \times 10$
$= 1{,}000$
R: $1{,}000\ \text{cm}^3$

d. $(\text{Área superficial}) = 6 \times 6 + 4\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 5\right)$
$= 36 + 60$
$= 96$
R: $96\ \text{cm}^2$
$(\text{Volumen}) = \frac{1}{3} \times 6^2 \times 4$
$= \frac{1}{3} \times 36 \times 4$
$= 48$
R: $48\ \text{cm}^3$

e. $(\text{Área superficial}) = \pi \times 6^2 + \pi \times 6 \times 10$
$= 36\pi + 60\pi$
$= 96\pi$
R: $96\ \pi\text{cm}^2$
$(\text{Volumen}) = \frac{1}{3} \times \pi \times 6^2 \times 8$
$= \frac{1}{3} \times \pi \times 36 \times 8$
$= 96\pi$
R: $96\pi\ \text{cm}^3$

f. $(\text{Área superficial}) = 4 \times \pi \times 9^2$
$= 324\pi$
R: $324\pi\,\text{cm}^2$
$(\text{Volumen}) = \frac{4}{3} \times \pi \times 9^3$
$= 972\pi$
R: $972\pi\ \text{cm}^3$

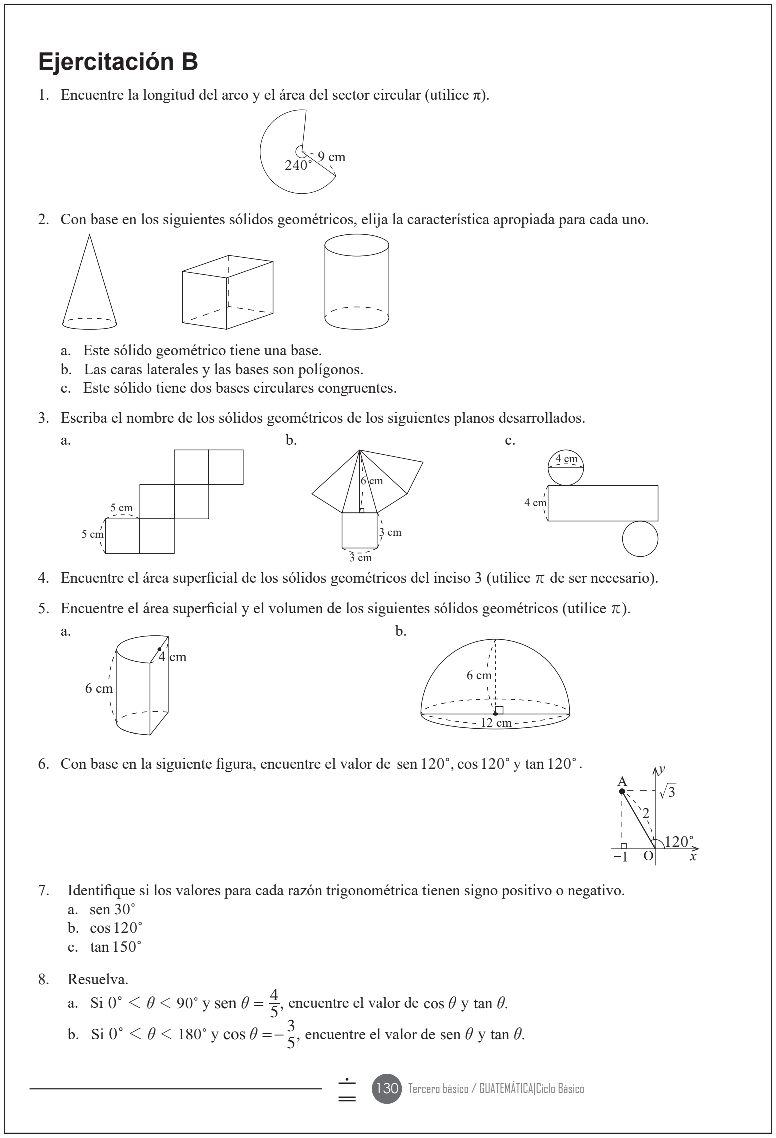
6. a. $A\,(1, \sqrt{3})$

b. $\text{sen}\ 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}, \ \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$

7. a. $A(-1, 1)$

b. $\text{sen}\ 135^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 135^\circ = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \tan 135^\circ = \frac{1}{-1} = -1$

Ejercitación B



Ejercitación B

1. Encuentre la longitud del arco y el área del sector circular (utilice π).

2. Con base en los siguientes sólidos geométricos, elija la característica apropiada para cada uno.

   a. Este sólido geométrico tiene una base.
   b. Las caras laterales y las bases son polígonos.
   c. Este sólido tiene dos bases circulares congruentes.

3. Escriba el nombre de los sólidos geométricos de los siguientes planos desarrollados.

4. Encuentre el área superficial de los sólidos geométricos del inciso 3 (utilice π de ser necesario).

5. Encuentre el área superficial y el volumen de los siguientes sólidos geométricos (utilice π).

6. Con base en la siguiente figura, encuentre el valor de sen 120°, cos 120° y tan 120°.

7. Identifique si los valores para cada razón trigonométrica tienen signo positivo o negativo.
   a. sen 30°
   b. cos 120°
   c. tan 150°

8. Resuelva.
   a. Si $0° < \theta < 90°$ y sen $\theta = \frac{4}{5}$, encuentre el valor de cos θ y tan θ.
   b. Si $0° < \theta < 180°$ y cos $\theta = -\frac{3}{5}$, encuentre el valor de sen θ y tan θ.

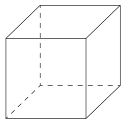
Solucionario:

1. a. $l = 2\pi \times 9 \times \frac{240°}{360°}$
$= 2\pi \times 9 \times \frac{2}{3}$
$= 12\pi$
R: 12π cm

$A = \pi \times 9^2 \times \frac{240°}{360°}$
$= \pi \times 81 \times \frac{2}{3}$
$= 54\pi$
R: 54π cm^2

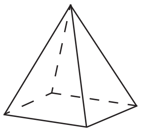
2. a. Cono
   b. Prisma rectangular
   c. Cilindro

3. a.



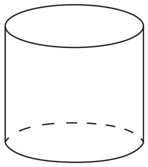
Cubo

b.



Pirámide cuadrangular

c.



Cilindro

4. a. (Área superficial)
$= 6 \times 5^2$
$= 150$
R: 150 cm^2

b. (Área superficial)
$= 3 \times 3 + 4\left(\frac{1}{2} \times 3 \times 6\right)$
$= 9 + 36$
$= 45$
R: 45 cm^2

c. (Área superficial)
$= 2\pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 2\pi \times \left(\frac{4}{2}\right) \times 4$
$= 2\pi \times 2^2 + 2\pi \times 2 \times 4$
$= 8\pi + 16\pi$
$= 24\pi$
R: 24π cm^2

5. a. (Área superficial)
$$= \underbrace{2 \times \frac{1}{2} \times \pi\left(\frac{4}{2}\right)^2}_{\text{(Área de las bases)}} + \underbrace{\frac{1}{2} \times 2\pi \times \left(\frac{4}{2}\right) \times 6}_{\text{(Área de la cara lateral curva)}} + \underbrace{4 \times 6}_{\text{(Área de la cara lateral plana)}}$$
$= 4\pi + 12\pi + 24$
$= 16\pi + 24$
R: $16\pi + 24$cm^2

(Volumen)
$= \frac{1}{2} \times \pi \times \left(\frac{4}{2}\right)^2 \times 6$
$= 12\pi$
R: 12π cm^3

b. (Área superficial)

$$= \underbrace{\frac{1}{2}(4\pi \times 6^2)}_{\text{(Área de la cara curva)}} + \underbrace{\pi \times 6^2}_{\text{(Área de la cara plana)}}$$

$$= 72\pi + 36\pi$$

$$= 108\,\pi$$

R: $108\,\pi\,\text{cm}^2$

(Volumen)

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \times \pi \times 6^3$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi \times 216$$

$$= 144\pi$$

R: $144\pi\ \text{cm}^3$

6. $\text{sen}\,120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\tan 120° = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3}$

7. a. Positivo
   b. Negativo
   c. Negativo

8. a. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{16}{25}$$

$$= \frac{25-16}{25}$$

$$= \frac{9}{25}$$

Siendo $\cos\theta > 0$,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{3}{5}$$

Además, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5}$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{5}{3}$$

$$= \frac{4}{3}$$

R: $\cos\theta = \frac{3}{5}$, $\tan\theta = \frac{4}{3}$

b. $\text{sen}^2\,\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\text{sen}^2\,\theta + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\text{sen}^2\,\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2$$

$$= 1 - \frac{9}{25}$$

$$= \frac{25-9}{25}$$

$$= \frac{16}{25}$$

Siendo $\text{sen}\,\theta > 0$,

$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$= \frac{4}{5}$$

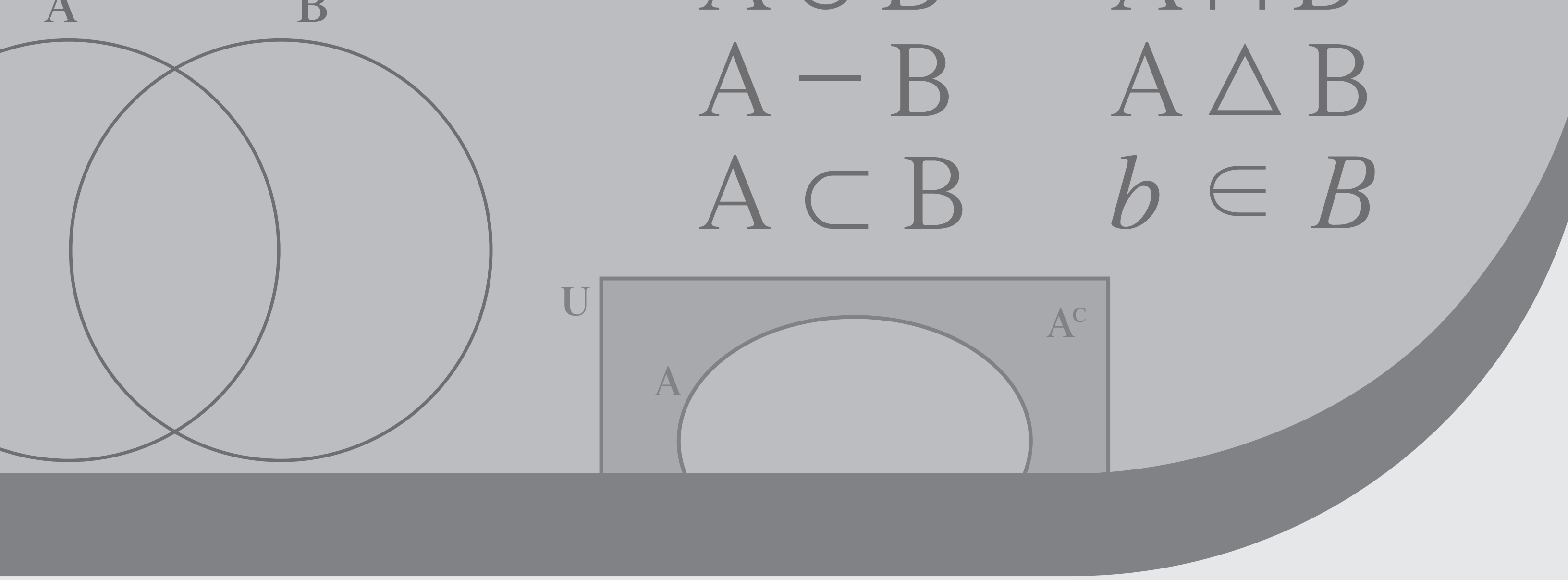
Además, $\tan\theta = \frac{\text{sen}\,\theta}{\cos\theta} = \text{sen}\,\theta \div \cos\theta$

$$\tan\theta = \frac{4}{5} \div \left(-\frac{3}{5}\right)$$

$$= \frac{4}{5} \times \left(-\frac{5}{3}\right)$$

$$= -\frac{4}{3}$$

R: $\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}$, $\tan\theta = -\frac{4}{3}$



Unidad 5 —

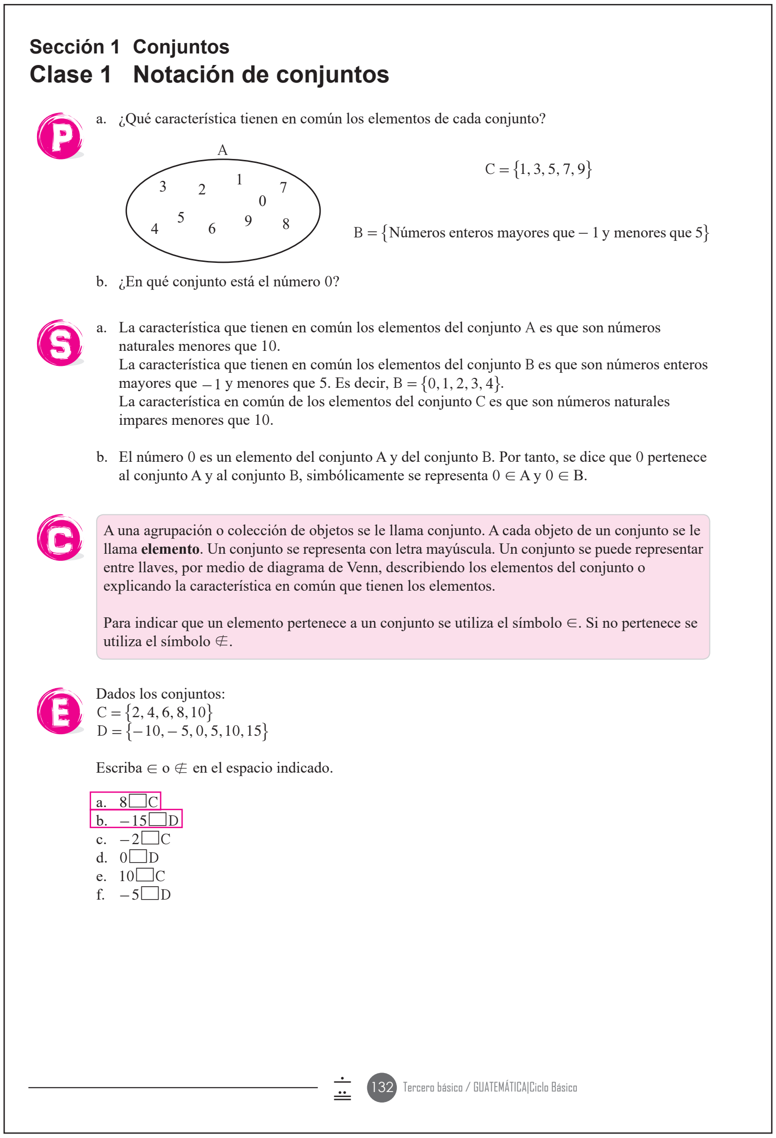
Lógica

Plan de estudio - Unidad 5 Lógica -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
2. Construye modelos matemáticos para el análisis y representación de las relaciones.	2.2 Resuelve problemas aplicando la teoría de conjuntos.	1. Conjuntos	1.1 Notación de conjuntos	Utiliza la notación de conjuntos para expresar conjuntos y sus elementos.
			1.2 Conjunto vacío	Identifica un conjunto vacío.
			1.3 Subconjuntos	Encuentra los subconjuntos de un conjunto.
			1.4 Unión de conjuntos	Encuentra la unión de dos conjuntos.
			1.5 Intersección de conjuntos	Encuentra la intersección de dos conjuntos.
			1.6 Diferencia de conjuntos	Encuentra la diferencia de dos conjuntos.
			1.7 Diferencia simétrica de conjuntos	Encuentra la diferencia simétrica de dos conjuntos.
			1.8 Complemento de un conjunto	Encuentra el complemento de un conjunto.
	2.1 Emite juicios argumentando procedimientos y resultados.	2. Relaciones entre conjuntos y proposiciones	2.1 Conjunción	Identifica la relación entre la intersección de conjuntos y la conjunción de proposiciones.
			2.2 Disyunción	Identifica la relación entre la unión de conjuntos y la disyunción de proposiciones.
			2.3 Negación	Identifica la relación entre el complemento de un conjunto y la negación de proposiciones.
		3. Razonamientos	3.1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)	Indica el tipo de razonamiento usado para obtener una conclusión.
			3.2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)	Obtiene conclusiones de premisas usando el método inductivo y deductivo.
		4. Relación de definiciones	4.1 Relación de definiciones	Identifica si una proposición es axioma, postulado, teorema, corolario o falacia lógica.

Sección 1 Conjuntos
Clase 1 Notación de conjuntos

Aprendizaje esperado:
Utiliza la notación de conjuntos para expresar conjuntos y sus elementos.



Sección 1 Conjuntos
Clase 1 Notación de conjuntos

P a. ¿Qué característica tienen en común los elementos de cada conjunto?

$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{\text{Números enteros mayores que } -1 \text{ y menores que } 5\}$

b. ¿En qué conjunto está el número 0?

S a. La característica que tienen en común los elementos del conjunto A es que son números naturales menores que 10.
La característica que tienen en común los elementos del conjunto B es que son números enteros mayores que -1 y menores que 5. Es decir, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
La característica en común de los elementos del conjunto C es que son números naturales impares menores que 10.

b. El número 0 es un elemento del conjunto A y del conjunto B. Por tanto, se dice que 0 pertenece al conjunto A y al conjunto B, simbólicamente se representa $0 \in A$ y $0 \in B$.

C A una agrupación o colección de objetos se le llama conjunto. A cada objeto de un conjunto se le llama **elemento**. Un conjunto se representa con letra mayúscula. Un conjunto se puede representar entre llaves, por medio de diagrama de Venn, describiendo los elementos del conjunto o explicando la característica en común que tienen los elementos.

Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo $\in$. Si no pertenece se utiliza el símbolo $\notin$.

E Dados los conjuntos:
$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$D = \{-10, -5, 0, 5, 10, 15\}$

Escriba $\in$ o $\notin$ en el espacio indicado.

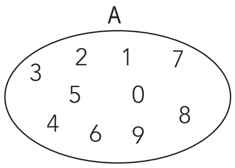
a. $8 \square C$
b. $-15 \square D$
c. $-2 \square C$
d. $0 \square D$
e. $10 \square C$
f. $-5 \square D$

Solucionario de los ejercicios:

a. $8 \boxed{\in} C$
b. $-15 \boxed{\notin} D$
c. $-2 \boxed{\notin} C$
d. $0 \boxed{\in} D$
e. $10 \boxed{\in} C$
f. $-5 \boxed{\in} D$

Fecha: dd – mm – aa
5-1-1 Notación de conjuntos

Ⓟ a. ¿Qué característica tienen en común los elementos de cada conjunto?



$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{\text{Números enteros mayores que } -1 \text{ y menores que } 5\}$

b. ¿En qué conjunto está el número 0?

Ⓢ a. Conjunto A: números naturales menores que 10.
Conjunto B: números enteros mayores que -1 y menores que 5. Es decir, B={0, 1, 2, 3, 4}.
Conjunto C: números naturales impares menores que 10.

b. 0 pertenece al conjunto A y al conjunto B, simbólicamente se representa $0 \in A$ y $0 \in B$.

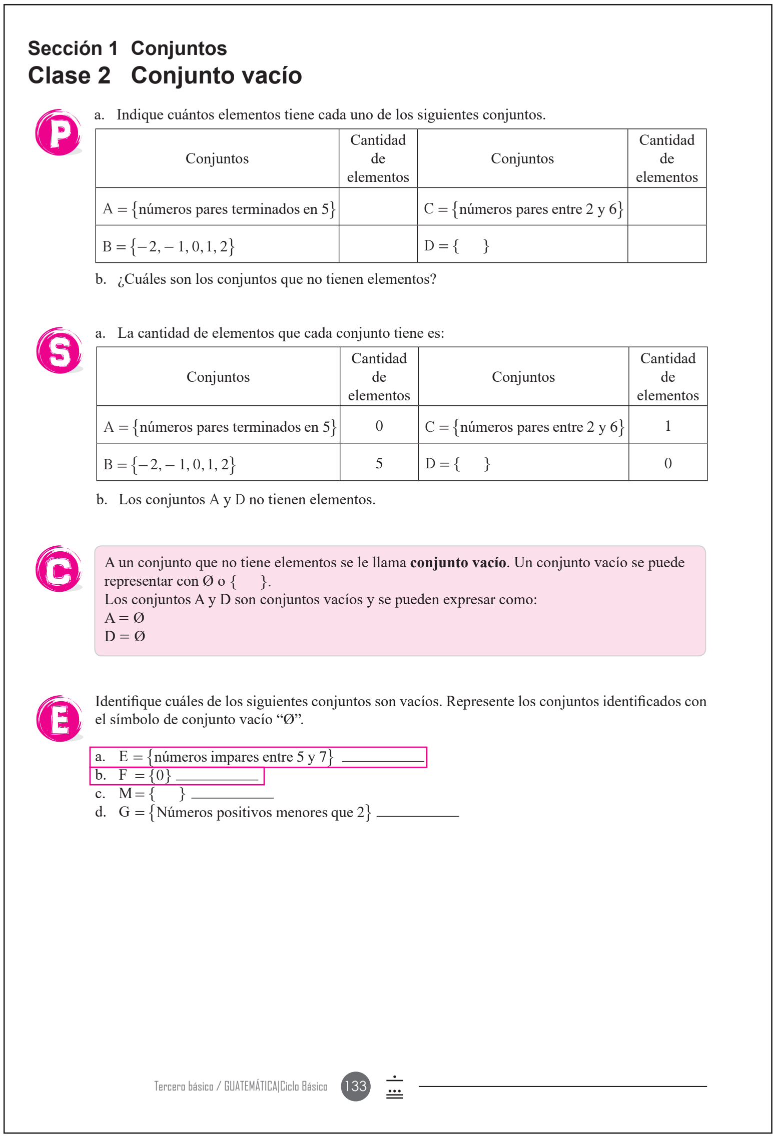
Ⓒ A una agrupación o colección de objetos se le llama conjunto. A cada objeto de un conjunto se le llama elemento.
Para indicar que un elemento pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo $\in$. Si no pertenece se utiliza el símbolo $\notin$.

Ⓔ Escriba $\in$ o $\notin$ en el espacio indicado.
$C = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$D = \{-10, -5, 0, 5, 10, 15\}$

a. $8 \boxed{\in} C$
b. $-15 \boxed{\notin} D$

Sección 1 Conjuntos
Clase 2 Conjunto vacío

Aprendizaje esperado:
Identifica un conjunto vacío.



Sección 1 Conjuntos
Clase 2 Conjunto vacío

P
a. Indique cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos.

Conjuntos	Cantidad de elementos	Conjuntos	Cantidad de elementos
A = {números pares terminados en 5}		C = {números pares entre 2 y 6}	
B = {−2, − 1, 0, 1, 2}		D = { }	

b. ¿Cuáles son los conjuntos que no tienen elementos?

S
a. La cantidad de elementos que cada conjunto tiene es:

Conjuntos	Cantidad de elementos	Conjuntos	Cantidad de elementos
A = {números pares terminados en 5}	0	C = {números pares entre 2 y 6}	1
B = {−2, − 1, 0, 1, 2}	5	D = { }	0

b. Los conjuntos A y D no tienen elementos.

C
A un conjunto que no tiene elementos se le llama **conjunto vacío**. Un conjunto vacío se puede representar con Ø o { }.
Los conjuntos A y D son conjuntos vacíos y se pueden expresar como:
A = Ø
D = Ø

E
Identifique cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos. Represente los conjuntos identificados con el símbolo de conjunto vacío "Ø".

a. E = {números impares entre 5 y 7} ________
b. F = {0} ________
c. M = { } ________
d. G = {Números positivos menores que 2} ________

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 133

Solucionario de los ejercicios:

a. E es conjunto vacío. E = Ø
b. F no es conjunto vacío.
c. M es conjuto vacío. M = Ø
d. G no es conjunto vacío.

Fecha: dd – mm – aa
5-1-2 Conjunto vacío

Ⓟ a. Indique cuántos elementos tiene cada uno de los siguientes conjuntos.
b. ¿Cuáles son los conjuntos que no tienen elementos?

Ⓢ a.

Conjuntos	Cantidad de elementos
A = {números pares terminados en 5}	0
B = {−2, − 1,0, 1, 2}	5
C = {números pares entre 2 y 6}	1
D = { }	0

b. Los conjuntos A y D no tienen elementos.

Ⓒ A un conjunto que no tiene elementos se le llama conjunto vacío. Un conjunto vacío se puede representar con Ø o { }.
Los conjuntos A y D son conjuntos vacíos y se pueden expresar como:
A = Ø
D = Ø

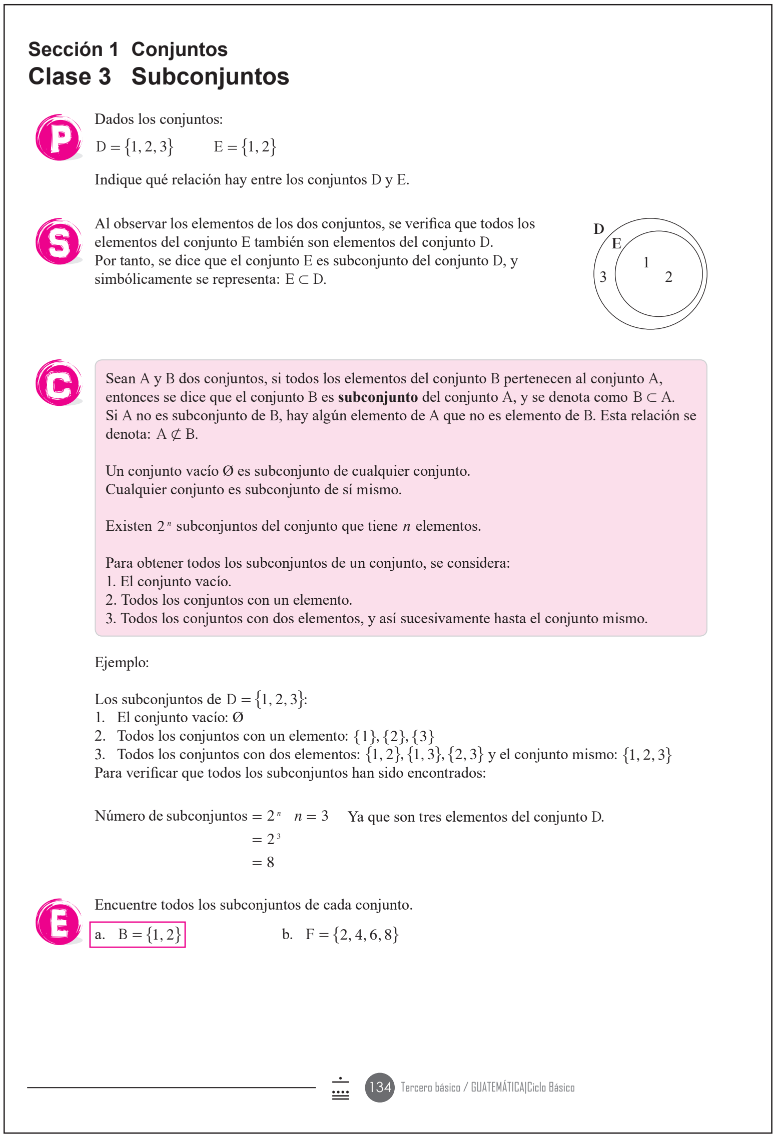
Ⓔ Identifique los conjuntos vacíos.
Coloque Ø para representar los conjuntos vacíos.

a. E = {números impares entre 5 y 7}
R: E es conjunto vacío. E = Ø

b. F = {0}
R: F no es conjunto vacío.

Sección 1 Conjuntos
Clase 3 Subconjuntos

Aprendizaje esperado:
Encuentra los subconjuntos de un conjunto.



Sección 1 Conjuntos
Clase 3 Subconjuntos

P Dados los conjuntos:
$D = \{1, 2, 3\}$ $E = \{1, 2\}$
Indique qué relación hay entre los conjuntos D y E.

S Al observar los elementos de los dos conjuntos, se verifica que todos los elementos del conjunto E también son elementos del conjunto D.
Por tanto, se dice que el conjunto E es subconjunto del conjunto D, y simbólicamente se representa: $E \subset D$.

C Sean A y B dos conjuntos, si todos los elementos del conjunto B pertenecen al conjunto A, entonces se dice que el conjunto B es **subconjunto** del conjunto A, y se denota como $B \subset A$.
Si A no es subconjunto de B, hay algún elemento de A que no es elemento de B. Esta relación se denota: $A \not\subset B$.

Un conjunto vacío Ø es subconjunto de cualquier conjunto.
Cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Existen 2^n subconjuntos del conjunto que tiene n elementos.

Para obtener todos los subconjuntos de un conjunto, se considera:
1. El conjunto vacío.
2. Todos los conjuntos con un elemento.
3. Todos los conjuntos con dos elementos, y así sucesivamente hasta el conjunto mismo.

Ejemplo:

Los subconjuntos de $D = \{1, 2, 3\}$:
1. El conjunto vacío: Ø
2. Todos los conjuntos con un elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
3. Todos los conjuntos con dos elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$ y el conjunto mismo: $\{1, 2, 3\}$

Para verificar que todos los subconjuntos han sido encontrados:

Número de subconjuntos $= 2^n$ $n = 3$ Ya que son tres elementos del conjunto D.
$= 2^3$
$= 8$

E Encuentre todos los subconjuntos de cada conjunto.
a. $B = \{1, 2\}$ b. $F = \{2, 4, 6, 8\}$

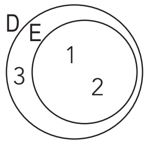
Solucionario de los ejercicios:

a.	El conjunto vacío	Ø
	Todos los conjuntos con un elemento	$\{1\}, \{2\}$
	El conjunto mismo	$\{1, 2\}$
b.	El conjunto vacío	Ø
	Todos los conjuntos con un elemento	$\{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}$
	Todos los conjuntos con dos elementos	$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\},$ $\{4, 6\}, \{4, 8\}, \{6, 8\}$
	Todos los conjuntos con tres elementos	$\{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\},$ $\{2, 6, 8\}, \{4, 6, 8\}$
	El conjunto mismo	$\{2, 4, 6, 8\}$

Fecha: dd – mm – aa
5-1-3 Subconjuntos

Ⓟ Indique qué relación hay entre los conjuntos D y E.
$D = \{1, 2, 3\}$
$E = \{1, 2\}$

Ⓢ El conjunto E es subconjunto del conjunto D.



$E \subset D$

Ⓒ Sean A y B dos conjuntos, si todos los elementos del conjunto B pertenecen al conjunto A, entonces se dice que el conjunto B es subconjunto del conjunto A, y se denota como $B \subset A$.
Si A no es subconjunto de B, hay algún elemento de A que no es elemento de B. Esta relación se denota: $A \not\subset B$.

Un conjunto vacío Ø es subconjunto de cualquier conjunto.
Cualquier conjunto es subconjunto de sí mismo.

Ejemplo:
Los subconjuntos de $D = \{1, 2, 3\}$:
1. El conjunto vacío: Ø
2. Todos los conjuntos con un elemento: $\{1\}, \{2\}, \{3\}$.
3. Todos los conjuntos con dos elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
   y el conjunto mismo: $\{1, 2, 3\}$

Número de subconjuntos $= 2^n$ Número de elementos: $n = 3$
$= 2^3$
$= 8$

Ⓔ Encuentre todos los subconjuntos de cada conjunto.

a. $B = \{1, 2\}$
   El conjunto vacío: Ø
   Todos los conjuntos con un elemento: $\{1\}, \{2\}$
   El conjunto mismo: $\{1, 2\}$

Sección 1 Conjuntos
Clase 4 Unión de conjuntos

Aprendizaje esperado:
Encuentra la unión de dos conjuntos.

Sección 1 Conjuntos
Clase 4 Unión de conjuntos

P En el Instituto de Educación Básica hay dos equipos de diferentes deportes. Los integrantes de cada equipo se presentan a continuación:
Equipo de vóleibol $M = \{$Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana$\}$
Equipo de básquetbol $N = \{$Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario$\}$

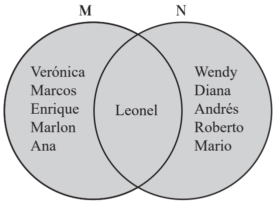
¿Qué jugadores practican vóleibol o básquetbol?

S Los jugadores que practican vóleibol o básquetbol son: Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana, Wendy, Diana, Andrés, Roberto, Mario. Ellos son elementos del conjunto M o del conjunto N.

El conjunto formado por los jugadores que practican vóleibol o básquetbol es llamado unión de los conjuntos M y N. Se escribe:

$M \cup N = \{$Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana, Wendy, Diana, Andrés, Roberto, Mario$\}$

Este conjunto puede ser representado usando el diagrama de Venn:



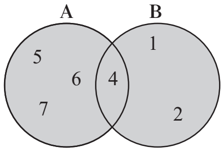
C La **unión** de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a los dos conjuntos. Simbólicamente la unión se representa: $A \cup B$.

E Dados los conjuntos:
$A = \{4, 5, 6, 7\}$
$B = \{1, 2, 4\}$
$C = \{-4, -2, 2, 4\}$

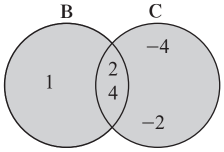
Encuentre la unión y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
a. $A \cup B$
b. $B \cup C$
c. $C \cup A$

Solucionario de los ejercicios:

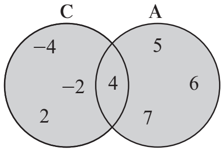
a. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$



b. $B \cup C = \{-4, -2, 1, 2, 4\}$



c. $C \cup A = \{-4, -2, 2, 4, 5, 6, 7\}$



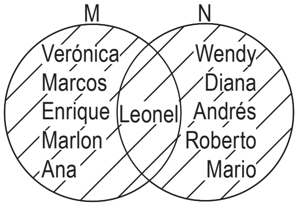
Fecha: dd – mm – aa
5-1-4 Unión de conjuntos

Ⓟ Equipo de vóleibol
$M = \{$Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon, Ana$\}$
Equipo de básquetbol
$N = \{$Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario$\}$

¿Qué jugadores practican vóleibol o básquetbol?

Ⓢ El conjunto formado por los jugadores que practican vóleibol o básquetbol es llamado unión de los conjuntos M y N. Se escribe:

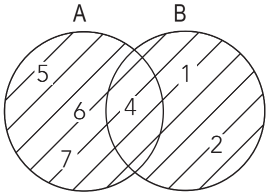
$$M \cup N = \left\{\begin{matrix}\text{Verónica, Marcos, Leonel, Enrique, Marlon,}\\ \text{Ana, Wendy, Diana, Andrés, Roberto, Mario}\end{matrix}\right\}$$



Ⓒ La unión de dos conjuntos es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a los dos conjuntos. Simbólicamente se representa: $A \cup B$.

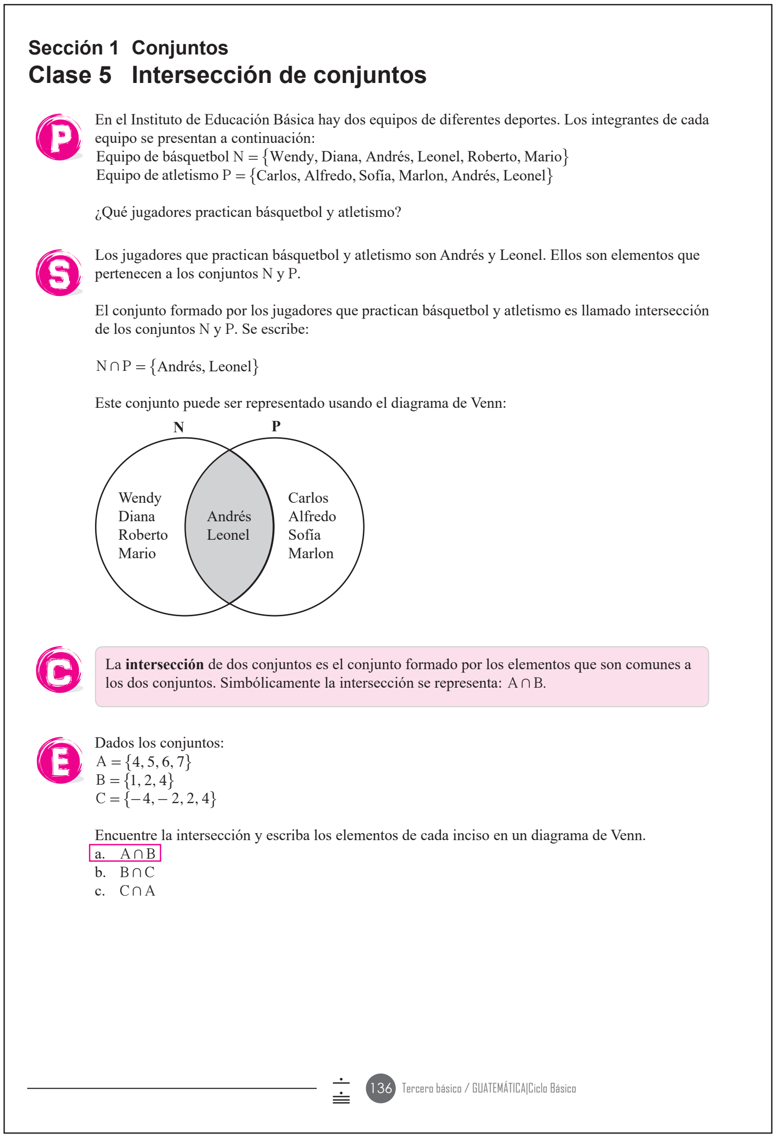
Ⓔ Escriba los elementos de la unión en un diagrama de Venn.
$A = \{4, 5, 6, 7\}$
$B = \{1, 2, 4\}$

a. $A \cup B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7\}$



Sección 1 Conjuntos
Clase 5 Intersección de conjuntos

Aprendizaje esperado:
Encuentra la intersección de dos conjuntos.



Sección 1 Conjuntos
Clase 5 Intersección de conjuntos

P En el Instituto de Educación Básica hay dos equipos de diferentes deportes. Los integrantes de cada equipo se presentan a continuación:
Equipo de básquetbol N = {Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario}
Equipo de atletismo P = {Carlos, Alfredo, Sofía, Marlon, Andrés, Leonel}

¿Qué jugadores practican básquetbol y atletismo?

S Los jugadores que practican básquetbol y atletismo son Andrés y Leonel. Ellos son elementos que pertenecen a los conjuntos N y P.

El conjunto formado por los jugadores que practican básquetbol y atletismo es llamado intersección de los conjuntos N y P. Se escribe:

$N \cap P = \{$Andrés, Leonel$\}$

Este conjunto puede ser representado usando el diagrama de Venn:

C La **intersección** de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que son comunes a los dos conjuntos. Simbólicamente la intersección se representa: $A \cap B$.

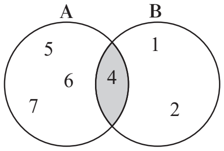
E Dados los conjuntos:
$A = \{4, 5, 6, 7\}$
$B = \{1, 2, 4\}$
$C = \{-4, -2, 2, 4\}$

Encuentre la intersección y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
a. $A \cap B$
b. $B \cap C$
c. $C \cap A$

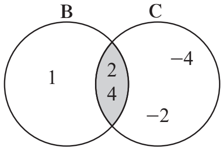
136 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

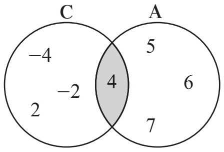
a. $A \cap B = \{4\}$



b. $B \cap C = \{2, 4\}$



c. $C \cap A = \{4\}$

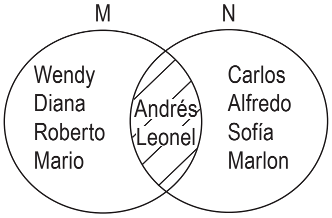


Fecha: dd – mm – aa
5-1-5 Intersección de conjuntos

Ⓟ Equipo de básquetbol
$N = \{$Wendy, Diana, Andrés, Leonel, Roberto, Mario$\}$
Equipo de atletismo
$P = \{$Carlos, Alfredo, Sofía, Marlon, Andrés, Leonel$\}$

¿Qué jugadores practican básquetbol y atletismo?

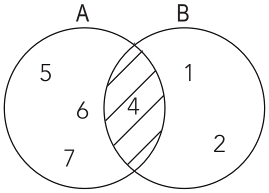
Ⓢ El conjunto formado por los jugadores que practican básquetbol y atletismo es llamado intersección de los conjuntos N y P. Se escribe:
$N \cap P = \{$Andrés, Leonel$\}$



Ⓒ La intersección de dos conjuntos es el conjunto formado por los elementos que son comunes a los dos conjuntos. Simbólicamente se representa: $A \cap B$.

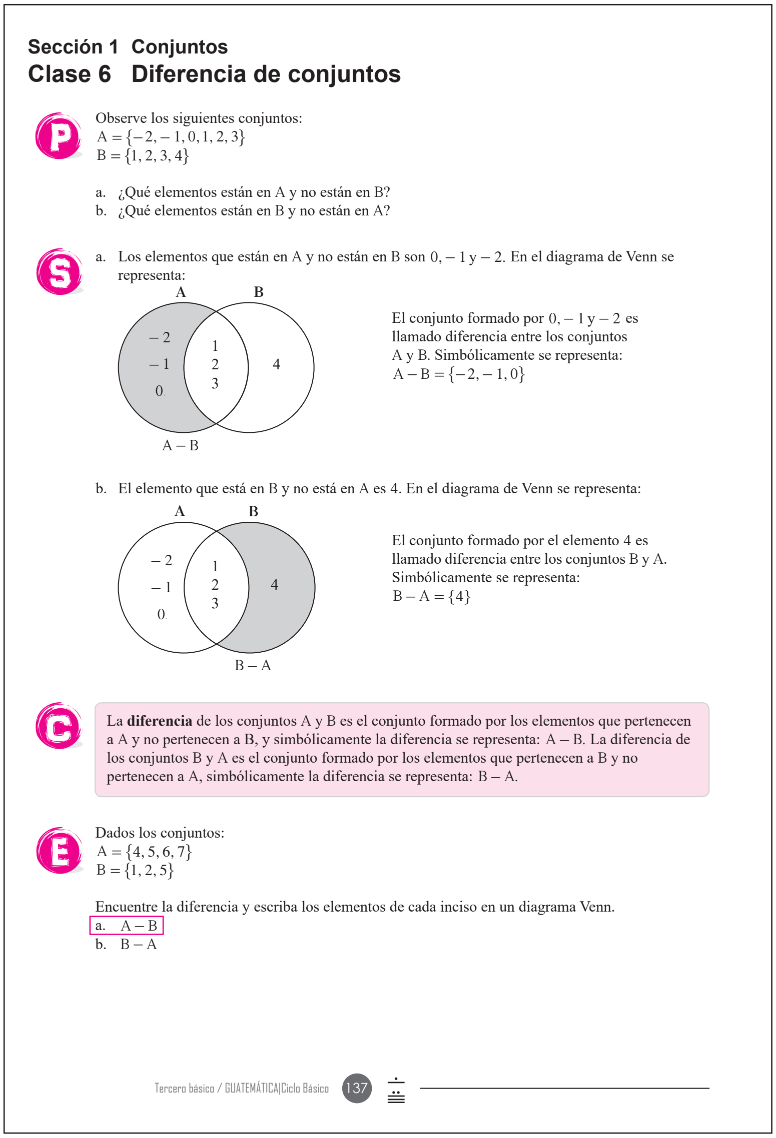
Ⓔ Escriba los elementos de la intersección en un diagrama de Venn.
$A = \{4, 5, 6, 7\}$
$B = \{1, 2, 4\}$

a. $A \cap B = \{4\}$



Sección 1 Conjuntos
Clase 6 Diferencia de conjuntos

Aprendizaje esperado:
Encuentra la diferencia de dos conjuntos.



Sección 1 Conjuntos
Clase 6 Diferencia de conjuntos

P Observe los siguientes conjuntos:
A = {−2, − 1, 0, 1, 2, 3}
B = {1, 2, 3, 4}

a. ¿Qué elementos están en A y no están en B?
b. ¿Qué elementos están en B y no están en A?

S a. Los elementos que están en A y no están en B son 0, − 1 y − 2. En el diagrama de Venn se representa:

El conjunto formado por 0, − 1 y − 2 es llamado diferencia entre los conjuntos A y B. Simbólicamente se representa:
A − B = {−2, − 1, 0}

b. El elemento que está en B y no está en A es 4. En el diagrama de Venn se representa:

El conjunto formado por el elemento 4 es llamado diferencia entre los conjuntos B y A. Simbólicamente se representa:
B − A = {4}

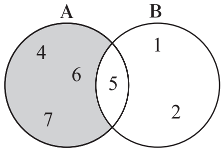
C La **diferencia** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, y simbólicamente la diferencia se representa: A − B. La diferencia de los conjuntos B y A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A, simbólicamente la diferencia se representa: B − A.

E Dados los conjuntos:
A = {4, 5, 6, 7}
B = {1, 2, 5}

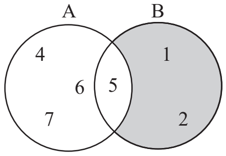
Encuentre la diferencia y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama Venn.
a. A − B
b. B − A

Solucionario de los ejercicios:

a. A − B = {4, 6, 7}



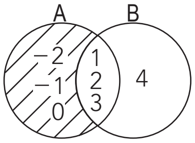
b. B − A = {1, 2}



Fecha: dd – mm – aa
5-1-6 Diferencia de conjuntos

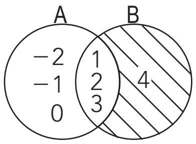
Ⓟ A = {−2, − 1, 0, 1, 2, 3}
B = {1, 2, 3, 4}
a. ¿Qué elementos están en A y no están en B?
b. ¿Qué elementos están en B y no están en A?

Ⓢ a. Los elementos que están en A y no están en B son 0, − 1 y − 2 .



A − B = {−2, − 1, 0}

b. El elemento que está en B y no está en A es 4.



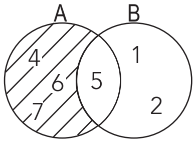
B − A = {4}

Ⓒ La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B, y simbólicamente se representa: A − B.
La diferencia de los conjuntos B y A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A, y simbólicamente se representa: B − A.

Ⓔ Escriba los elementos de la diferencia en un diagrama de Venn.

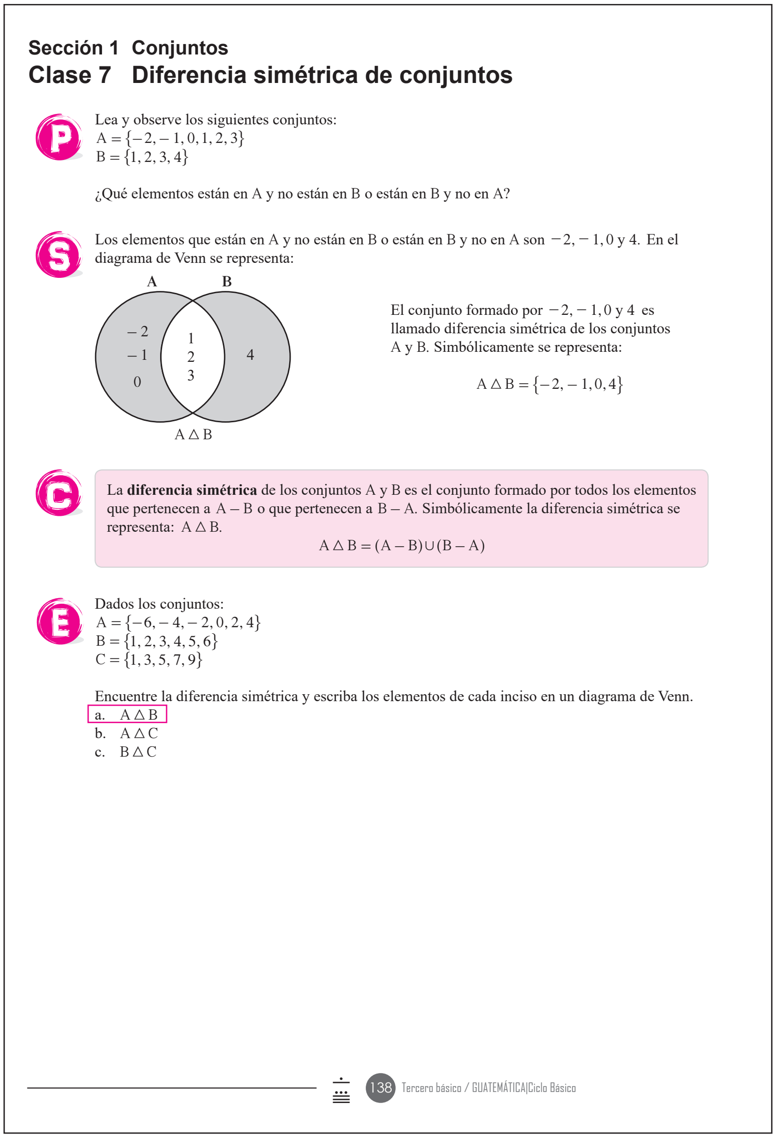
A = {4, 5, 6, 7}
B = {1, 2, 5}

a. A − B = {4, 6, 7}



Sección 1 Conjuntos
Clase 7 Diferencia simétrica de conjuntos

Aprendizaje esperado:
Encuentra la diferencia simétrica de dos conjuntos.



Sección 1 Conjuntos
Clase 7 Diferencia simétrica de conjuntos

P Lea y observe los siguientes conjuntos:
$A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$
$B=\{1,2,3,4\}$

¿Qué elementos están en A y no están en B o están en B y no en A?

S Los elementos que están en A y no están en B o están en B y no en A son $-2,-1,0$ y 4. En el diagrama de Venn se representa:

El conjunto formado por $-2,-1,0$ y 4 es llamado diferencia simétrica de los conjuntos A y B. Simbólicamente se representa:

$A \triangle B=\{-2,-1,0,4\}$

C La **diferencia simétrica** de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a $A-B$ o que pertenecen a $B-A$. Simbólicamente la diferencia simétrica se representa: $A \triangle B$.

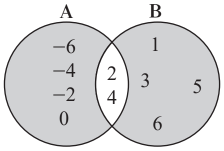
$A \triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

E Dados los conjuntos:
$A=\{-6,-4,-2,0,2,4\}$
$B=\{1,2,3,4,5,6\}$
$C=\{1,3,5,7,9\}$

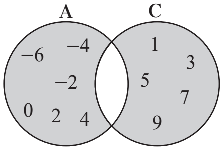
Encuentre la diferencia simétrica y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
a. $A \triangle B$
b. $A \triangle C$
c. $B \triangle C$

Solucionario de los ejercicios:

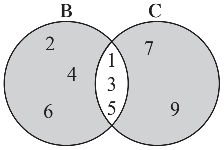
a. $A \triangle B$
$=\{-6,-4,-2,0,1,3,5,6\}$



b. $A \triangle C$
$=\{-6-4,-2,0,1,2,3,4,5,7,9\}$



c. $B \triangle C$
$=\{2,4,6,7,9\}$

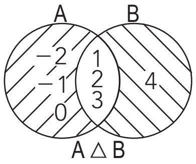


Fecha: dd – mm – aa
5-1-7 Diferencia simétrica de conjuntos

Ⓟ $A=\{-2,-1,0,1,2,3\}$
$B=\{1,2,3,4\}$

¿Qué elementos están en A y no están en B o están en B y no en A?

Ⓢ Los elementos que están en A y no están en B o están en B y no en A son $-2,-1,0$ y 4.

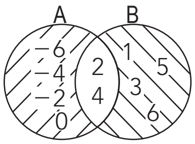


$A \triangle B=\{-2,-1,0,4\}$

Ⓒ La diferencia simétrica de los conjuntos A y B es el conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a $A-B$ o que pertenecen a $B-A$. Simbólicamente se representa: $A \triangle B$.
$A \triangle B=(A-B)\cup(B-A)$.

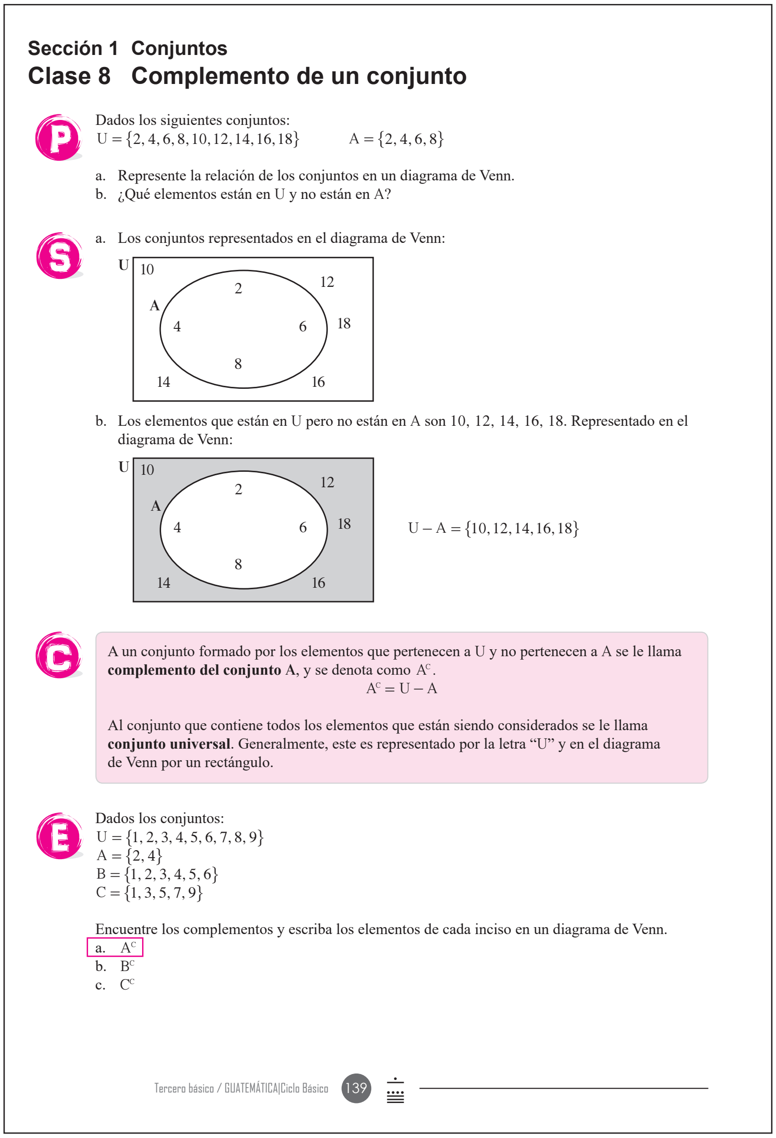
Ⓔ Escriba los elementos de la diferencia simétrica en un diagrama de Venn.
$A=\{-6,-4,-2,0,2,4\}$
$B=\{1,2,3,4,5,6\}$

a. $A \triangle B=\{-6,-4,-2,0,1,3,5,6\}$



Sección 1 Conjuntos
Clase 8 Complemento de un conjunto

Aprendizaje esperado:
Encuentra el complemento de un conjunto.



Sección 1 Conjuntos
Clase 8 Complemento de un conjunto

P Dados los siguientes conjuntos:
$U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ $A = \{2, 4, 6, 8\}$

a. Represente la relación de los conjuntos en un diagrama de Venn.
b. ¿Qué elementos están en U y no están en A?

S a. Los conjuntos representados en el diagrama de Venn:

b. Los elementos que están en U pero no están en A son 10, 12, 14, 16, 18. Representado en el diagrama de Venn:

$U - A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$

C A un conjunto formado por los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A se le llama **complemento del conjunto A**, y se denota como A^c.

$$A^c = U - A$$

Al conjunto que contiene todos los elementos que están siendo considerados se le llama **conjunto universal**. Generalmente, este es representado por la letra "U" y en el diagrama de Venn por un rectángulo.

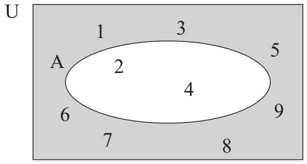
E Dados los conjuntos:
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{2, 4\}$
$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Encuentre los complementos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
a. A^c
b. B^c
c. C^c

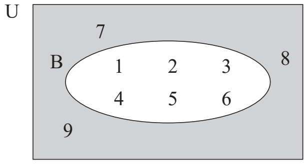
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 139

Solucionario de los ejercicios:

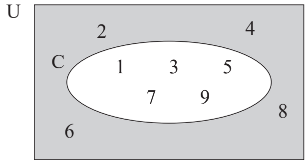
a. $A^c = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$



b. $B^c = \{7, 8, 9\}$



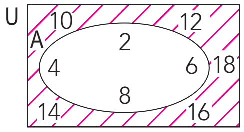
c. $C^c = \{2, 4, 6, 8\}$



Fecha: dd – mm – aa
5-1-8 Complemento de un conjunto

Ⓟ $U = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$
$A = \{2, 4, 6, 8\}$
a. Represente la relación de los conjuntos en un diagrama de Venn.
b. ¿Qué elementos están en U y no están en A?

Ⓢ a.
b.



$U - A = \{10, 12, 14, 16, 18\}$

Ⓒ A un conjunto formado por los elementos que pertenecen a U y no pertenecen a A se le llama complemento de un conjunto A, y se denota como A^c.

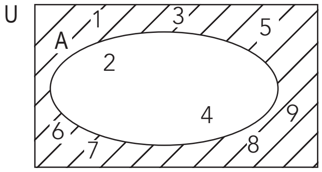
$$A^c = U - A$$

Al conjunto que contiene todos los elementos que están siendo considerados se le llama conjunto universal. Generalmente es representado por "U" y en el diagrama de Venn por un rectángulo.

Ⓔ Encuentre los elementos del complemento y escríbalos en un diagrama de Venn.

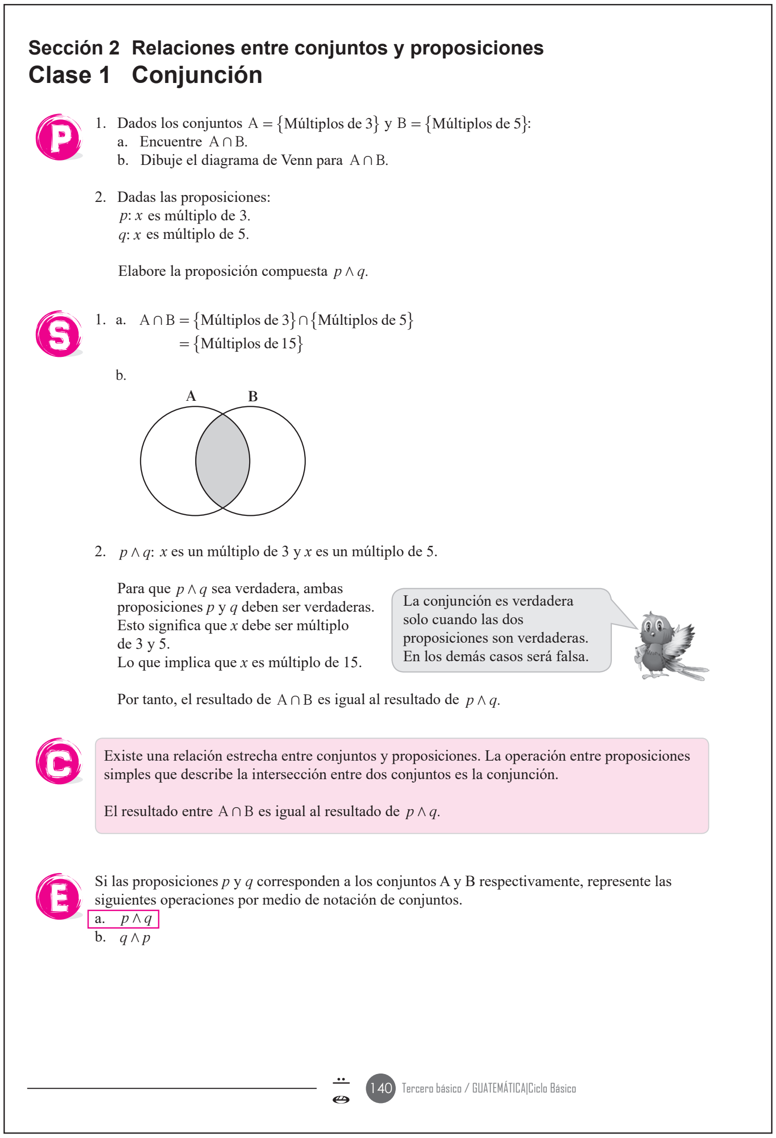
$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
$A = \{2, 4\}$

a. $A^c = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$



Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 1 Conjunción

Aprendizaje esperado:
Identifica la relación entre la intersección de conjuntos y la conjunción de proposiciones.



Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 1 Conjunción

P
1. Dados los conjuntos A = {Múltiplos de 3} y B = {Múltiplos de 5}:
   a. Encuentre A ∩ B.
   b. Dibuje el diagrama de Venn para A ∩ B.
2. Dadas las proposiciones:
   p: x es múltiplo de 3.
   q: x es múltiplo de 5.

   Elabore la proposición compuesta $p \wedge q$.

S
1. a. A ∩ B = {Múltiplos de 3} ∩ {Múltiplos de 5}
   = {Múltiplos de 15}

   b.

2. $p \wedge q$: x es un múltiplo de 3 y x es un múltiplo de 5.

   Para que $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones p y q deben ser verdaderas. Esto significa que x debe ser múltiplo de 3 y 5. Lo que implica que x es múltiplo de 15.

   La conjunción es verdadera solo cuando las dos proposiciones son verdaderas. En los demás casos será falsa.

   Por tanto, el resultado de A ∩ B es igual al resultado de $p \wedge q$.

C
Existe una relación estrecha entre conjuntos y proposiciones. La operación entre proposiciones simples que describe la intersección entre dos conjuntos es la conjunción.

El resultado entre A ∩ B es igual al resultado de $p \wedge q$.

E
Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
a. $p \wedge q$
b. $q \wedge p$

140 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

Considerando que la proposición p corresponde al conjunto A y la proposición q corresponde al conjunto B.

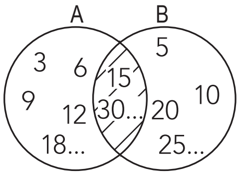
a. A ∩ B
b. B ∩ A

Fecha: dd – mm – aa
5-2-1 Conjunción

Ⓟ 1. Dados los conjuntos A = {Múltiplos de 3} y B= {Múltiplos de 5} :
   a. Encuentre A ∩ B.
   b. Dibuje el diagrama de Venn para A ∩ B.
2. Dadas las proposiciones:
   p: x es múltiplo de 3.
   q: x es múltiplo de 5.
   Elabore la proposición compuesta $p \wedge q$.

Ⓢ 1. a. A ∩ B= {Múltiplos de 3} ∩ {Múltiplos de 5}
   = {Múltiplos de 15}

   b.



2. $p \wedge q$: x es múltiplo de 3 y x es múltiplo de 5.
   Para que $p \wedge q$ sea verdadera, ambas proposiciones deben ser verdaderas.
   Esto significa que x debe ser múltiplo de 3 y 5.
   Lo que implica que x es múltiplo de 15.

   Por tanto, el resultado de A ∩ B es igual al resultado de $p \wedge q$.

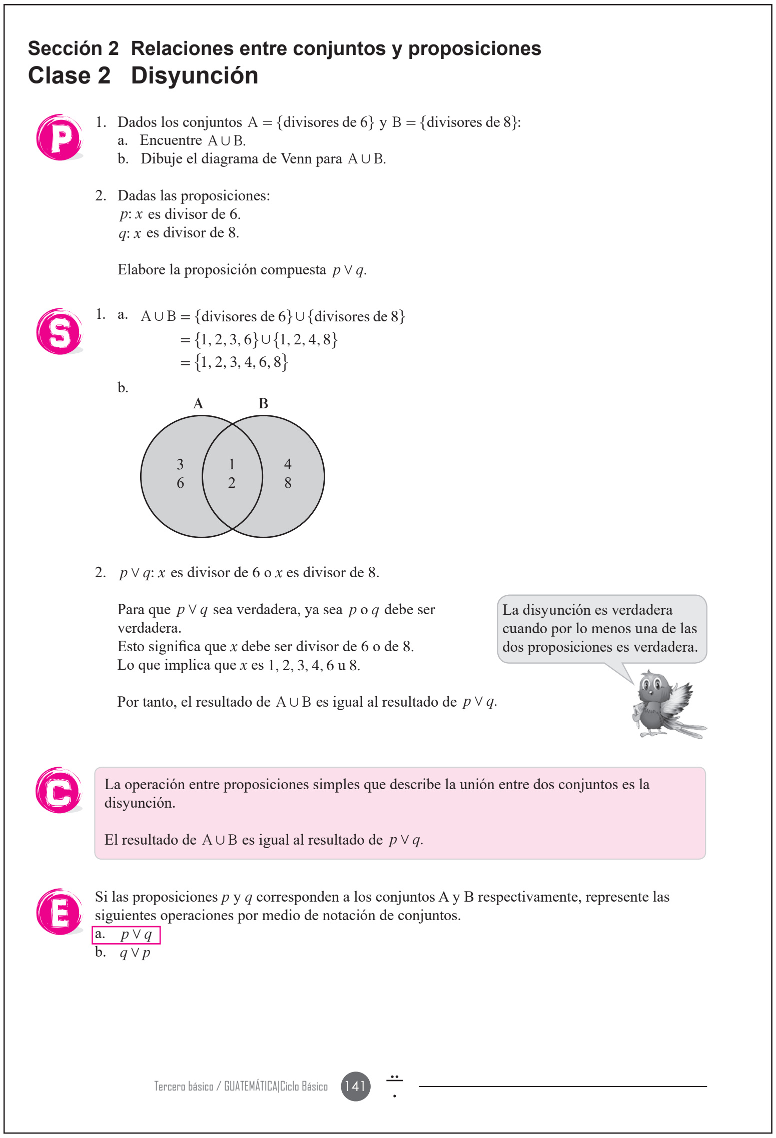
Ⓒ Existe una relación estrecha entre conjuntos y proposiciones. La operación entre proposiciones simples que describe la intersección entre dos conjuntos es la conjunción. El resultado entre A ∩ B es igual al resultado de $p \wedge q$.

Ⓔ Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente la operación por medio de notación de conjuntos.
a. $p \wedge q$

R: A ∩ B

Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 2 Disyunción

Aprendizaje esperado:
Identifica la relación entre la unión de conjuntos y la disyunción de proposiciones.



Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 2 Disyunción

Ⓟ 1. Dados los conjuntos A = {divisores de 6} y B = {divisores de 8}:
  a. Encuentre $A \cup B$.
  b. Dibuje el diagrama de Venn para $A \cup B$.

2. Dadas las proposiciones:
  p: x es divisor de 6.
  q: x es divisor de 8.

  Elabore la proposición compuesta $p \vee q$.

Ⓢ 1. a. $A \cup B = \{\text{divisores de } 6\} \cup \{\text{divisores de } 8\}$
$= \{1, 2, 3, 6\} \cup \{1, 2, 4, 8\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 6, 8\}$

b.

2. $p \vee q$: x es divisor de 6 o x es divisor de 8.

Para que $p \vee q$ sea verdadera, ya sea p o q debe ser verdadera.
Esto significa que x debe ser divisor de 6 o de 8.
Lo que implica que x es 1, 2, 3, 4, 6 u 8.

Por tanto, el resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.

La disyunción es verdadera cuando por lo menos una de las dos proposiciones es verdadera.

Ⓒ La operación entre proposiciones simples que describe la unión entre dos conjuntos es la disyunción.

El resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.

Ⓔ Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
a. $p \vee q$
b. $q \vee p$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 141

Solucionario de los ejercicios:

Considerando que la proposición p corresponde al conjunto A y la proposición q corresponde al conjunto B.

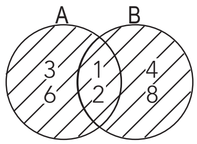
a. $A \cup B$
b. $B \cup A$

Fecha: dd – mm – aa
5-2-2 Disyunción

Ⓟ 1. Dados los conjuntos: A= {Divisores de 6} y B= {Divisores de 8}:
  a. Encuentre $A \cup B$
  b. Dibuje el diagrama de Venn para $A \cup B$.
2. Dadas las proposiciones:
  p: x es divisor de 6.
  q: x es divisor de 8.
  Elabore la proposición compuesta $p \vee q$.

Ⓢ 1. a. $A \cup B = \{\text{Divisores de } 6\} \cup \{\text{Divisores de } 8\}$
$= \{1,2,3,6\} \cup \{1,2,4,8\}$
$= \{1,2,3,4,6,8\}$

b.



2. $p \vee q$: x es divisor de 6 o x es divisor de 8.
Para que $p \vee q$ sea verdadera, p o q debe ser verdadera.
Esto significa que x debe ser divisor de 6 o de 8.
Lo que implica que x es 1, 2, 3, 4, 6 u 8.

Por tanto, el resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.

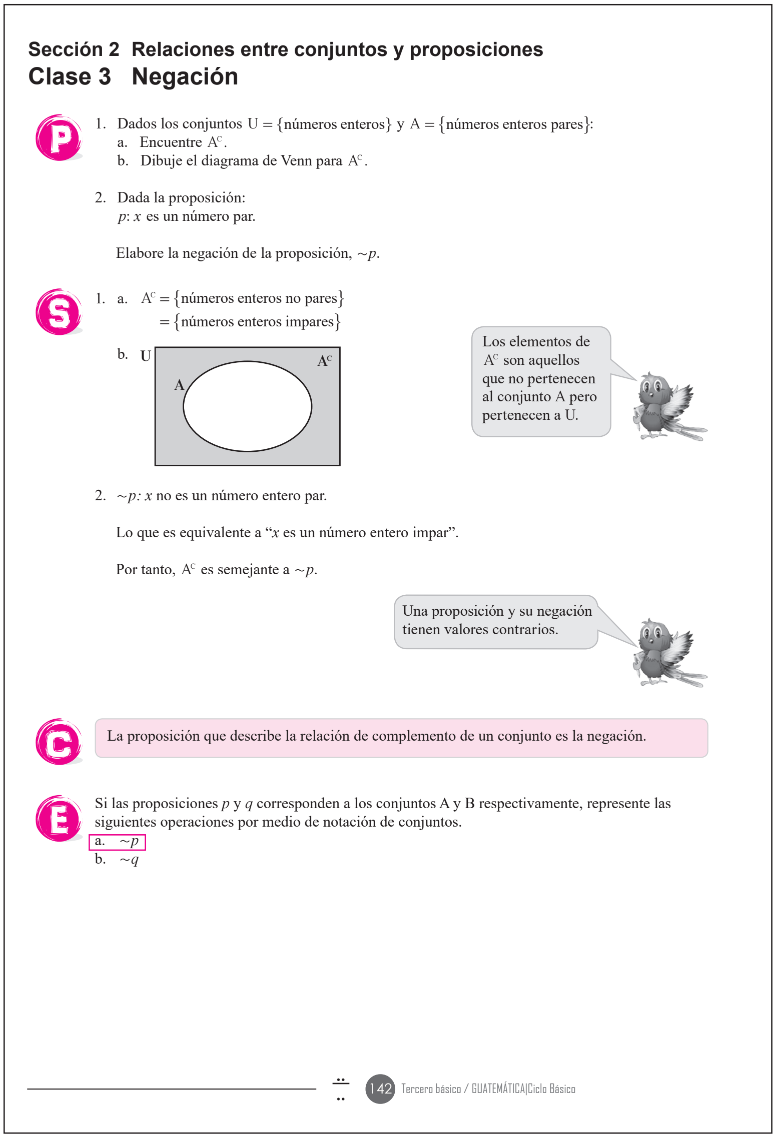
Ⓒ La operación entre proposiciones simples que describe la unión entre dos conjuntos es la disyunción.
El resultado de $A \cup B$ es igual al resultado de $p \vee q$.

Ⓔ Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente la operación por medio de notación de conjuntos.
a. $p \vee q$

R: $A \cup B$

Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 3 Negación

Aprendizaje esperado:
Identifica la relación entre el complemento de un conjunto y la negación de proposiciones.



Sección 2 Relaciones entre conjuntos y proposiciones
Clase 3 Negación

P
1. Dados los conjuntos U = {números enteros} y A = {números enteros pares}:
   a. Encuentre A^c.
   b. Dibuje el diagrama de Venn para A^c.
2. Dada la proposición:
   p: x es un número par.

   Elabore la negación de la proposición, $\sim p$.

S
1. a. $A^c = \{$números enteros no pares$\}$
   $= \{$números enteros impares$\}$
   b.

Los elementos de A^c son aquellos que no pertenecen al conjunto A pero pertenecen a U.

2. $\sim p$: x no es un número entero par.

   Lo que es equivalente a "x es un número entero impar".

   Por tanto, A^c es semejante a $\sim p$.

Una proposición y su negación tienen valores contrarios.

C La proposición que describe la relación de complemento de un conjunto es la negación.

E Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
a. $\sim p$
b. $\sim q$

142 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

Considerando que la proposición p corresponde al conjunto A y la proposición q corresponde al conjunto B.

a. A^c

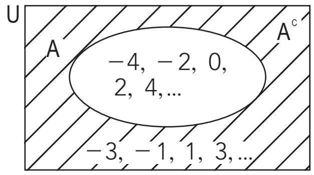
b. B^c

Fecha: dd – mm – aa
5-2-3 Negación

Ⓟ 1. Dados los conjuntos U= {números enteros} y A= {números enteros pares}:
a. Encuentre A^c.
b. Dibuje el diagrama de Venn para A^c.
2. Dada la proposición:
p: x es un número par.
Elabore la negación de la proposición, $\sim p$.

Ⓢ 1. a. $A^c = \{$números enteros no pares$\}$
$= \{$números enteros impares$\}$

b.



2. $\sim p$: x no es un número entero par.
Lo que es equivalente a "x es un número entero impar".

Por tanto, A^c es semejante a $\sim p$.

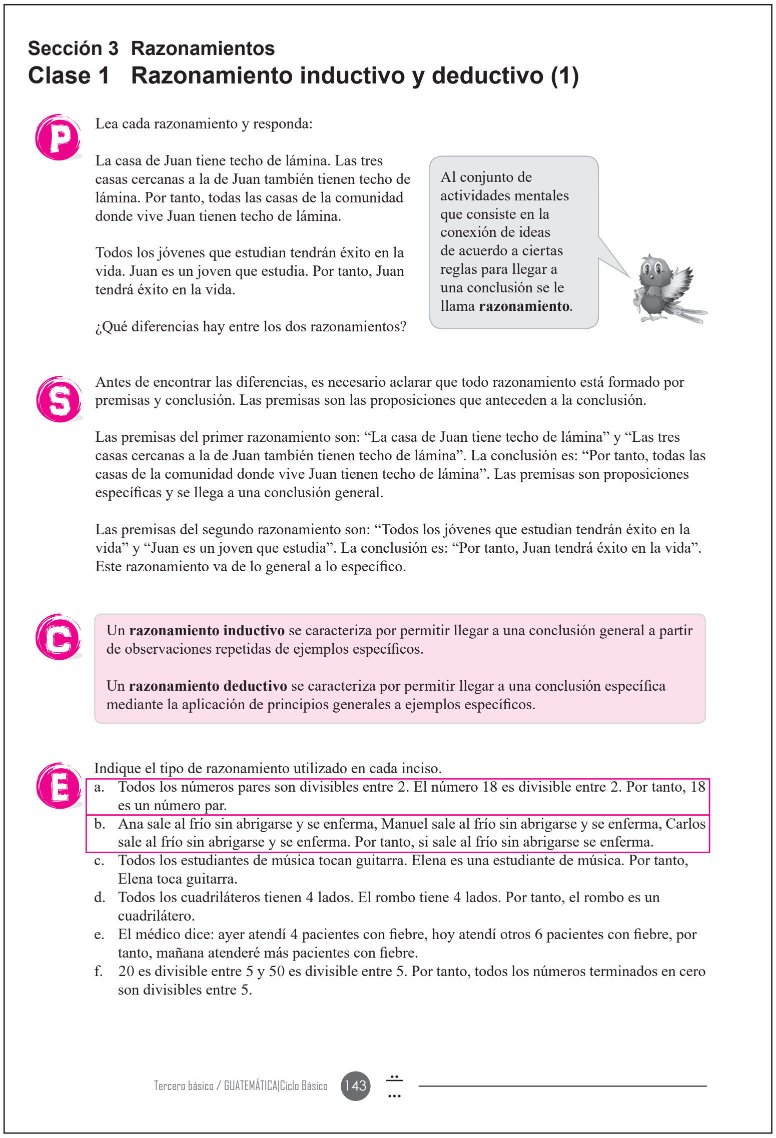
Ⓒ La proposición que describe la relación de complemento de un conjunto es la negación.

Ⓔ Si las proposiciones p y q corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente la operación por medio de notación de conjuntos.
a. $\sim p$

R: A^c

Sección 3 Razonamientos
Clase 1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)

Aprendizaje esperado:
Indica el tipo de razonamiento usado para obtener una conclusión.



Sección 3 Razonamientos
Clase 1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)

P Lea cada razonamiento y responda:

La casa de Juan tiene techo de lámina. Las tres casas cercanas a la de Juan también tienen techo de lámina. Por tanto, todas las casas de la comunidad donde vive Juan tienen techo de lámina.

Todos los jóvenes que estudian tendrán éxito en la vida. Juan es un joven que estudia. Por tanto, Juan tendrá éxito en la vida.

¿Qué diferencias hay entre los dos razonamientos?

Al conjunto de actividades mentales que consiste en la conexión de ideas de acuerdo a ciertas reglas para llegar a una conclusión se le llama **razonamiento**.

S Antes de encontrar las diferencias, es necesario aclarar que todo razonamiento está formado por premisas y conclusión. Las premisas son las proposiciones que anteceden a la conclusión.

Las premisas del primer razonamiento son: "La casa de Juan tiene techo de lámina" y "Las tres casas cercanas a la de Juan también tienen techo de lámina". La conclusión es: "Por tanto, todas las casas de la comunidad donde vive Juan tienen techo de lámina". Las premisas son proposiciones específicas y se llega a una conclusión general.

Las premisas del segundo razonamiento son: "Todos los jóvenes que estudian tendrán éxito en la vida" y "Juan es un joven que estudia". La conclusión es: "Por tanto, Juan tendrá éxito en la vida". Este razonamiento va de lo general a lo específico.

C Un **razonamiento inductivo** se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos.

Un **razonamiento deductivo** se caracteriza por permitir llegar a una conclusión específica mediante la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

E Indique el tipo de razonamiento utilizado en cada inciso.

a. Todos los números pares son divisibles entre 2. El número 18 es divisible entre 2. Por tanto, 18 es un número par.
b. Ana sale al frío sin abrigarse y se enferma, Manuel sale al frío sin abrigarse y se enferma, Carlos sale al frío sin abrigarse y se enferma. Por tanto, si sale al frío sin abrigarse se enferma.
c. Todos los estudiantes de música tocan guitarra. Elena es una estudiante de música. Por tanto, Elena toca guitarra.
d. Todos los cuadriláteros tienen 4 lados. El rombo tiene 4 lados. Por tanto, el rombo es un cuadrilátero.
e. El médico dice: ayer atendí 4 pacientes con fiebre, hoy atendí otros 6 pacientes con fiebre, por tanto, mañana atenderé más pacientes con fiebre.
f. 20 es divisible entre 5 y 50 es divisible entre 5. Por tanto, todos los números terminados en cero son divisibles entre 5.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 143

Solucionario de los ejercicios:

a. Razonamiento deductivo
b. Razonamiento inductivo
c. Razonamiento deductivo
d. Razonamiento deductivo
e. Razonamiento inductivo
f. Razonamiento inductivo

Fecha: dd – mm – aa
5-3-1 Razonamiento inductivo y deductivo (1)

Ⓟ ¿Qué diferencia hay entre los dos razonamientos?
Premisas: "La casa de Juan tiene techo de lámina" y "Las tres casas cercanas a la de Juan también tienen techo de lámina".
Conclusión: Por tanto, todas las casas de la comunidad donde vive Juan tienen techo de lámina.

Premisas: "Todos los jóvenes que estudian tendrán éxito en la vida" y "Juan es un joven que estudia".
Conclusión: Por tanto, Juan tendrá éxito en la vida.

Ⓢ Primer razonamiento:
Específico ⟶ General

Segundo razonamiento:
General ⟶ Específico

Ⓒ El razonamiento inductivo se caracteriza por permitir llegar a una conclusión general a partir de observaciones repetidas de ejemplos específicos.

El razonamiento deductivo se caracteriza por permitir llegar a una conclusión específica mediante la aplicación de principios generales a ejemplos específicos.

Ⓔ Indique el tipo de razonamiento utilizado.

a. Todos los números pares son divisibles entre 2. El número 18 es divisible entre 2. Por tanto, 18 es un número par.

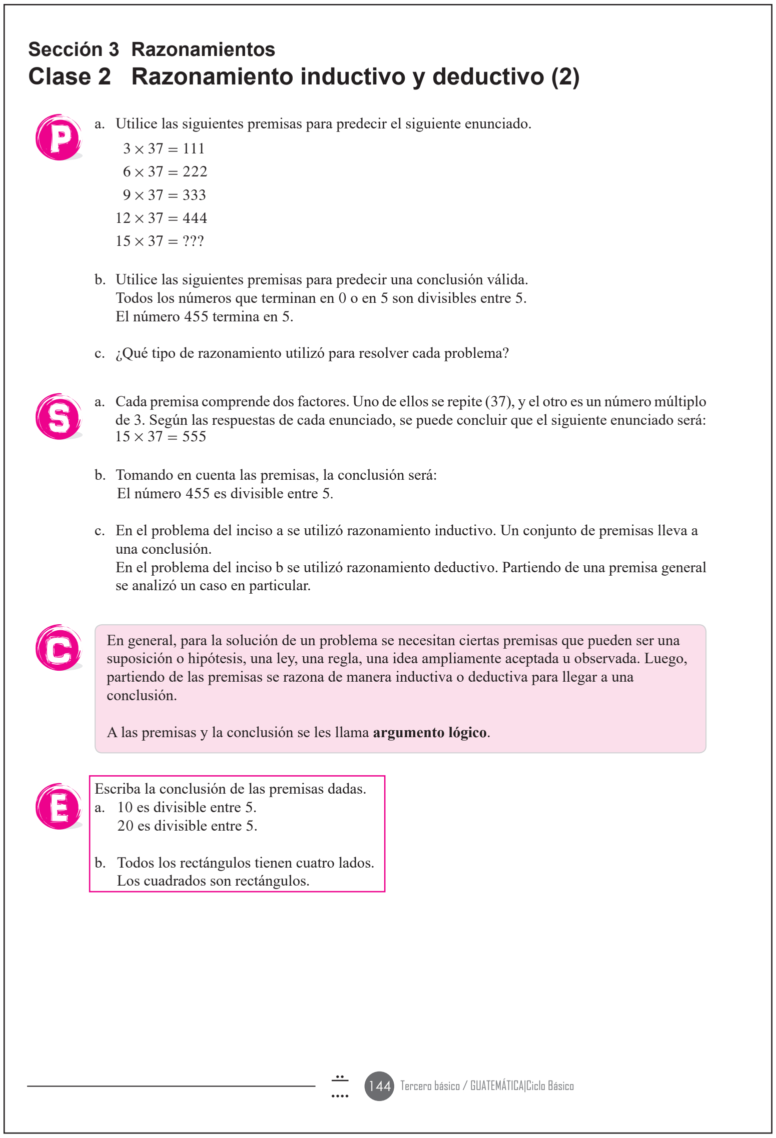
R: Razonamiento deductivo

b. Ana sale al frío sin abrigarse y se enferma. Manuel sale al frío sin abrigarse y se enferma, Carlos sale al frío sin abrigarse y se enferma. Por tanto, si sale al frío sin abrigarse se enferma.

R: Razonamiento inductivo

Sección 3 Razonamientos
Clase 2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)

Aprendizaje esperado:
Obtiene conclusiones de premisas usando el método inductivo y deductivo.



Sección 3 Razonamientos
Clase 2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)

P

a. Utilice las siguientes premisas para predecir el siguiente enunciado.

$3 \times 37 = 111$
$6 \times 37 = 222$
$9 \times 37 = 333$
$12 \times 37 = 444$
$15 \times 37 = ???$

b. Utilice las siguientes premisas para predecir una conclusión válida.
Todos los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.
El número 455 termina en 5.

c. ¿Qué tipo de razonamiento utilizó para resolver cada problema?

S

a. Cada premisa comprende dos factores. Uno de ellos se repite (37), y el otro es un número múltiplo de 3. Según las respuestas de cada enunciado, se puede concluir que el siguiente enunciado será: $15 \times 37 = 555$

b. Tomando en cuenta las premisas, la conclusión será:
El número 455 es divisible entre 5.

c. En el problema del inciso a se utilizó razonamiento inductivo. Un conjunto de premisas lleva a una conclusión.
En el problema del inciso b se utilizó razonamiento deductivo. Partiendo de una premisa general se analizó un caso en particular.

C

En general, para la solución de un problema se necesitan ciertas premisas que pueden ser una suposición o hipótesis, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada u observada. Luego, partiendo de las premisas se razona de manera inductiva o deductiva para llegar a una conclusión.

A las premisas y la conclusión se les llama **argumento lógico**.

E

Escriba la conclusión de las premisas dadas.
a. 10 es divisible entre 5.
20 es divisible entre 5.

b. Todos los rectángulos tienen cuatro lados.
Los cuadrados son rectángulos.

144 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.
b. Los cuadrados tienen cuatro lados.

Fecha: dd – mm – aa
5-3-2 Razonamiento inductivo y deductivo (2)

Ⓟ a. Utilice las siguientes premisas para predecir el siguiente enunciado.

$3 \times 37 = 111$
$6 \times 37 = 222$
$9 \times 37 = 333$
$12 \times 37 = 444$
$15 \times 37 = ???$

b. Utilice las siguientes premisas para predecir una conclusión válida.
Todos los números que terminan en 0 o en 5 son divisibles entre 5.
El número 455 termina en 5.

c. ¿Qué tipo de razonamiento utilizó para resolver cada problema?

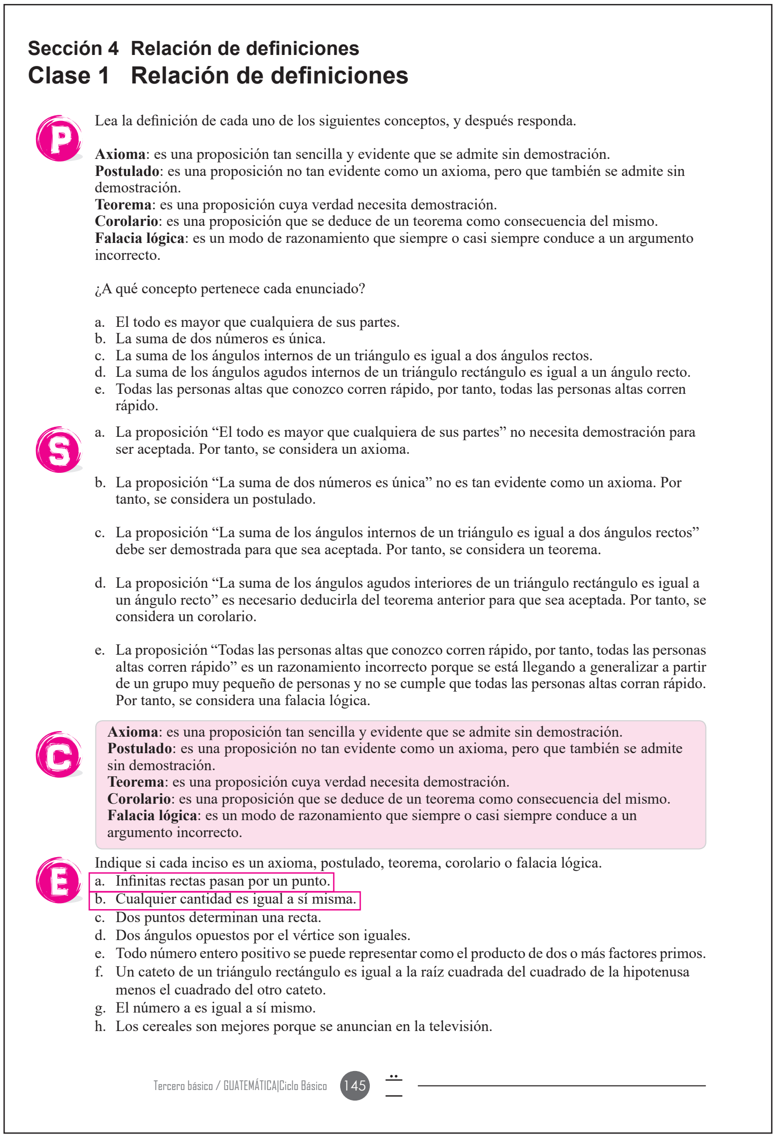
Ⓢ a. El factor 37 se repite y el otro factor es múltiplo de 3. El siguiente enunciado será: $15 \times 37=555$
b. El número 455 es divisible entre 5.
c. Inciso a: Razonamiento inductivo
Inciso b: Razonamiento deductivo

Ⓒ En general, para la solución de un problema se necesitan ciertas premisas que pueden ser una suposición o hipótesis, una ley, una regla, una idea ampliamente aceptada u observada. Luego, partiendo de las premisas se razona de manera inductiva o deductiva para llegar a una conclusión.
A las premisas y la conclusión se les llama argumento lógico.

Ⓔ Escriba la conclusión de las premisas dadas.
a. 10 es divisible entre 5.
20 es divisible entre 5.
R: Todos los números que terminan en cero son divisibles entre 5.
b. Todos los rectángulos tienen cuatro lados.
Los cuadrados son rectángulos.
R: Los cuadrados tienen cuatro lados.

Sección 4 Relación de definiciones
Clase 1 Relación de definiciones

Aprendizaje esperado:
Identifica si una proposición es axioma, postulado, teorema, corolario o falacia lógica.



Sección 4 Relación de definiciones
Clase 1 Relación de definiciones

P Lea la definición de cada uno de los siguientes conceptos, y después responda.

Axioma: es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.
Postulado: es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.
Teorema: es una proposición cuya verdad necesita demostración.
Corolario: es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
Falacia lógica: es un modo de razonamiento que siempre o casi siempre conduce a un argumento incorrecto.

¿A qué concepto pertenece cada enunciado?

a. El todo es mayor que cualquiera de sus partes.
b. La suma de dos números es única.
c. La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.
d. La suma de los ángulos agudos internos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto.
e. Todas las personas altas que conozco corren rápido, por tanto, todas las personas altas corren rápido.

S
a. La proposición “El todo es mayor que cualquiera de sus partes” no necesita demostración para ser aceptada. Por tanto, se considera un axioma.

b. La proposición “La suma de dos números es única” no es tan evidente como un axioma. Por tanto, se considera un postulado.

c. La proposición “La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos” debe ser demostrada para que sea aceptada. Por tanto, se considera un teorema.

d. La proposición “La suma de los ángulos agudos interiores de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto” es necesario deducirla del teorema anterior para que sea aceptada. Por tanto, se considera un corolario.

e. La proposición “Todas las personas altas que conozco corren rápido, por tanto, todas las personas altas corren rápido” es un razonamiento incorrecto porque se está llegando a generalizar a partir de un grupo muy pequeño de personas y no se cumple que todas las personas altas corran rápido. Por tanto, se considera una falacia lógica.

C
Axioma: es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.
Postulado: es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.
Teorema: es una proposición cuya verdad necesita demostración.
Corolario: es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
Falacia lógica: es un modo de razonamiento que siempre o casi siempre conduce a un argumento incorrecto.

E Indique si cada inciso es un axioma, postulado, teorema, corolario o falacia lógica.
a. Infinitas rectas pasan por un punto.
b. Cualquier cantidad es igual a sí misma.
c. Dos puntos determinan una recta.
d. Dos ángulos opuestos por el vértice son iguales.
e. Todo número entero positivo se puede representar como el producto de dos o más factores primos.
f. Un cateto de un triángulo rectángulo es igual a la raíz cuadrada del cuadrado de la hipotenusa menos el cuadrado del otro cateto.
g. El número a es igual a sí mismo.
h. Los cereales son mejores porque se anuncian en la televisión.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 145

Solucionario de los ejercicios:

a. Postulado
b. Axioma
c. Teorema
d. Teorema
e. Teorema
f. Corolario
g. Axioma
h. Falacia lógica

Fecha: dd – mm – aa
5-4-1 Relación de definiciones

Ⓟ ¿A qué concepto pertenece cada enunciado?

Axioma: es una proposición tan sencilla y evidente que se admite sin demostración.
Postulado: es una proposición no tan evidente como un axioma, pero que también se admite sin demostración.
Teorema: es una proposición cuya verdad necesita demostración.
Corolario: es una proposición que se deduce de un teorema como consecuencia del mismo.
Falacia lógica: es un modo de razonamiento que siempre o casi siempre conduce a un argumento incorrecto.

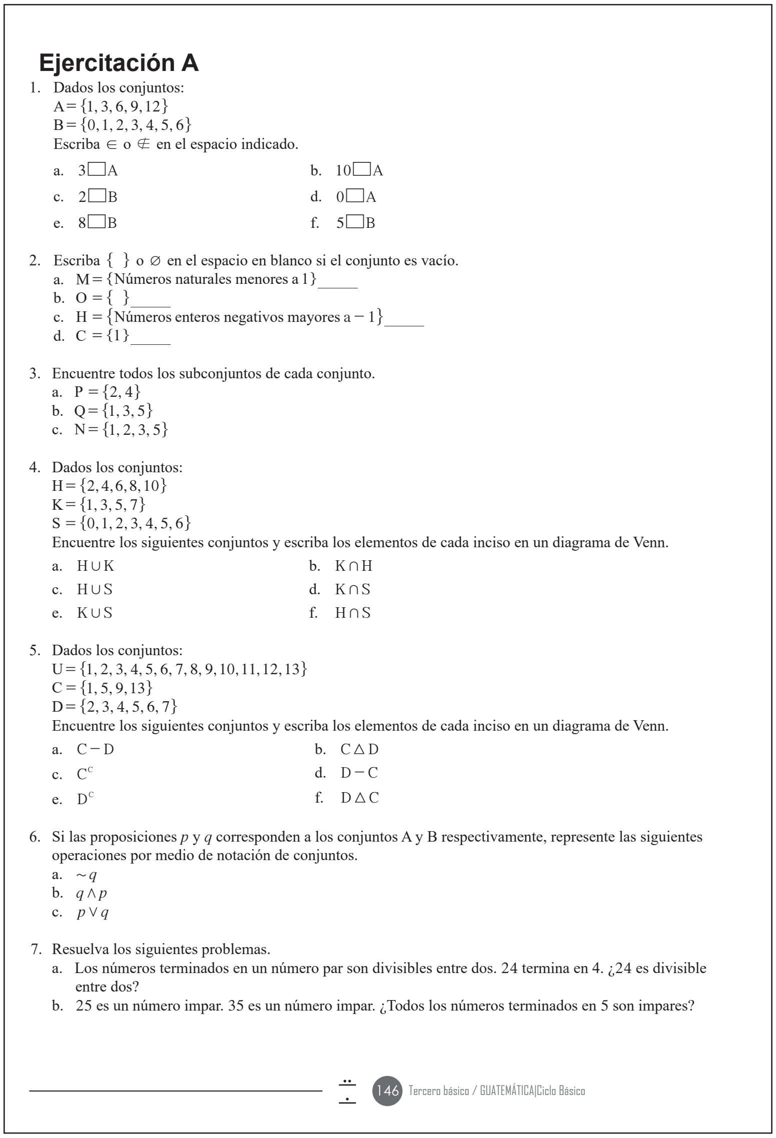
Ⓢ

	Enunciado	Concepto
a.	El todo es mayor que cualquiera de sus partes.	Axioma
b.	La suma de dos números es única.	Postulado
c.	La suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a dos ángulos rectos.	Teorema
d.	La suma de los ángulos agudos internos de un triángulo rectángulo es igual a un ángulo recto.	Corolario
e.	Todas las personas altas que conozco corren rápido, por tanto, todas las personas altas corren rápido.	Falacia lógica

Ⓔ Indique si cada inciso es un axioma, postulado, teorema, corolario o falacia lógica

	Enunciado	Concepto
a.	Infinitas rectas pasan por un punto.	Postulado
b.	Cualquier cantidad es igual a sí misma.	Axioma

Ejercitación A



Ejercitación A

1. Dados los conjuntos:
   A = {1, 3, 6, 9, 12}
   B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
   Escriba ∈ o ∉ en el espacio indicado.
   a. 3☐A b. 10☐A
   c. 2☐B d. 0☐A
   e. 8☐B f. 5☐B

2. Escriba { } o ∅ en el espacio en blanco si el conjunto es vacío.
   a. M = {Números naturales menores a 1}_____
   b. O = { }_____
   c. H = {Números enteros negativos mayores a − 1}_____
   d. C = {1}_____

3. Encuentre todos los subconjuntos de cada conjunto.
   a. P = {2, 4}
   b. Q = {1, 3, 5}
   c. N = {1, 2, 3, 5}

4. Dados los conjuntos:
   H = {2, 4, 6, 8, 10}
   K = {1, 3, 5, 7}
   S = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6}
   Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
   a. $H \cup K$ b. $K \cap H$
   c. $H \cup S$ d. $K \cap S$
   e. $K \cup S$ f. $H \cap S$

5. Dados los conjuntos:
   U = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}
   C = {1, 5, 9, 13}
   D = {2, 3, 4, 5, 6, 7}
   Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
   a. $C - D$ b. $C \triangle D$
   c. C^C d. $D - C$
   e. D^C f. $D \triangle C$

6. Si las proposiciones *p* y *q* corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
   a. $\sim q$
   b. $q \wedge p$
   c. $p \vee q$

7. Resuelva los siguientes problemas.
   a. Los números terminados en un número par son divisibles entre dos. 24 termina en 4. ¿24 es divisible entre dos?
   b. 25 es un número impar. 35 es un número impar. ¿Todos los números terminados en 5 son impares?

Solucionario:

1. a. $3\boxed{\in}A$ b. $10\boxed{\notin}A$ c. $2\boxed{\in}B$
   d. $0\boxed{\notin}A$ e. $8\boxed{\notin}B$ f. $5\boxed{\in}B$
2. a. M no es conjunto vacío.
   b. O es conjunto vacío. O = Ø
   c. H es conjunto vacío. H = Ø
   d. C no es conjunto vacío.
3. a.

El conjunto vacío	Ø
Todos los conjuntos con un elemento	{2}, {4}
El conjunto mismo	{2, 4}

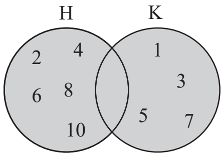
   b.

El conjunto vacío	Ø
Todos los conjuntos con un elemento	{1}, {3}, {5}
Todos los conjuntos con dos elementos	{1, 3}, {1, 5}, {3, 5}
El conjunto mismo	{1, 3, 5}

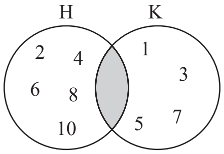
   c.

El conjunto vacío	Ø
Todos los conjuntos con un elemento	{1}, {2}, {3} {5}
Todos los conjuntos con dos elementos	{1, 2}, {1, 3}, {1, 5} {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}
Todos los conjuntos con tres elementos	{1, 2, 3}, {1, 2, 5} {1, 3, 5}, {2, 3, 5}
El conjunto mismo	{1, 2, 3, 5}

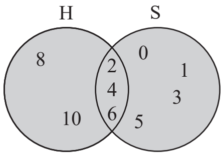
4. a. $H \cup K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$



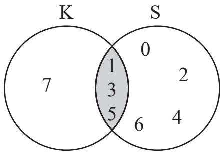
   b. $K \cap H = \{\ \}$



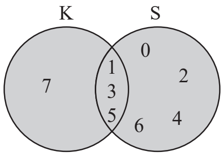
   c. $H \cup S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$



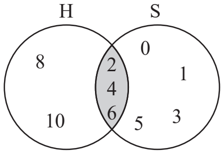
   d. $K \cap S = \{1, 3, 5\}$



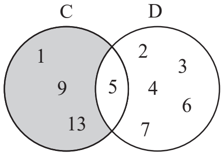
   e. $K \cup S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$



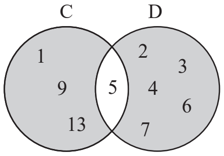
f. $H \cap S = \{2, 4, 6\}$



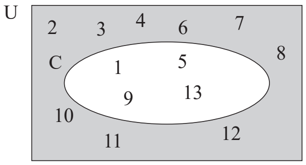
5. a. $C - D = \{1, 9, 13\}$



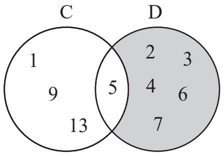
b. $C \triangle D = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13\}$



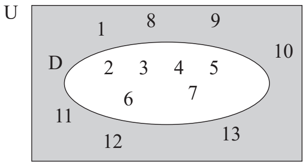
c. $C^C = \{2, 3, 4, 6, 7, 8, 10, 11, 12\}$



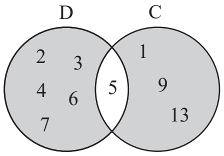
d. $D - C = \{2, 3, 4, 6, 7\}$



e. $D^C = \{1, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$

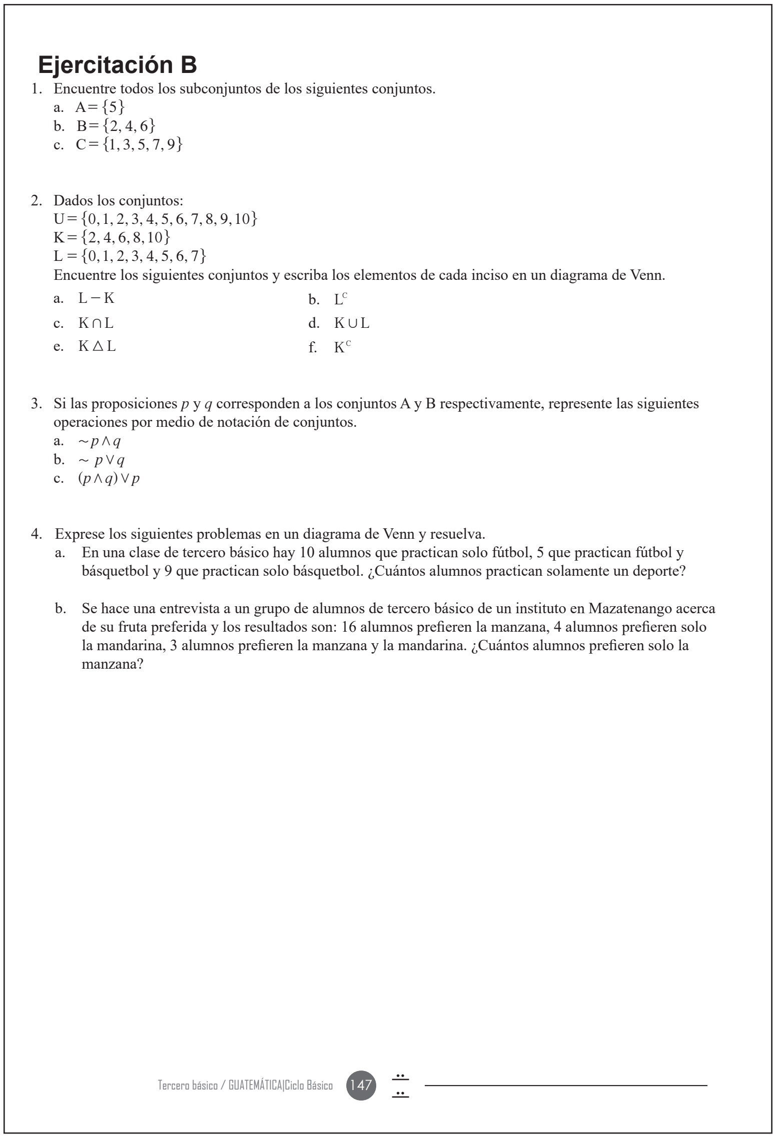


f. $D \triangle C = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 13\}$



6. a. B^C
   b. $B \cap A$
   c. $A \cup B$
7. a. Sí, porque 24 está terminado en un número par.
   b. Sí, porque 25 y 35 están terminados en 5.

Ejercitación B



Ejercitación B

1. Encuentre todos los subconjuntos de los siguientes conjuntos.
   a. $A = \{5\}$
   b. $B = \{2, 4, 6\}$
   c. $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. Dados los conjuntos:
   $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
   $K = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
   $L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
   Encuentre los siguientes conjuntos y escriba los elementos de cada inciso en un diagrama de Venn.
   a. $L - K$ b. L^c
   c. $K \cap L$ d. $K \cup L$
   e. $K \triangle L$ f. K^c

3. Si las proposiciones *p* y *q* corresponden a los conjuntos A y B respectivamente, represente las siguientes operaciones por medio de notación de conjuntos.
   a. $\sim p \wedge q$
   b. $\sim p \vee q$
   c. $(p \wedge q) \vee p$

4. Exprese los siguientes problemas en un diagrama de Venn y resuelva.
   a. En una clase de tercero básico hay 10 alumnos que practican solo fútbol, 5 que practican fútbol y básquetbol y 9 que practican solo básquetbol. ¿Cuántos alumnos practican solamente un deporte?

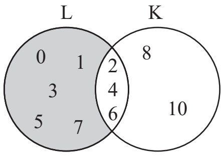
   b. Se hace una entrevista a un grupo de alumnos de tercero básico de un instituto en Mazatenango acerca de su fruta preferida y los resultados son: 16 alumnos prefieren la manzana, 4 alumnos prefieren solo la mandarina, 3 alumnos prefieren la manzana y la mandarina. ¿Cuántos alumnos prefieren solo la manzana?

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 147

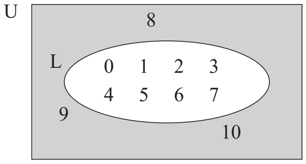
Solucionario:

1.	a.	El conjunto vacío	Ø
		El conjunto mismo	$\{5\}$
	b.	El conjunto vacío	Ø
		Todos los conjuntos con un elemento	$\{2\}, \{4\}, \{6\}$
		Todos los conjuntos con dos elementos	$\{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}$
		El conjunto mismo	$\{2, 4, 6\}$
	c.	El conjunto vacío	Ø
		Todos los conjuntos con un elemento	$\{1\}, \{3\}, \{5\}, \{7\}, \{9\}$
		Todos los conjuntos con dos elementos	$\{1, 3\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{1, 9\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{3, 9\}, \{5, 7\}, \{5, 9\}, \{7, 9\}$
		Todos los conjuntos con tres elementos	$\{1, 3, 5\}, \{1, 3, 7\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 5, 7\}, \{1, 5, 9\}, \{1, 7, 9\}, \{3, 5, 7\}, \{3, 5, 9\}, \{3, 7, 9\}, \{5, 7, 9\}$
		Todos los conjuntos con cuatro elementos	$\{1, 3, 5, 7\}, \{1, 3, 5, 9\}, \{1, 3, 7, 9\}, \{1, 5, 7, 9\}, \{3, 5, 7, 9\}$
		El conjunto mismo	$\{1, 3, 5, 7, 9\}$

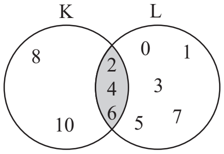
2. a. $L - K = \{0, 1, 3, 5, 7\}$



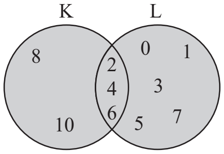
b. $L^c = \{8, 9, 10\}$



c. $K \cap L = \{2, 4, 6\}$

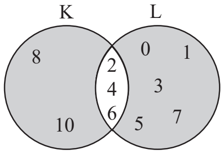


d. $K \cup L = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10\}$

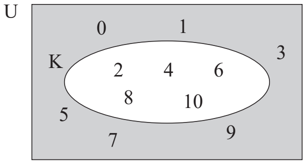


Unidad 5
Lógica

e. $K \triangle L = \{0, 1, 3, 5, 7, 8, 10\}$

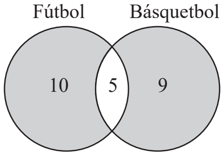


f. $K^c = \{0, 1, 3, 5, 7, 9\}$



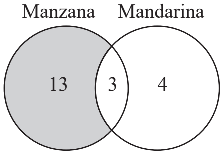
3. a. $A^c \cap B$
   b. $A^c \cup B$
   c. $(A \cap B) \cup A$

4. a.

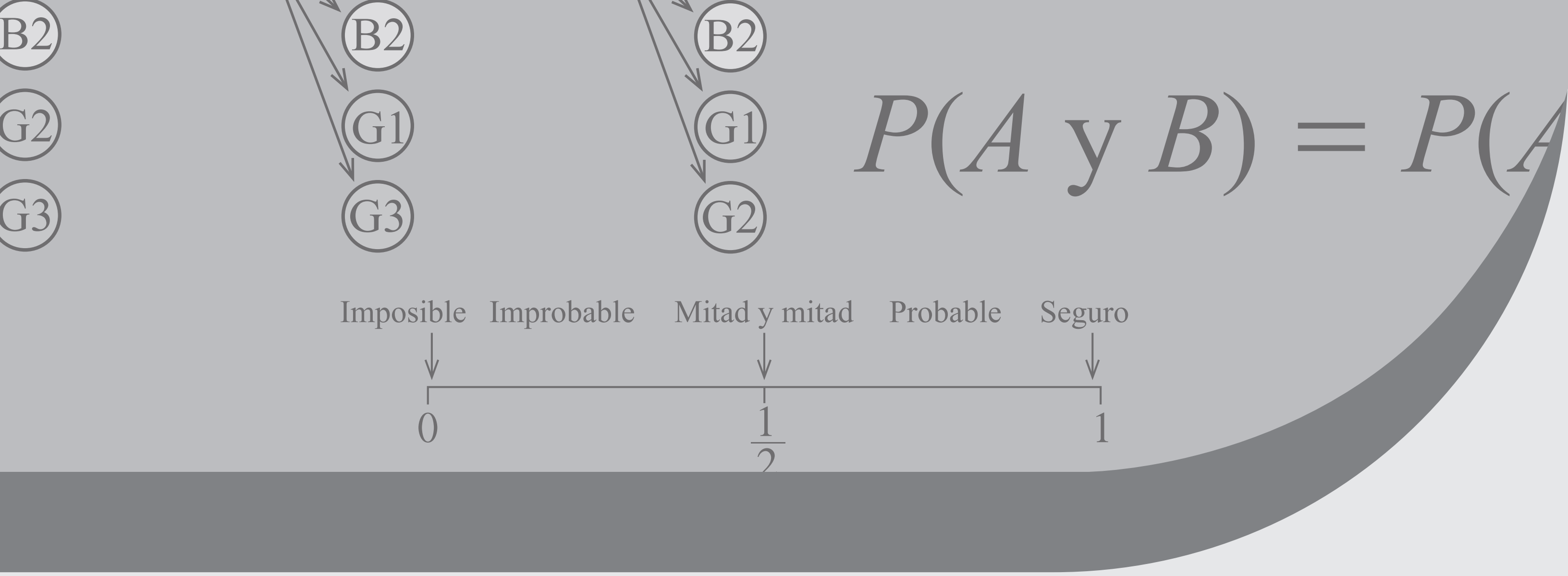


R: 19 alumnos practican solo un deporte.
(*Explicación*)
En el diagrama de Venn se representa el número de alumnos que practican los dos deportes.
Entonces, el número de alumnos que practican solo un deporte es: $10 + 9 = 19$.

b.



R: 13 alumnos prefieren solo la manzana.
(*Explicación*)
Dentro de los 16 alumnos que prefieren la manzana hay 3 alumnos que prefieren la manzana y la mandarina.
Entonces, el número de alumnos que prefieren solo la manzana es: $16 - 3 = 13$.
En el diagrama de Venn se representa el número de alumnos que prefieren las dos frutas.
Por tanto, el número de alumnos que prefieren solo la manzana es: 13.



Unidad 6

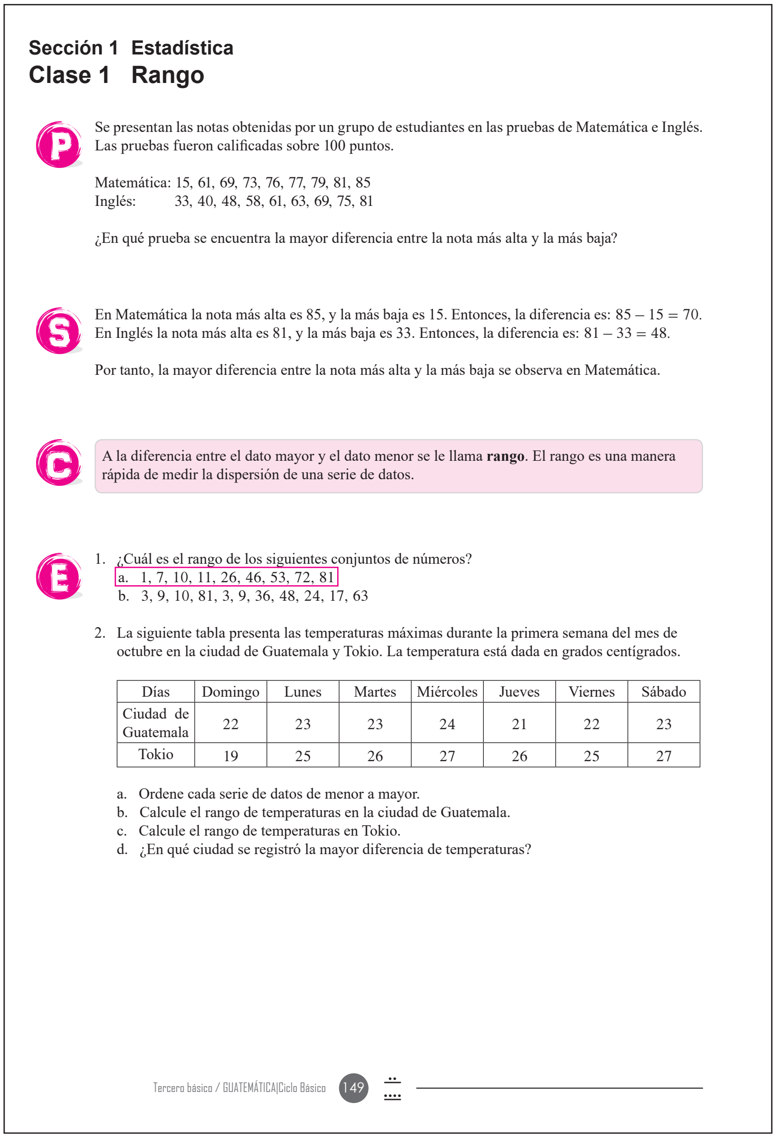
Estadística

Plan de estudio - Unidad 6 Estadística -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
4. Resuelve problemas aplicando medidas de dispersión y probabilidad.	4.1 Identifica las medidas de dispersión en un conjunto de datos.	1. Estadística	1.1 Rango	Encuentra el rango para un conjunto de datos.
			1.2 Rango intercuartil	Encuentra el rango intercuartil para un conjunto de datos.
	4.2 Aplica la probabilidad de ocurrencia de eventos.	2. Probabilidades	2.1 Diagrama de árbol	Encuentra el conjunto de posibles resultados de un evento usando el diagrama de árbol. Dibuja un diagrama de árbol.
			2.2 Permutación	Encuentra el número total de permutaciones.
			2.3 Combinación	Encuentra el número total de combinaciones.
			2.4 Probabilidad	Calcula la probabilidad de un evento.
			2.5 Propiedades de probabilidad	Calcula la probabilidad de un evento al conocer las propiedades de la probabilidad.
			2.6 Ley de la suma	Calcula la probabilidad de dos eventos usando la ley de la suma.
			2.7 Eventos independientes	Calcula la probabilidad de eventos independientes.
			2.8 Probabilidad condicional	Calcula la probabilidad condicional.
			2.9 Ley del producto	Calcula la probabilidad que sucedan dos eventos usando la ley del producto.

Sección 1 Estadística
Clase 1 Rango

Aprendizaje esperado:
Encuentra el rango para un conjunto de datos.



Sección 1 Estadística
Clase 1 Rango

P Se presentan las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en las pruebas de Matemática e Inglés. Las pruebas fueron calificadas sobre 100 puntos.

Matemática: 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85
Inglés: 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81

¿En qué prueba se encuentra la mayor diferencia entre la nota más alta y la más baja?

S En Matemática la nota más alta es 85, y la más baja es 15. Entonces, la diferencia es: 85 – 15 = 70. En Inglés la nota más alta es 81, y la más baja es 33. Entonces, la diferencia es: 81 – 33 = 48.

Por tanto, la mayor diferencia entre la nota más alta y la más baja se observa en Matemática.

C A la diferencia entre el dato mayor y el dato menor se le llama **rango**. El rango es una manera rápida de medir la dispersión de una serie de datos.

E
1. ¿Cuál es el rango de los siguientes conjuntos de números?
   a. 1, 7, 10, 11, 26, 46, 53, 72, 81
   b. 3, 9, 10, 81, 3, 9, 36, 48, 24, 17, 63
2. La siguiente tabla presenta las temperaturas máximas durante la primera semana del mes de octubre en la ciudad de Guatemala y Tokio. La temperatura está dada en grados centígrados.

Días	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ciudad de Guatemala	22	23	23	24	21	22	23
Tokio	19	25	26	27	26	25	27

   a. Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
   b. Calcule el rango de temperaturas en la ciudad de Guatemala.
   c. Calcule el rango de temperaturas en Tokio.
   d. ¿En qué ciudad se registró la mayor diferencia de temperaturas?

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 149

Solucionario de los ejercicios:

1. a. 81 – 1 = 80
   R: El rango es 80.
   b. 81 – 3 = 78
   R: El rango es 78.
2. a. Ciudad de Guatemala: 21, 22, 22, 23, 23, 23, 24
   Tokio: 19, 25, 25, 26, 26, 27, 27
   b. 24 – 21 = 3
   R: El rango de temperaturas en la ciudad de Guatemala es 3ºC.
   c. 27 – 19 = 8
   R: El rango de temperaturas en Tokio es 8ºC.
   d. Tokio

Fecha: dd – mm – aa
6-1-1 Rango

Ⓟ Se presentan las notas en las pruebas de Matemática e Inglés, calificadas sobre 100 puntos. ¿En qué prueba se encuentra la mayor diferencia entre la más alta y la más baja?

Ⓢ Matemática: 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85
Inglés: 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81

Matemática: 85 – 15 = 70
Inglés: 81 – 33 = 48
La mayor diferencia se observa en Matemática.

Ⓒ A la diferencia entre el dato mayor y el dato menor se le llama rango.

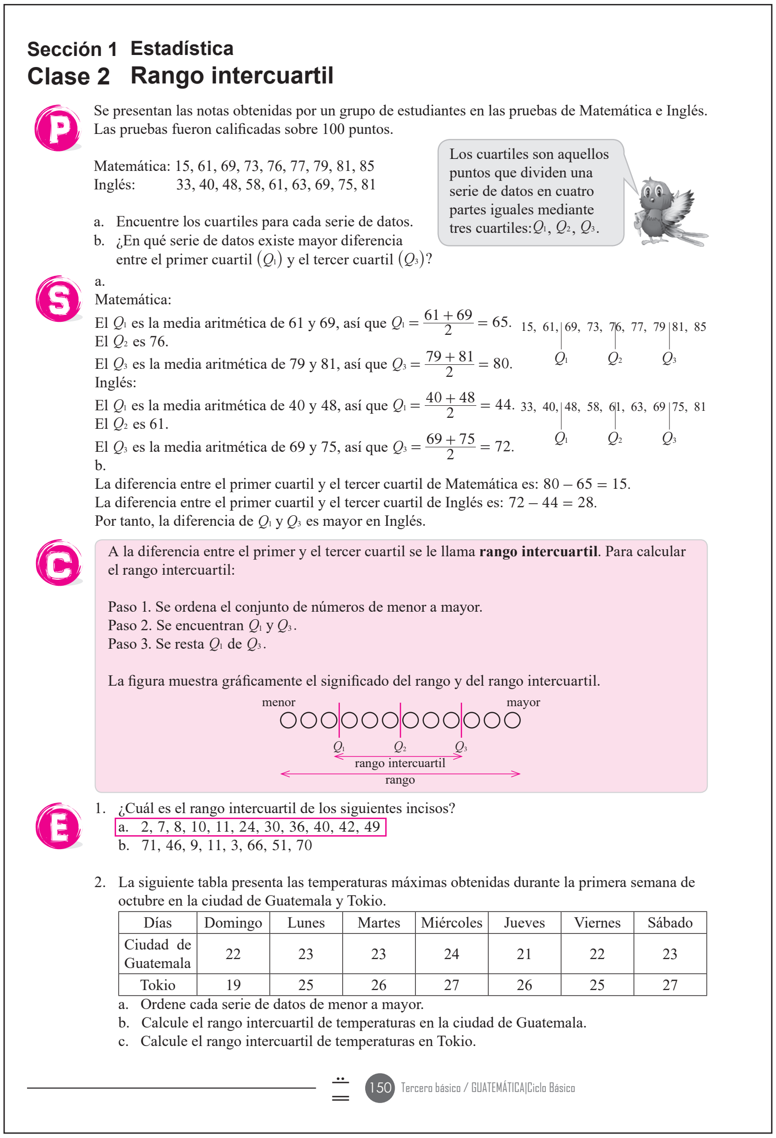
Ⓔ 1. ¿Cuál es el rango de los siguientes conjuntos de números?

a. 1, 7, 10, 11, 26, 46, 53, 72, 81
81 – 1 = 80

R: El rango es 80.

Sección 1 Estadística
Clase 2 Rango intercuartil

Aprendizaje esperado:
Encuentra el rango intercuartil para un conjunto de datos.



Sección 1 Estadística
Clase 2 Rango intercuartil

P Se presentan las notas obtenidas por un grupo de estudiantes en las pruebas de Matemática e Inglés. Las pruebas fueron calificadas sobre 100 puntos.

Matemática: 15, 61, 69, 73, 76, 77, 79, 81, 85
Inglés: 33, 40, 48, 58, 61, 63, 69, 75, 81

a. Encuentre los cuartiles para cada serie de datos.
b. ¿En qué serie de datos existe mayor diferencia entre el primer cuartil (Q_1) y el tercer cuartil (Q_3)?

Los cuartiles son aquellos puntos que dividen una serie de datos en cuatro partes iguales mediante tres cuartiles: Q_1, Q_2, Q_3.

S a.
Matemática:
El Q_1 es la media aritmética de 61 y 69, así que $Q_1 = \frac{61+69}{2} = 65$.
El Q_2 es 76.
El Q_3 es la media aritmética de 79 y 81, así que $Q_3 = \frac{79+81}{2} = 80$.

15, 61, | 69, 73, 7|6, 77, 79 | 81, 85
Q_1 Q_2 Q_3

Inglés:
El Q_1 es la media aritmética de 40 y 48, así que $Q_1 = \frac{40+48}{2} = 44$.
El Q_2 es 61.
El Q_3 es la media aritmética de 69 y 75, así que $Q_3 = \frac{69+75}{2} = 72$.

33, 40, | 48, 58, 6|1, 63, 69 | 75, 81
Q_1 Q_2 Q_3

b.
La diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil de Matemática es: 80 – 65 = 15.
La diferencia entre el primer cuartil y el tercer cuartil de Inglés es: 72 – 44 = 28.
Por tanto, la diferencia de Q_1 y Q_3 es mayor en Inglés.

C A la diferencia entre el primer y el tercer cuartil se le llama **rango intercuartil**. Para calcular el rango intercuartil:

Paso 1. Se ordena el conjunto de números de menor a mayor.
Paso 2. Se encuentran Q_1 y Q_3.
Paso 3. Se resta Q_1 de Q_3.

La figura muestra gráficamente el significado del rango y del rango intercuartil.

E 1. ¿Cuál es el rango intercuartil de los siguientes incisos?
   a. 2, 7, 8, 10, 11, 24, 30, 36, 40, 42, 49
   b. 71, 46, 9, 11, 3, 66, 51, 70

2. La siguiente tabla presenta las temperaturas máximas obtenidas durante la primera semana de octubre en la ciudad de Guatemala y Tokio.

Días	Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
Ciudad de Guatemala	22	23	23	24	21	22	23
Tokio	19	25	26	27	26	25	27

   a. Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
   b. Calcule el rango intercuartil de temperaturas en la ciudad de Guatemala.
   c. Calcule el rango intercuartil de temperaturas en Tokio.

150 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. 2 7 8 10 11 24 30 36 40 42 49
   Q_1 Q_2 Q_3

   $Q_1 = 8$
   $Q_2 = 24$
   $Q_3 = 40$
   $Q_3 - Q_1 = 40 - 8 = 32$
   R: El rango intercuartil es 32.

   b. 3 9 | 11 46 | 51 66 | 70 71
   Q_1 Q_2 Q_3

   $Q_1 = \frac{9+11}{2} = 10$
   $Q_2 = \frac{46+51}{2} = 48.5$
   $Q_3 = \frac{66+70}{2} = 68$
   $Q_3 - Q_1 = 68 - 10 = 58$
   R: El rango intercuartil es 58.

2. a. Ciudad de Guatemala: 21, 22, 22, 23, 23, 23, 24
   Tokio: 19, 25, 25, 26, 26, 27, 27

   b. 21 22 22 23 23 23 24
   Q_1 Q_2 Q_3

   $Q_1 = 22$
   $Q_2 = 23$
   $Q_3 = 23$
   $Q_3 - Q_1 = 23 - 22 = 1$
   R: El rango intercuartil de temperaturas en la ciudad de Guatemala es 1ºC.

   c. 19 25 25 26 26 27 27
   Q_1 Q_2 Q_3

   $Q_1 = 25$
   $Q_2 = 26$
   $Q_3 = 27$
   $Q_3 - Q_1 = 27 - 25 = 2$
   R: El rango intercuartil de temperaturas en Tokio es 2ºC.

Fecha: dd – mm – aa
6-1-2 Rango intercuartil

Ⓟ Se presentan las notas en las pruebas de Matemática e Inglés, calificadas sobre 100 puntos.
a. Encuentre los cuartiles para cada serie de datos.
b. ¿En qué serie de datos existe mayor diferencia entre Q_1 y Q_3?

Ⓢ Matemática: 15, 61, | 69, 73, 7|6, 77, 79, | 81, 85
Q_1 Q_2 Q_3

Inglés: 33, 40, | 48, 58, 6|1, 63, 69, | 75, 81
Q_1 Q_2 Q_3

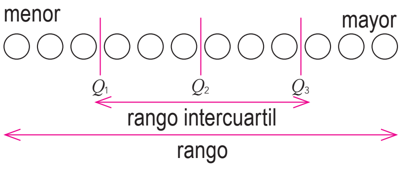
a. Matemática: $Q_1 = \frac{61+69}{2} = 65$
$Q_2 = 76$
$Q_3 = \frac{79+81}{2} = 80$

Inglés: $Q_1 = \frac{40+48}{2} = 44$
$Q_2 = 61$
$Q_3 = \frac{69+75}{2} = 72$

Los cuartiles son aquellos puntos que dividen una serie de datos en cuatro partes iguales mediante tres cuartiles.

b. Matemática: 80 − 65 = 15
Inglés: 72 − 44 = 28
La diferencia de Q_1 y Q_3 es mayor en Inglés.

Ⓒ A la diferencia entre Q_1 y Q_3 se le llama rango intercuartil.
Para calcular el rango intercuartil:
Paso 1. Se ordenan los números de menor a mayor.
Paso 2. Se encuentra Q_1 y Q_3.
Paso 3. Se resta Q_1 de Q_3.

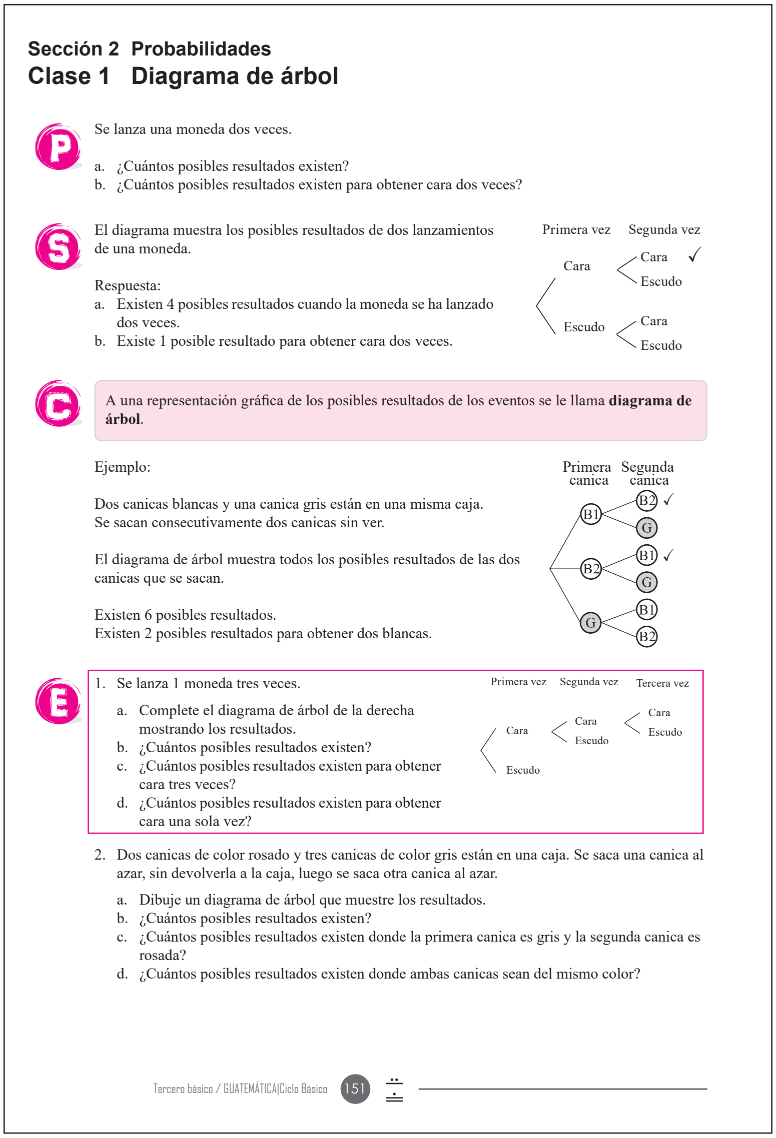


Ⓔ 1. ¿Cuál es el rango intercuartil de la siguiente serie?
a. 2, 7, 8, 10, 11, 24, 30, 36, 40, 42, 49
Q_1 Q_2 Q_3

$Q_3 - Q_1 = 40 - 8 = 32$
R: El rango intercuartil es 32.

Sección 2 Probabilidades
Clase 1 Diagrama de árbol

Aprendizaje esperado:
Encuentra el conjunto de posibles resultados de un evento usando el diagrama de árbol.
Dibuja un diagrama de árbol.



Sección 2 Probabilidades
Clase 1 Diagrama de árbol

P Se lanza una moneda dos veces.

a. ¿Cuántos posibles resultados existen?
b. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara dos veces?

S El diagrama muestra los posibles resultados de dos lanzamientos de una moneda.

Respuesta:
a. Existen 4 posibles resultados cuando la moneda se ha lanzado dos veces.
b. Existe 1 posible resultado para obtener cara dos veces.

C A una representación gráfica de los posibles resultados de los eventos se le llama **diagrama de árbol**.

Ejemplo:

Dos canicas blancas y una canica gris están en una misma caja.
Se sacan consecutivamente dos canicas sin ver.

El diagrama de árbol muestra todos los posibles resultados de las dos canicas que se sacan.

Existen 6 posibles resultados.
Existen 2 posibles resultados para obtener dos blancas.

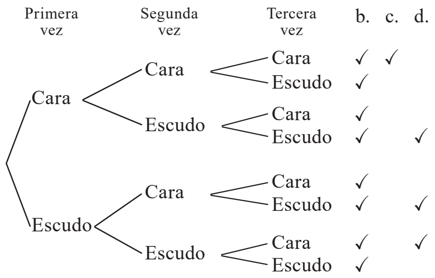
E 1. Se lanza 1 moneda tres veces.
- a. Complete el diagrama de árbol de la derecha mostrando los resultados.
- b. ¿Cuántos posibles resultados existen?
- c. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara tres veces?
- d. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara una sola vez?

2. Dos canicas de color rosado y tres canicas de color gris están en una caja. Se saca una canica al azar, sin devolverla a la caja, luego se saca otra canica al azar.
- a. Dibuje un diagrama de árbol que muestre los resultados.
- b. ¿Cuántos posibles resultados existen?
- c. ¿Cuántos posibles resultados existen donde la primera canica es gris y la segunda canica es rosada?
- d. ¿Cuántos posibles resultados existen donde ambas canicas sean del mismo color?

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 151

Solucionario de los ejercicios:

1. a.



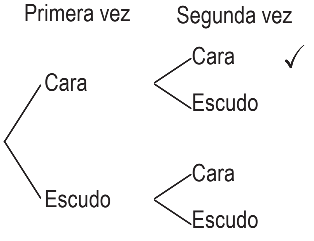
b. 8 posibles resultados
c. 1 posible resultado
d. 3 posibles resultados

Ver ejercicios restantes en la página G201.

Fecha: dd – mm – aa
6-2-1 Diagrama de árbol

Ⓟ Se lanza una moneda dos veces.
a. ¿Cuántos posibles resultados existen?
b. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara dos veces?

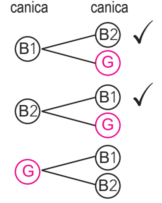
Ⓢ



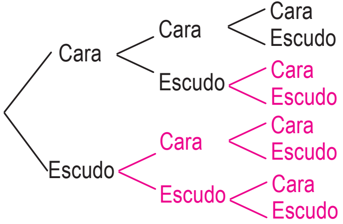
a. Existen 4 posibles resultados.
b. Existe 1 posible resultado para obtener cara dos veces.

Ⓒ A una representación gráfica de los posibles resultados de los eventos se le llama diagrama de árbol.

Ejemplo:
Dos canicas blancas y una canica gris están en una caja. Se sacan consecutivamente dos canicas sin ver.
Existen 6 posibles resultados.
Existen 2 posibles resultados para obtener dos blancas.



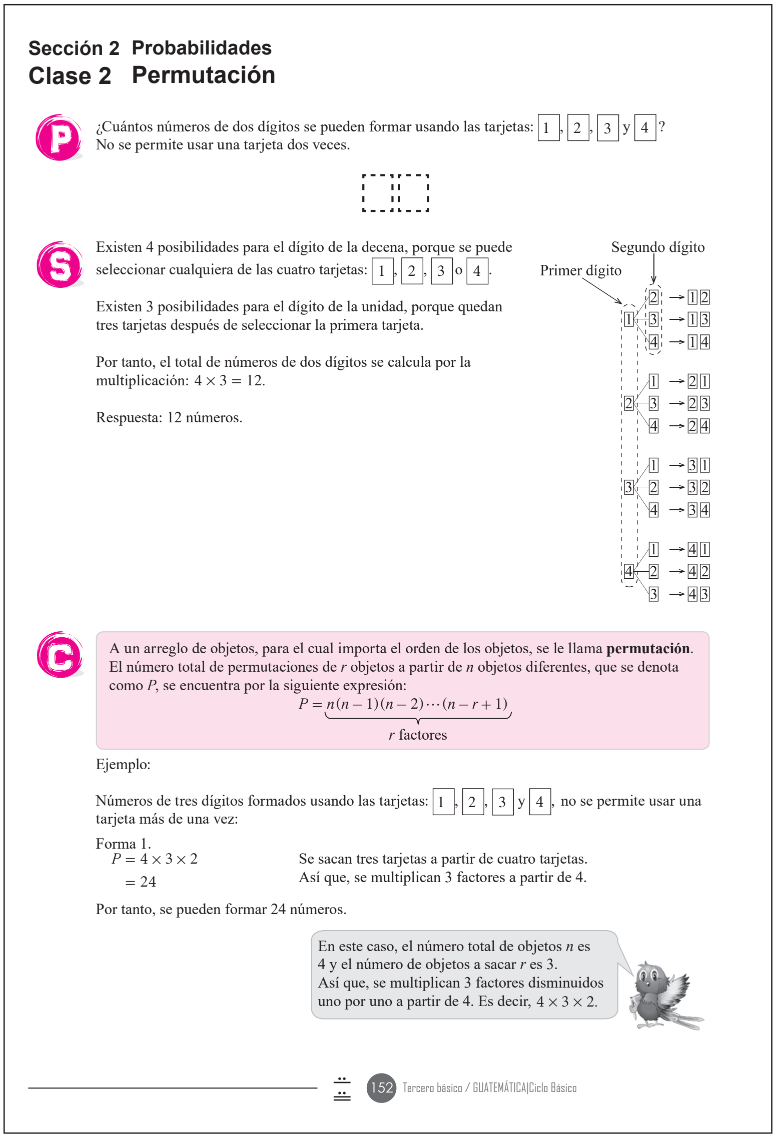
Ⓔ 1. Se lanza una moneda tres veces.
a. Complete el diagrama de árbol.



b. ¿Cuántos posibles resultados existen? R: 8 posibles resultados
c. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara tres veces?
R: 1 posible resultado
d. ¿Cuántos posibles resultados existen para obtener cara una sola vez?
R: 3 posibles resultados

Sección 2 Probabilidades
Clase 2 Permutación

Aprendizaje esperado:
Encuentra el número total de permutaciones.



Sección 2 Probabilidades
Clase 2 Permutación

P ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar usando las tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$?
No se permite usar una tarjeta dos veces.

S Existen 4 posibilidades para el dígito de la decena, porque se puede seleccionar cualquiera de las cuatro tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ o $\boxed{4}$.

Existen 3 posibilidades para el dígito de la unidad, porque quedan tres tarjetas después de seleccionar la primera tarjeta.

Por tanto, el total de números de dos dígitos se calcula por la multiplicación: 4 × 3 = 12.

Respuesta: 12 números.

C A un arreglo de objetos, para el cual importa el orden de los objetos, se le llama **permutación**.
El número total de permutaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes, que se denota como P, se encuentra por la siguiente expresión:

$$P = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ factores}}$$

Ejemplo:

Números de tres dígitos formados usando las tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$, no se permite usar una tarjeta más de una vez:

Forma 1.
$P = 4 \times 3 \times 2$
$= 24$

Se sacan tres tarjetas a partir de cuatro tarjetas.
Así que, se multiplican 3 factores a partir de 4.

Por tanto, se pueden formar 24 números.

En este caso, el número total de objetos n es 4 y el número de objetos a sacar r es 3.
Así que, se multiplican 3 factores disminuidos uno por uno a partir de 4. Es decir, 4 × 3 × 2.

Solucionario de los ejercicios:

a. $P = 5 \times 4 = 20$
R: 20 números

b. $P = 6 \times 5 \times 4 = 120$
R: 120 números

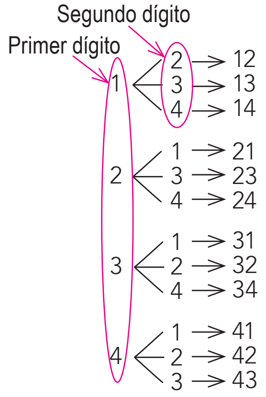
c. $P = 7 \times 6 \times 5 \times 4 = 840$
R: 840 arreglos

d. $P = 11 \times 10 = 110$
R: 110 arreglos

Fecha: dd – mm – aa
6-2-2 Permutación

Ⓟ ¿Cuántos números de dos dígitos se pueden formar usando las tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$, sin repetición?

Ⓢ



Existen 4 posibilidades para el dígito de la decena.
Existen 3 posibilidades para el dígito de la unidad porque quedan tres tarjetas después de seleccionar la primera tarjeta.

Por tanto, 4 × 3 = 12 .

R: 12 números

Ⓒ A un arreglo de objetos, para el cual importa el orden de los objetos, se le llama permutación.
El número total de permutaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes se denota como P y se calcula:

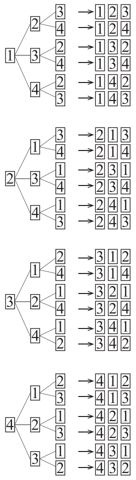
$$P = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r\text{ factores}}$$

Ejemplo:
Números de tres dígitos tomados usando las tarjetas:
$\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$, sin repetición.

Forma 1.
$P = 4 \times 3 \times 2 = 24$
R: 24 números

Ⓔ a. Cuando se forman números de dos dígitos usando cinco tarjetas diferentes: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, sin repetición, ¿cuántos arreglos diferentes se pueden formar?
$P = 5 \times 4 = 20$
R: 20 números

Forma 2.
Como muestra el diagrama de árbol de la derecha, existen 24 números diferentes.



E ¿Cuántos arreglos diferentes se pueden formar en los siguientes casos?

a. Se forman números de dos dígitos usando cinco tarjetas diferentes: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, sin repetición.

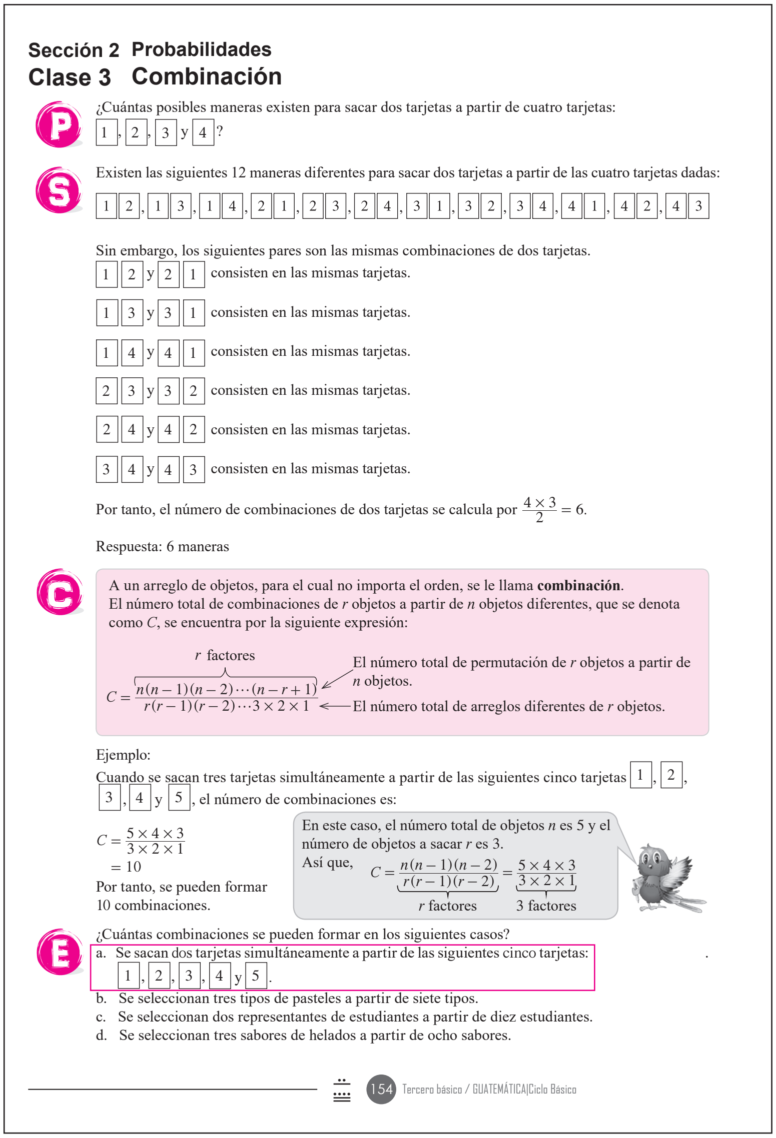
b. Se forman números de tres dígitos usando seis tarjetas diferentes: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$ y $\boxed{6}$, sin repetición.

c. Se selecciona el primer, segundo, tercer y cuarto corredor a partir de siete candidatos para la carrera de los 21K.

d. Se selecciona el capitán y el sub capitán a partir de once jugadores del equipo.

Sección 2 Probabilidades
Clase 3 Combinación

Aprendizaje esperado:
Encuentra el número total de combinaciones.



Sección 2 Probabilidades
Clase 3 Combinación

P ¿Cuántas posibles maneras existen para sacar dos tarjetas a partir de cuatro tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$?

S Existen las siguientes 12 maneras diferentes para sacar dos tarjetas a partir de las cuatro tarjetas dadas:

$\boxed{1}\boxed{2}$, $\boxed{1}\boxed{3}$, $\boxed{1}\boxed{4}$, $\boxed{2}\boxed{1}$, $\boxed{2}\boxed{3}$, $\boxed{2}\boxed{4}$, $\boxed{3}\boxed{1}$, $\boxed{3}\boxed{2}$, $\boxed{3}\boxed{4}$, $\boxed{4}\boxed{1}$, $\boxed{4}\boxed{2}$, $\boxed{4}\boxed{3}$

Sin embargo, los siguientes pares son las mismas combinaciones de dos tarjetas.

$\boxed{1}\boxed{2}$ y $\boxed{2}\boxed{1}$ consisten en las mismas tarjetas.

$\boxed{1}\boxed{3}$ y $\boxed{3}\boxed{1}$ consisten en las mismas tarjetas.

$\boxed{1}\boxed{4}$ y $\boxed{4}\boxed{1}$ consisten en las mismas tarjetas.

$\boxed{2}\boxed{3}$ y $\boxed{3}\boxed{2}$ consisten en las mismas tarjetas.

$\boxed{2}\boxed{4}$ y $\boxed{4}\boxed{2}$ consisten en las mismas tarjetas.

$\boxed{3}\boxed{4}$ y $\boxed{4}\boxed{3}$ consisten en las mismas tarjetas.

Por tanto, el número de combinaciones de dos tarjetas se calcula por $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

Respuesta: 6 maneras

C A un arreglo de objetos, para el cual no importa el orden, se le llama **combinación**.
El número total de combinaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes, que se denota como C, se encuentra por la siguiente expresión:

$$C = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ factores}}}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}$$

El número total de permutación de r objetos a partir de n objetos.

El número total de arreglos diferentes de r objetos.

Ejemplo:
Cuando se sacan tres tarjetas simultáneamente a partir de las siguientes cinco tarjetas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, el número de combinaciones es:

$$C = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1}$$
$$= 10$$

Por tanto, se pueden formar 10 combinaciones.

En este caso, el número total de objetos n es 5 y el número de objetos a sacar r es 3.
Así que, $C = \frac{n(n-1)(n-2)}{\underbrace{r(r-1)(r-2)}_{r\text{ factores}}} = \frac{5 \times 4 \times 3}{\underbrace{3 \times 2 \times 1}_{3\text{ factores}}}$

E ¿Cuántas combinaciones se pueden formar en los siguientes casos?

a. Se sacan dos tarjetas simultáneamente a partir de las siguientes cinco tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$.
b. Se seleccionan tres tipos de pasteles a partir de siete tipos.
c. Se seleccionan dos representantes de estudiantes a partir de diez estudiantes.
d. Se seleccionan tres sabores de helados a partir de ocho sabores.

Solucionario de los ejercicios:

a. $C = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$
R: 10 combinaciones

b. $C = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$
R: 35 combinaciones

c. $C = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} = 45$
R: 45 combinaciones

d. $C = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$
R: 56 combinaciones

Fecha: dd – mm – aa
6-2-3 Combinación

Ⓟ ¿Cuántas posibles maneras existen para sacar dos tarjetas a partir de cuatro tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ y $\boxed{4}$?

Ⓢ Existen 12 maneras diferentes.
1 2, 1 3, 1 4, 2 1, 2 3, 2 4, 3 1, 3 2, 3 4, 4 1, 4 2, 4 3
Sin embargo, los siguientes pares son las mismas combinaciones de dos tarjetas:

1 2 y 2 1
1 3 y 3 1
1 4 y 4 1
2 3 y 3 2
2 4 y 4 2
3 4 y 4 3

Por tanto, el número de combinaciones de dos tarjetas a partir de cuatro tarjetas se calcula por $\frac{4 \times 3}{2} = 6$.

R: 6 maneras

Ⓒ A un arreglo de objetos, para el cual no importa el orden, se le llama combinación.
El número total de combinaciones de r objetos a partir de n objetos diferentes se denota como C y se calcula:

$$C = \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}^{r\text{ factores}}}{r(r-1)(r-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}$$

Ejemplo:
El número de combinaciones cuando se sacan tres tarjetas simultáneamente a partir de las cinco tarjetas $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$.

$C = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$

R: 10 combinaciones

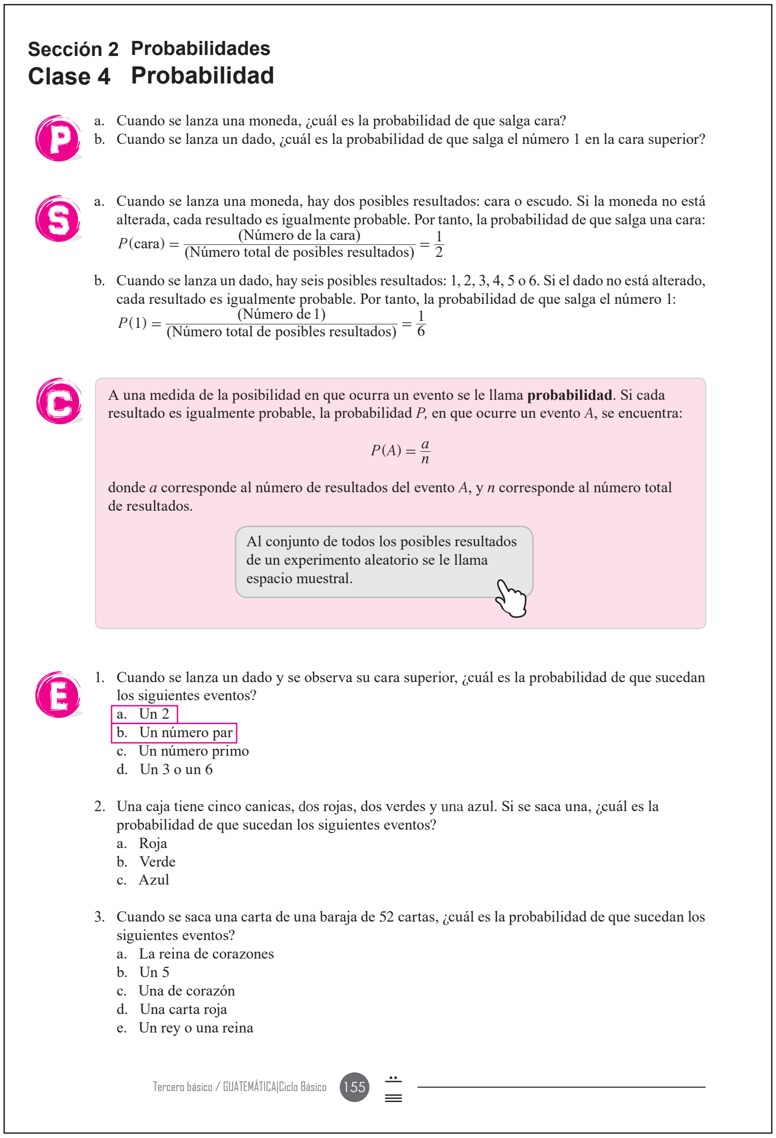
Ⓔ a. Cuando se sacan dos tarjetas simultáneamente a partir de las cinco tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$, ¿cuántas combinaciones se pueden formar?

$C = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$

R: 10 combinaciones

Sección 2 Probabilidades
Clase 4 Probabilidad

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad de un evento.



Sección 2 Probabilidades
Clase 4 Probabilidad

P
a. Cuando se lanza una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?
b. Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 1 en la cara superior?

S
a. Cuando se lanza una moneda, hay dos posibles resultados: cara o escudo. Si la moneda no está alterada, cada resultado es igualmente probable. Por tanto, la probabilidad de que salga una cara:

$$P(\text{cara}) = \frac{(\text{Número de la cara})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{2}$$

b. Cuando se lanza un dado, hay seis posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si el dado no está alterado, cada resultado es igualmente probable. Por tanto, la probabilidad de que salga el número 1:

$$P(1) = \frac{(\text{Número de 1})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{6}$$

C
A una medida de la posibilidad en que ocurra un evento se le llama **probabilidad**. Si cada resultado es igualmente probable, la probabilidad P, en que ocurre un evento A, se encuentra:

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

donde a corresponde al número de resultados del evento A, y n corresponde al número total de resultados.

Al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio se le llama espacio muestral.

E
1. Cuando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
   a. Un 2
   b. Un número par
   c. Un número primo
   d. Un 3 o un 6

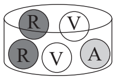
2. Una caja tiene cinco canicas, dos rojas, dos verdes y una azul. Si se saca una, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
   a. Roja
   b. Verde
   c. Azul

3. Cuando se saca una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
   a. La reina de corazones
   b. Un 5
   c. Una de corazón
   d. Una carta roja
   e. Un rey o una reina

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 155

Solucionario de los ejercicios:

1. Posibles resultados: {1, 2, 3, 4, 5, 6}
   a. Un número 2: {2}
   $$P(2) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número 2})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{6}$$
   b. Un número par: {2, 4, 6}
   $$P(\text{un número par}) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número par})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
   c. Un número primo: {2, 3, 5}
   $$P(\text{un número primo}) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número primo})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
   d. Un número 3 o 6: {3, 6}
   $$P(3 \text{ o } 6) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número 3 o 6})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$
2. a.
   $$P(\text{roja}) = \frac{(\text{Número de canicas rojas})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{2}{5}$$



   b.
   $$P(\text{verde}) = \frac{(\text{Número de canicas verdes})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{2}{5}$$
   c.
   $$P(\text{azul}) = \frac{(\text{Número de canicas azules})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{5}$$

Ver ejercicios restantes en la página G201.

Fecha: dd – mm – aa
6-2-4 Probabilidad

Ⓟ a. Cuando se lanza una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que salga cara?
b. Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que salga el número 1?

Ⓢ a. Cuando se lanza una moneda, hay dos posibles resultados: cara o escudo. Por tanto, la probabilidad de que salga una cara:

$$P(\text{cara}) = \frac{(\text{Número de la cara})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{2}$$

b. Cuando se lanza un dado, hay seis posibles resultados: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Por tanto, la probabilidad de que salga el número 1:

$$P(1) = \frac{(\text{Número 1})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{6}$$

Ⓒ A una medida de la posibilidad en que ocurra un evento se le llama probabilidad. Si cada resultado es igualmente probable, la probabilidad P, en que ocurre un evento A, se encuentra:

$$P(A) = \frac{a}{n}$$

donde a corresponde al número de resultados del evento A, y n corresponde al número total de resultados.

Ⓔ 1. Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
a. Un 2
b. Un número par

Cuando se lanza un dado, hay seis posibles resultados. Por tanto,

a. Un número 2: {2}

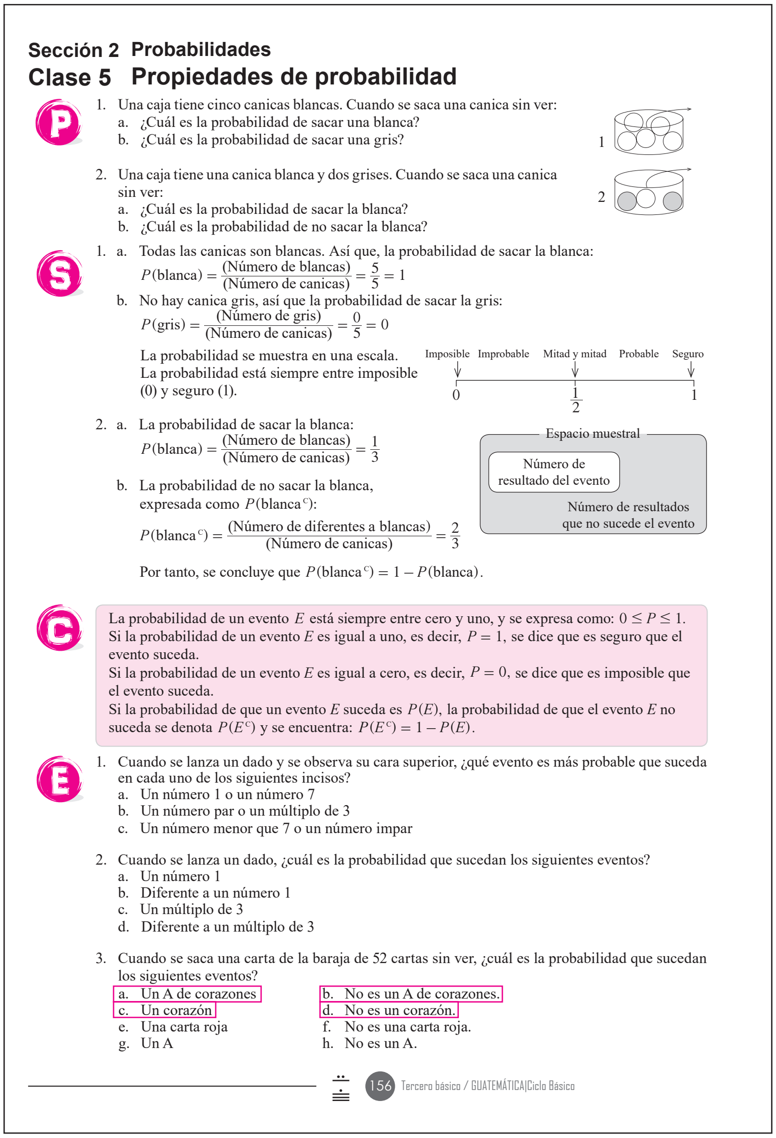
$$P(2) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número 2})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{1}{6}$$

b. Un número par: {2, 4, 6}

$$P(\text{un número par}) = \frac{(\text{Número de posibles resultados de un número par})}{(\text{Número total de posibles resultados})} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Sección 2 Probabilidades
Clase 5 Propiedades de probabilidad

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad de un evento al conocer las propiedades de la probabilidad.



Sección 2 Probabilidades
Clase 5 Propiedades de probabilidad

P

1. Una caja tiene cinco canicas blancas. Cuando se saca una canica sin ver:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una gris?

2. Una caja tiene una canica blanca y dos grises. Cuando se saca una canica sin ver:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar la blanca?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar la blanca?

S

1. a. Todas las canicas son blancas. Así que, la probabilidad de sacar la blanca:

$$P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{5}{5} = 1$$

b. No hay canica gris, así que la probabilidad de sacar la gris:

$$P(\text{gris}) = \frac{(\text{Número de gris})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{0}{5} = 0$$

La probabilidad se muestra en una escala.
La probabilidad está siempre entre imposible (0) y seguro (1).

2. a. La probabilidad de sacar la blanca:

$$P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{1}{3}$$

b. La probabilidad de no sacar la blanca, expresada como $P(\text{blanca}^c)$:

$$P(\text{blanca}^c) = \frac{(\text{Número de diferentes a blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{2}{3}$$

Por tanto, se concluye que $P(\text{blanca}^c) = 1 - P(\text{blanca})$.

C

La probabilidad de un evento E está siempre entre cero y uno, y se expresa como: $0 \leq P \leq 1$.
Si la probabilidad de un evento E es igual a uno, es decir, $P = 1$, se dice que es seguro que el evento suceda.
Si la probabilidad de un evento E es igual a cero, es decir, $P = 0$, se dice que es imposible que el evento suceda.
Si la probabilidad de que un evento E suceda es $P(E)$, la probabilidad de que el evento E no suceda se denota $P(E^c)$ y se encuentra: $P(E^c) = 1 - P(E)$.

E

1. Cuando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿qué evento es más probable que suceda en cada uno de los siguientes incisos?
   a. Un número 1 o un número 7
   b. Un número par o un múltiplo de 3
   c. Un número menor que 7 o un número impar

2. Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes eventos?
   a. Un número 1
   b. Diferente a un número 1
   c. Un múltiplo de 3
   d. Diferente a un múltiplo de 3

3. Cuando se saca una carta de la baraja de 52 cartas sin ver, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes eventos?
   a. Un A de corazones
   b. No es un A de corazones.
   c. Un corazón
   d. No es un corazón.
   e. Una carta roja
   f. No es una carta roja.
   g. Un A
   h. No es un A.

156 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $P(\text{número 1}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{número 7}) = \frac{0}{6} = 0$

Entonces, un número 1 es más probable.

b. $P(\text{un número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

$P(\text{múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Entonces, un número par es más probable.

c. $P(\text{número menor que 7}) = \frac{6}{6} = 1$

$P(\text{número impar}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Entonces, un número menor que 7 es más probable.

2. a. $P(\text{número 1}) = \frac{1}{6}$

b. $P(\text{diferente a un número 1})$
$= 1 - P(\text{un número 1})$
$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

c. $P(\text{un múltiplo de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

d. $P(\text{diferente a un múltiplo de 3})$
$= 1 - P(\text{un múltiplo de 3})$
$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

3. a. $P(\text{un A de corazón})$
$= \frac{1}{52}$

b. $P(\text{no es un A de corazones})$
$= 1 - P\ (\text{un A de corazones})$
$= 1 - \frac{1}{52} = \frac{51}{52}$

c. $P(\text{un corazón})$
$= \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

d. $P(\text{no es un corazón})$
$= 1 - P\ (\text{un corazón})$
$= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

e. $P(\text{una carta roja})$
$= \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$

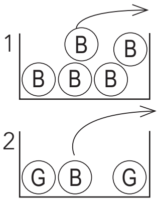
f. $P(\text{no es una carta roja})$
$= 1 - P\ (\text{una carta roja})$
$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

g. $P(\text{un A})$
$= \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

h. $P(\text{no es un A})$
$= 1 - P\ (\text{un A})$
$= 1 - \frac{1}{13} = \frac{12}{13}$

Fecha: dd – mm – aa
6-2-5 Propiedades de probabilidad

Ⓟ 1.a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca de la caja 1?
b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una gris?
2.a. ¿Cuál es la probabilidad de sacar una blanca de la caja 2?
b. ¿Cuál es la probabilidad de no sacar la blanca?



Ⓢ 1.a. $P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{5}{5} = 1$

b. $P(\text{gris}) = \frac{(\text{Número de gris})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{0}{5} = 0$

2.a. $P(\text{blanca}) = \frac{(\text{Número de blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{1}{3}$

b. La probabilidad de no sacar la blanca se expresa como $P(\text{blanca}^C)$:

$P(\text{blanca}^C) = \frac{(\text{Número de diferentes a blancas})}{(\text{Número de canicas})} = \frac{2}{3}$

Por tanto, se concluye $P(\text{blanca}^C) = 1 - P\ (\text{blanca})$

Ⓒ La probabilidad de un evento está siempre entre cero y uno: $0 \leq P \leq 1$.
Si la probabilidad de que un evento E suceda es $P(E)$, la probabilidad de que el evento E no suceda se encuentra:
$P(E^C) = 1 - P(E^C)$

Ⓔ 3. Cuando se saca una carta de la baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes eventos?

a. $P(\text{un A de corazones}) = \frac{1}{52}$

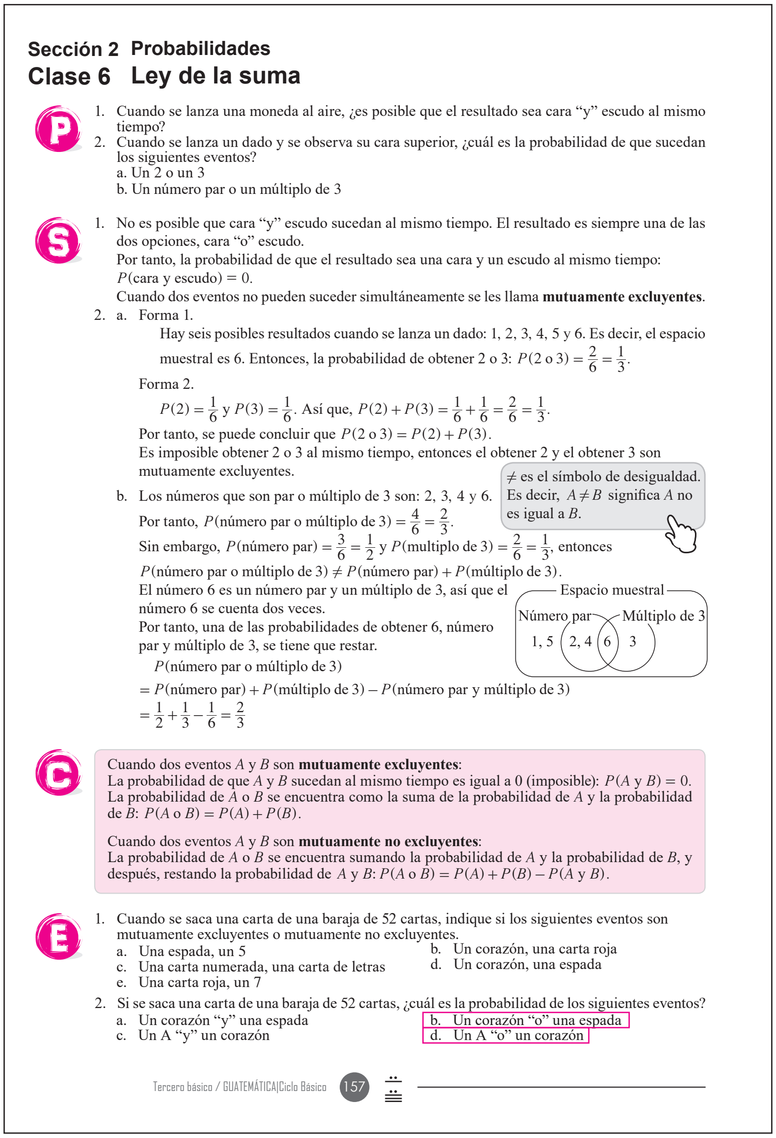
b. $P(\text{no es un A de corazones})$
$= 1 - P(\text{un A de corazones})$
$= 1 - \frac{1}{52} = \frac{51}{52}$

c. $P(\text{un corazón}) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

d. $P(\text{no es un corazón}) = 1 - P(\text{un corazón}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$

Sección 2 Probabilidades
Clase 6 Ley de la suma

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad de dos eventos usando la ley de la suma.



Sección 2 Probabilidades
Clase 6 Ley de la suma

P
1. Cuando se lanza una moneda al aire, ¿es posible que el resultado sea cara “y” escudo al mismo tiempo?
2. Cuando se lanza un dado y se observa su cara superior, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes eventos?
   a. Un 2 o un 3
   b. Un número par o un múltiplo de 3

S
1. No es posible que cara “y” escudo sucedan al mismo tiempo. El resultado es siempre una de las dos opciones, cara “o” escudo.
   Por tanto, la probabilidad de que el resultado sea una cara y un escudo al mismo tiempo:
   $P(\text{cara y escudo}) = 0$.
   Cuando dos eventos no pueden suceder simultáneamente se les llama **mutuamente excluyentes**.
2. a. Forma 1.
   Hay seis posibles resultados cuando se lanza un dado: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Es decir, el espacio muestral es 6. Entonces, la probabilidad de obtener 2 o 3: $P(2 \text{ o } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
   Forma 2.
   $P(2) = \frac{1}{6}$ y $P(3) = \frac{1}{6}$. Así que, $P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
   Por tanto, se puede concluir que $P(2 \text{ o } 3) = P(2) + P(3)$.
   Es imposible obtener 2 o 3 al mismo tiempo, entonces el obtener 2 y el obtener 3 son mutuamente excluyentes.

   b. Los números que son par o múltiplo de 3 son: 2, 3, 4 y 6.
   Por tanto, $P(\text{número par o múltiplo de 3}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
   Sin embargo, $P(\text{número par}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ y $P(\text{multiplo de 3}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, entonces
   $P(\text{número par o múltiplo de 3}) \neq P(\text{número par}) + P(\text{múltiplo de 3})$.
   El número 6 es un número par y un múltiplo de 3, así que el número 6 se cuenta dos veces.
   Por tanto, una de las probabilidades de obtener 6, número par y múltiplo de 3, se tiene que restar.
   $P(\text{número par o múltiplo de 3})$
   $= P(\text{número par}) + P(\text{múltiplo de 3}) - P(\text{número par y múltiplo de 3})$
   $= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$

$\neq$ es el símbolo de desigualdad. Es decir, $A \neq B$ significa A no es igual a B.

C
Cuando dos eventos A y B son **mutuamente excluyentes**:
La probabilidad de que A y B sucedan al mismo tiempo es igual a 0 (imposible): $P(A \text{ y } B) = 0$.
La probabilidad de A o B se encuentra como la suma de la probabilidad de A y la probabilidad de B: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$.

Cuando dos eventos A y B son **mutuamente no excluyentes**:
La probabilidad de A o B se encuentra sumando la probabilidad de A y la probabilidad de B, y después, restando la probabilidad de A y B: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.

E
1. Cuando se saca una carta de una baraja de 52 cartas, indique si los siguientes eventos son mutuamente excluyentes o mutuamente no excluyentes.
   a. Una espada, un 5
   b. Un corazón, una carta roja
   c. Una carta numerada, una carta de letras
   d. Un corazón, una espada
   e. Una carta roja, un 7
2. Si se saca una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?
   a. Un corazón “y” una espada
   b. Un corazón “o” una espada
   c. Un A “y” un corazón
   d. Un A “o” un corazón

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 157

Solucionario de los ejercicios:

1. a. Mutuamente no excluyentes
   b. Mutuamente no excluyentes
   c. Mutuamente excluyentes
   d. Mutuamente excluyentes
   e. Mutuamente no excluyentes
2. a. $P(\text{un corazón y una espada}) = 0$
   b. $P(\text{un corazón o una espada})$
   $= P(\text{un corazón}) + P(\text{una espada})$
   $= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
   c. $P(\text{un A y un corazón}) = \frac{1}{52}$
   d. $P(\text{un A o un corazón})$
   $= P(\text{un A}) + P(\text{un corazón}) - P(\text{un A y un corazón})$
   $= \frac{4}{54} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

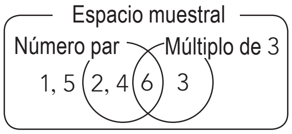
Fecha: dd – mm – aa
6-2-6 Ley de la suma

Ⓟ 1. Cuando se lanza una moneda, ¿es posible que el resultado sea cara “y” escudo al mismo tiempo?
2. Cuando se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan a) un 2 o un 3, b) un número par o un múltiplo de 3?

Ⓢ 1. No es posible. El resultado es siempre cara “o” escudo.
2.a. Forma 1. $P(2 \text{ o } 3) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Forma 2. $P(2) = \frac{1}{6}$, $P(3) = \frac{1}{6}$. $P(2) + P(3) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

b. Forma 1.
$P(\text{número par o múltiplo de 3})$
$= \frac{(2, 4, 6 \text{ o } 3)}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$



Forma 2.
$P(\text{número par o múltiplo de 3}) = P(\text{número par}) + P(\text{múltiplo de 3})$
$- P(\text{número par y múltiplo de 3}) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$
El número 6 es un número par y un múltiplo de 3, asi que el número 6 se cuenta dos veces. Por tanto, una de las probabilidades de obtener 6 se tiene que restar.

Ⓒ Cuando dos eventos no pueden suceder simultáneamente, se les llama mutuamente excluyentes y la probabilidad de A o B:
$P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B)$
Cuando dos eventos A y B son mutuamente no excluyentes, la probabilidad de A o B: $P(A \text{ o } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ y } B)$.

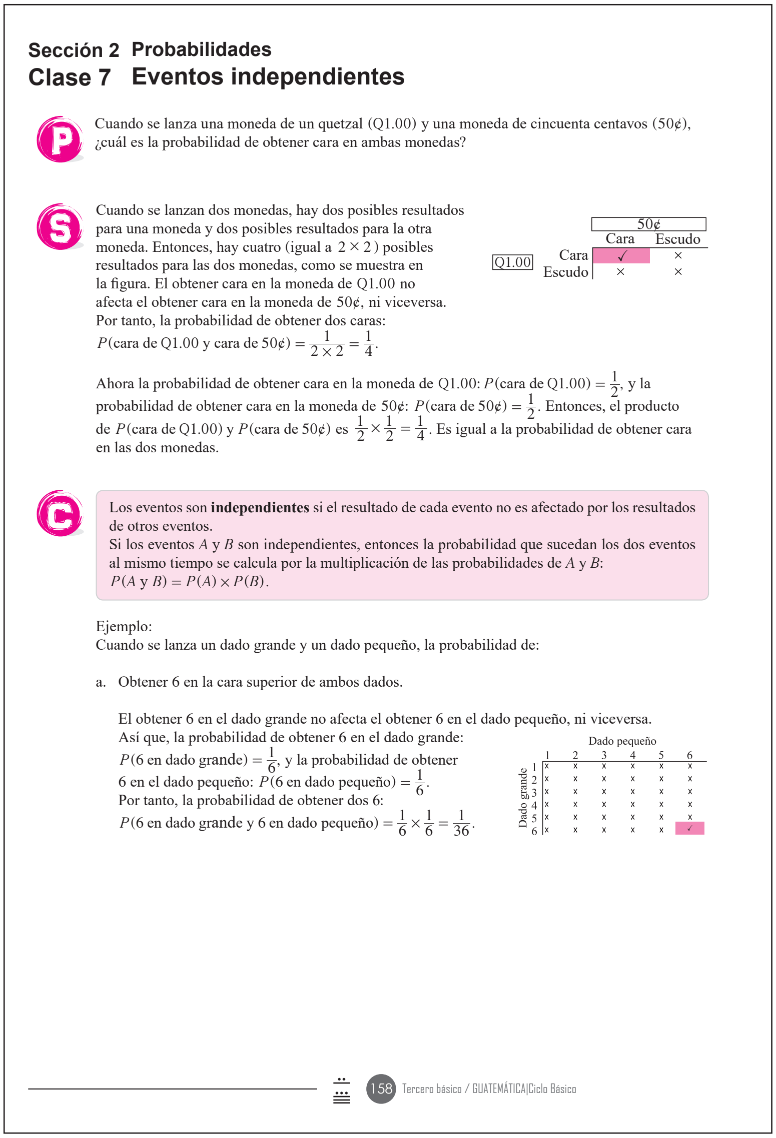
Ⓔ 2. Si se saca una carta de una baraja de 52 cartas, ¿cuál es la probabilidad de los siguientes eventos?
b. Un corazón “o” una espada

Como son mutuamente excluyentes:
$P(\text{un corazón o una espada}) = P(\text{un corazón}) + P(\text{una espada})$
$= \frac{13}{52} + \frac{13}{52} = \frac{26}{52} = \frac{1}{2}$
d. Un A “o” un corazón

Como son mutuamente no excluyentes:
$P(\text{un } A \text{ o un corazón}) = P(\text{un } A) + P(\text{un corazón}) - P(\text{un } A \text{ y un corazón})$
$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$

Sección 2 Probabilidades
Clase 7 Eventos independientes

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad de eventos independientes.



Sección 2 Probabilidades
Clase 7 Eventos independientes

P Cuando se lanza una moneda de un quetzal (Q1.00) y una moneda de cincuenta centavos (50¢), ¿cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas?

S Cuando se lanzan dos monedas, hay dos posibles resultados para una moneda y dos posibles resultados para la otra moneda. Entonces, hay cuatro (igual a 2×2) posibles resultados para las dos monedas, como se muestra en la figura. El obtener cara en la moneda de Q1.00 no afecta el obtener cara en la moneda de 50¢, ni viceversa.
Por tanto, la probabilidad de obtener dos caras:
$P(\text{cara de Q1.00 y cara de 50¢}) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$.

		50¢	
		Cara	Escudo
Q1.00	Cara	✓	×
	Escudo	×	×

Ahora la probabilidad de obtener cara en la moneda de Q1.00: $P(\text{cara de Q1.00}) = \frac{1}{2}$, y la probabilidad de obtener cara en la moneda de 50¢: $P(\text{cara de 50¢}) = \frac{1}{2}$. Entonces, el producto de $P(\text{cara de Q1.00})$ y $P(\text{cara de 50¢})$ es $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. Es igual a la probabilidad de obtener cara en las dos monedas.

C Los eventos son **independientes** si el resultado de cada evento no es afectado por los resultados de otros eventos.
Si los eventos A y B son independientes, entonces la probabilidad que sucedan los dos eventos al mismo tiempo se calcula por la multiplicación de las probabilidades de A y B:
$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Ejemplo:
Cuando se lanza un dado grande y un dado pequeño, la probabilidad de:

a. Obtener 6 en la cara superior de ambos dados.

El obtener 6 en el dado grande no afecta el obtener 6 en el dado pequeño, ni viceversa.
Así que, la probabilidad de obtener 6 en el dado grande:
$P(\text{6 en dado grande}) = \frac{1}{6}$, y la probabilidad de obtener 6 en el dado pequeño: $P(\text{6 en dado pequeño}) = \frac{1}{6}$.
Por tanto, la probabilidad de obtener dos 6:
$P(\text{6 en dado grande y 6 en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	x	x	x	x	x	x
	2	x	x	x	x	x	x
	3	x	x	x	x	x	x
	4	x	x	x	x	x	x
	5	x	x	x	x	x	x
	6	x	x	x	x	x	✓

158 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

1. a. $P(\text{escudo en ambas monedas})$
$= P(\text{escudo de Q1.00}) \times P(\text{escudo de 50¢})$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

(*Solución alternativa*)

		50¢	
		Cara	Escudo
Q1.00	Cara	×	×
	Escudo	×	✓

Entonces, $P(\text{escudo en ambas monedas}) = \frac{1}{4}$.

b. $P(\text{una cara y un escudo})$:
$P(\text{cara de Q1.00 y escudo de 50 ¢}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
$P(\text{escudo de Q1.00 y cara de 50¢}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$
Entonces, $P(\text{una cara y un escudo}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$
$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

(*Solución alternativa*)

		50¢	
		Cara	Escudo
Q1.00	Cara	×	✓
	Escudo	✓	×

Entonces, $P(\text{una cara y un escudo}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2. a. $P(\text{los dados son 1})$
$= P(\text{1 en dado grande}) \times P(\text{1 en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(*Solución alternativa*)

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	✓	×	×	×	×	×
	2	×	×	×	×	×	×
	3	×	×	×	×	×	×
	4	×	×	×	×	×	×
	5	×	×	×	×	×	×
	6	×	×	×	×	×	×

Entonces, $P(\text{los dados son 1}) = \frac{1}{36}$.

Fecha: dd – mm – aa
6-2-7 Eventos independientes

Ⓟ Cuando se lanza una moneda de Q1.00 y una de 50¢, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara en ambas monedas?

Ⓢ Hay dos posibles resultados para una moneda de Q1.00 y dos posibles resultados para una moneda de 50¢. Entonces, hay cuatro posibles resultados.

		50¢	
		Cara	Escudo
Q1.00	Cara	✓	×
	Escudo	×	×

$$P(\text{cara de Q1.00 y cara de 50¢}) = \frac{1}{2 \times 2} = \frac{1}{4}$$

Se calcula también como el producto de cada probabilidad.

$$P(\text{cara de Q1.00}) \times P(\text{cara de 50¢}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Ⓒ Los eventos son independientes si el resultado de cada evento no es afectado por los resultados de otros eventos.

Si los eventos A y B son independientes, la probabilidad de que sucedan los dos eventos al mismo tiempo se calcula: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.

Ejemplo:
a. Cuando se lanza un dado grande y un dado pequeño, la probabilidad de obtener 6 en ambos dados.
$P(\text{6 en dado grande}) = \frac{1}{6}$

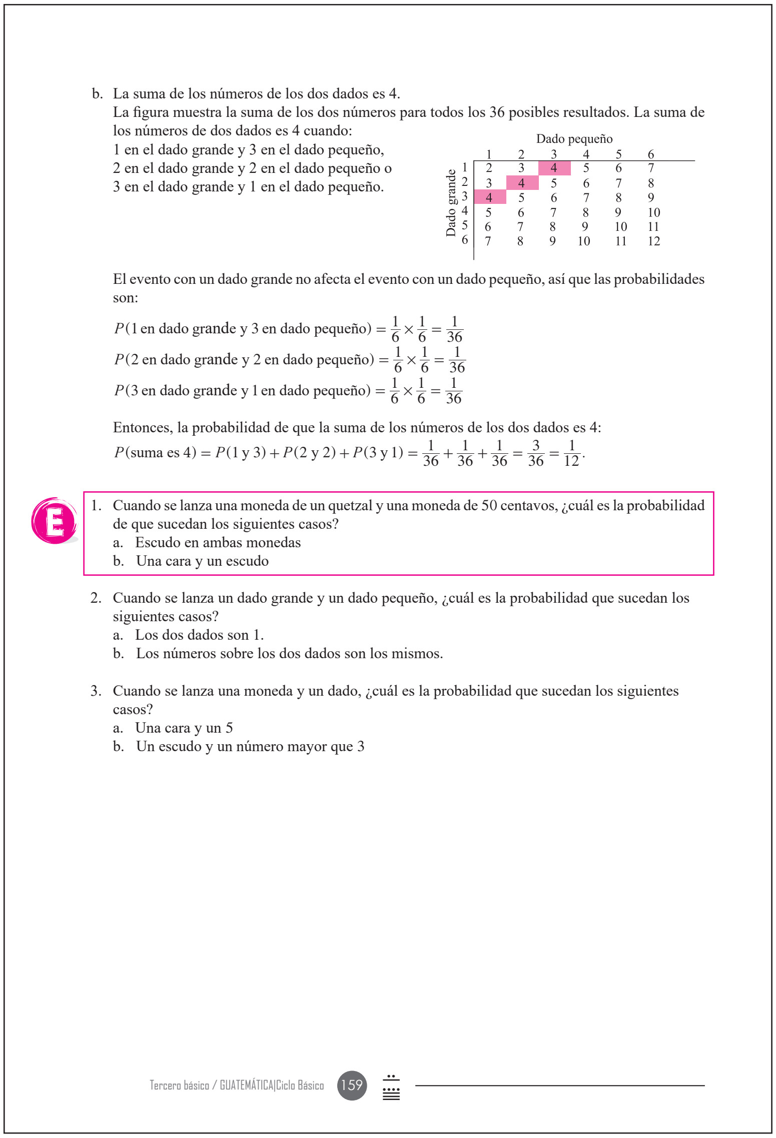
$P(\text{6 en dado pequeño}) = \frac{1}{6}$

$P(\text{6 en dado grande y 6 en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Ⓔ 1. Cuando se lanza una moneda de Q1.00 y una de 50¢, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes casos?

a. Escudo en ambas monedas:
$P(\text{escudo en ambas}) = P(\text{escudo de Q1.00}) \times P(\text{escudo de 50¢})$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

b. Una cara y un escudo:
$P(\text{una cara y un escudo})$
$= P(\text{cara de Q1.00}) \times P(\text{escudo de 50¢})$
$+ P(\text{escudo de Q1.00}) \times P(\text{cara de 50¢})$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



b. La suma de los números de los dos dados es 4.
La figura muestra la suma de los dos números para todos los 36 posibles resultados. La suma de los números de dos dados es 4 cuando:
1 en el dado grande y 3 en el dado pequeño,
2 en el dado grande y 2 en el dado pequeño o
3 en el dado grande y 1 en el dado pequeño.

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

El evento con un dado grande no afecta el evento con un dado pequeño, así que las probabilidades son:

$P(1 \text{ en dado grande y } 3 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(2 \text{ en dado grande y } 2 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

$P(3 \text{ en dado grande y } 1 \text{ en dado pequeño}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

Entonces, la probabilidad de que la suma de los números de los dos dados es 4:

$P(\text{suma es } 4) = P(1 \text{ y } 3) + P(2 \text{ y } 2) + P(3 \text{ y } 1) = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$

1. Cuando se lanza una moneda de un quetzal y una moneda de 50 centavos, ¿cuál es la probabilidad de que sucedan los siguientes casos?
   a. Escudo en ambas monedas
   b. Una cara y un escudo

2. Cuando se lanza un dado grande y un dado pequeño, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes casos?
   a. Los dos dados son 1.
   b. Los números sobre los dos dados son los mismos.

3. Cuando se lanza una moneda y un dado, ¿cuál es la probabilidad que sucedan los siguientes casos?
   a. Una cara y un 5
   b. Un escudo y un número mayor que 3

b. $P(\text{los números sobre los dos dados son los mismos})$:
$P(1 \text{ en dado grande y } 1 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
$P(2 \text{ en dado grande y } 2 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
$P(3 \text{ en dado grande } y \text{ } 3 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
$P(4 \text{ en dado grande y } 4 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
$P(5 \text{ en dado grande y } 5 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
$P(6 \text{ en dado grande y } 6 \text{ en dado pequeño})$
$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Entonces, $P(\text{los números sobre los dos dados son los mismos})$
$= \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

(*Solución alternativa*)

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	✓	×	×	×	×	×
	2	×	✓	×	×	×	×
	3	×	×	✓	×	×	×
	4	×	×	×	✓	×	×
	5	×	×	×	×	✓	×
	6	×	×	×	×	×	✓

Entonces, $P(\text{los números sobre los dos dados son los mismos}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$

3. a. $P(\text{una cara y un } 5)$
$= P(\text{una cara}) \times P(\text{un } 5)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

(*Solución alternativa*)

		Dado					
		1	2	3	4	5	6
Moneda	Cara	×	×	×	×	✓	×
	Escudo	×	×	×	×	×	×

Entonces, $P(\text{una cara y un } 5) = \frac{1}{12}.$

b. $P(\text{un escudo y un número mayor que } 3)$
$= P(\text{un escudo}) \times P(\text{un número mayor que } 3)$
$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

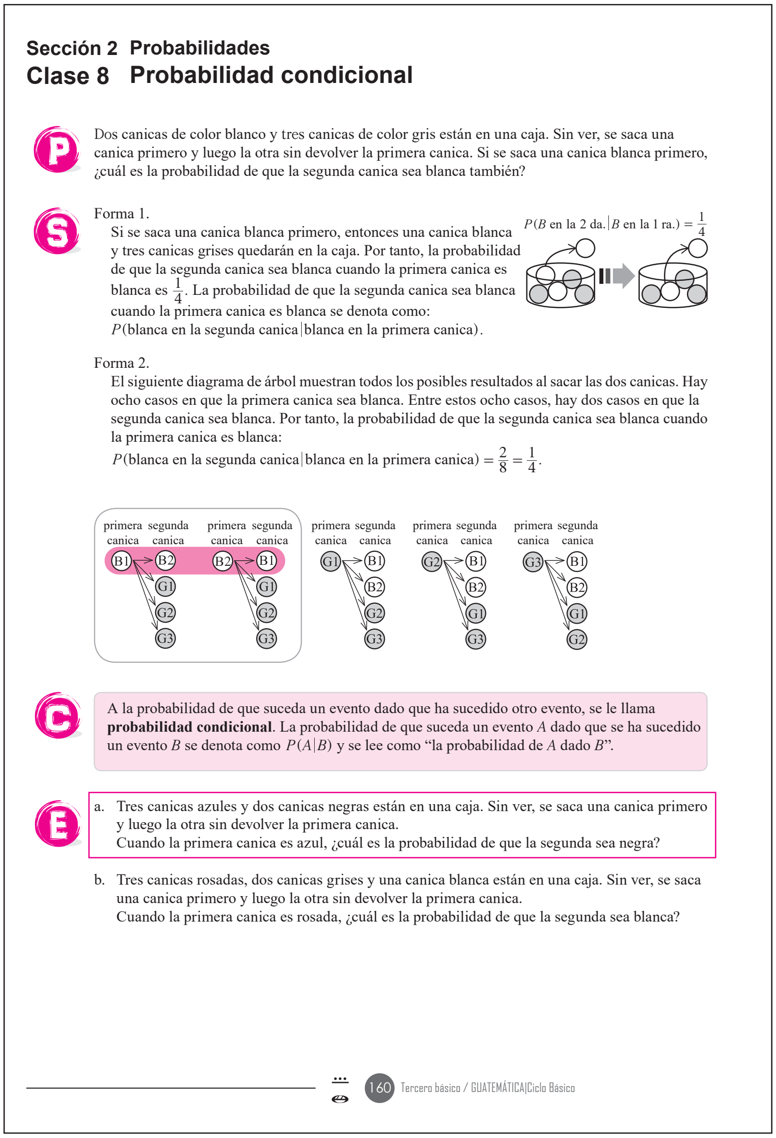
(*Solución alternativa*)

		Dado					
		1	2	3	4	5	6
Moneda	Cara	×	×	×	×	×	×
	Escudo	×	×	×	✓	✓	✓

Entonces, $P(\text{un escudo y un número mayor que } 3)$
$= \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$

Sección 2 Probabilidades
Clase 8 Probabilidad condicional

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad condicional.



Sección 2 Probabilidades
Clase 8 Probabilidad condicional

P Dos canicas de color blanco y tres canicas de color gris están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica. Si se saca una canica blanca primero, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea blanca también?

S Forma 1.

Si se saca una canica blanca primero, entonces una canica blanca y tres canicas grises quedarán en la caja. Por tanto, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca es $\frac{1}{4}$. La probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca se denota como:
P(blanca en la segunda canica | blanca en la primera canica).

$P(B \text{ en la 2 da.} | B \text{ en la 1 ra.}) = \frac{1}{4}$

Forma 2.

El siguiente diagrama de árbol muestran todos los posibles resultados al sacar las dos canicas. Hay ocho casos en que la primera canica sea blanca. Entre estos ocho casos, hay dos casos en que la segunda canica sea blanca. Por tanto, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca cuando la primera canica es blanca:
P(blanca en la segunda canica | blanca en la primera canica) $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

C A la probabilidad de que suceda un evento dado que ha sucedido otro evento, se le llama **probabilidad condicional**. La probabilidad de que suceda un evento A dado que se ha sucedido un evento B se denota como $P(A|B)$ y se lee como "la probabilidad de A dado B".

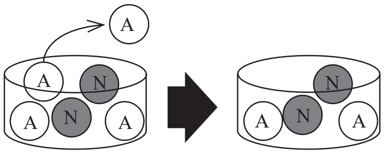
E
a. Tres canicas azules y dos canicas negras están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica.
Cuando la primera canica es azul, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea negra?

b. Tres canicas rosadas, dos canicas grises y una canica blanca están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra sin devolver la primera canica.
Cuando la primera canica es rosada, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca?

160 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

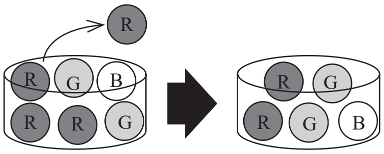
Solucionario de los ejercicios:

a. P(negra en la segunda canica | azul en la primera canica)
$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$



Después de sacar una canica azul, dos canicas azules y dos canicas negras se quedan en la caja.

b. P(blanca en la segunda canica | rosada en la primera canica) $= \frac{1}{5}$

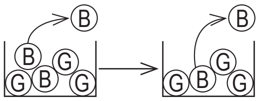


Después de sacar una canica rosada, dos canicas rosadas, dos canicas grises y una canica blanca se quedan en la caja.

Fecha: dd – mm – aa
6-2-8 Probabilidad condicional

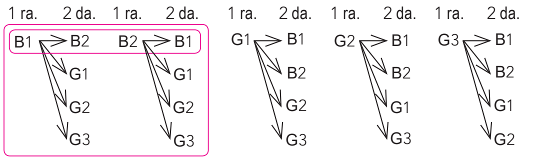
Ⓟ Dos canicas blancas y tres canicas grises están en una caja. Se saca una blanca primero y luego otra sin devolver la primera canica. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea blanca también?

Ⓢ La probabilidad se denota como P(blanca en segunda | blanca en primera).



Forma 1. Como se muestra la figura, P(blanca en segunda | blanca en primera) $= \frac{1}{4}$.

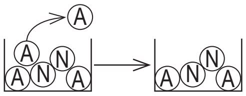
Forma 2. Por medio de elaboración de diagrama de árbol, se calcula: P(blanca en segunda | blanca en primera) $= \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.



Ⓒ A la probabilidad de que suceda A dado que ha sucedido otro evento B, se le llama probabilidad condicional. Esta probabilidad se denota como $P(A | B)$ y se lee como "la probabilidad de A dado B".

Ⓔ a. Tres canicas azules y dos negras están en una caja. Se saca una azul primero y luego otra sin devolver la primera. ¿Cuál es la probabilidad de que la segunda sea negra?

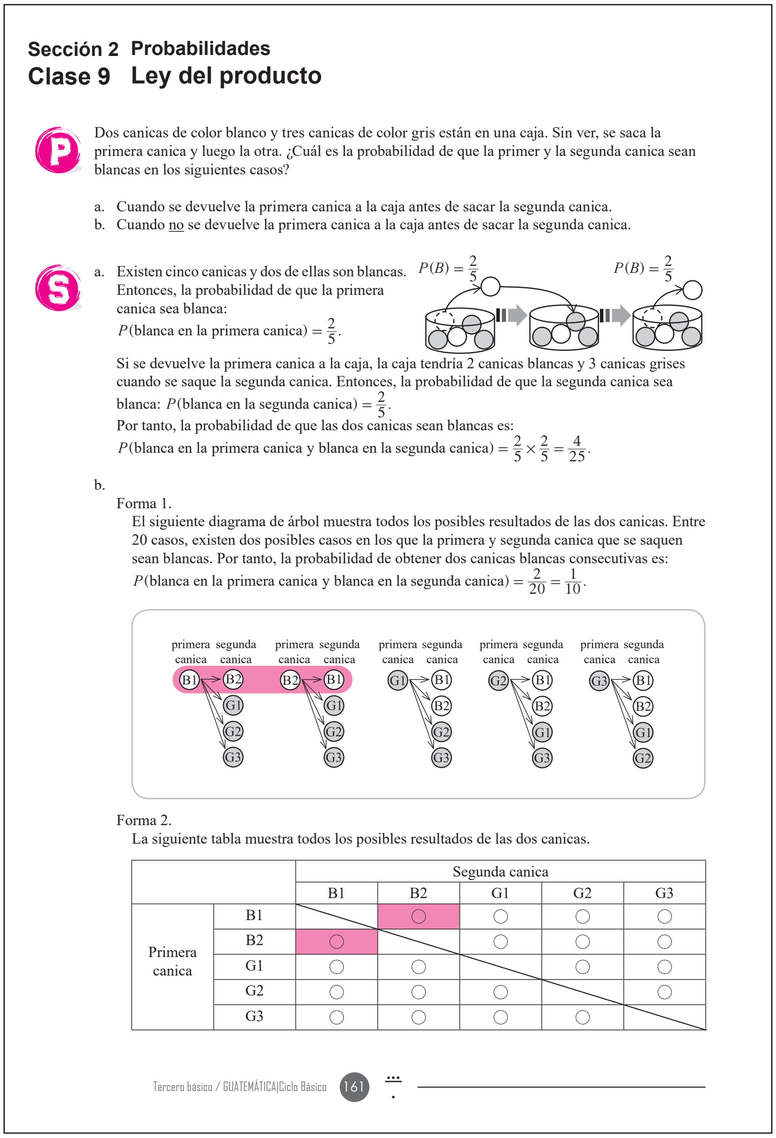
La probabilidad se denota como P(negro | azul)



Como se muestra en la figura derecha: P(negro | azul) $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

Sección 2 Probabilidades
Clase 9 Ley del producto

Aprendizaje esperado:
Calcula la probabilidad que sucedan dos eventos usando la ley del producto.



Sección 2 Probabilidades
Clase 9 Ley del producto

P Dos canicas de color blanco y tres canicas de color gris están en una caja. Sin ver, se saca la primera canica y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primer y la segunda canica sean blancas en los siguientes casos?

a. Cuando se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica.
b. Cuando no se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica.

S a. Existen cinco canicas y dos de ellas son blancas. Entonces, la probabilidad de que la primera canica sea blanca:
$P(\text{blanca en la primera canica}) = \frac{2}{5}$.

Si se devuelve la primera canica a la caja, la caja tendría 2 canicas blancas y 3 canicas grises cuando se saque la segunda canica. Entonces, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca: $P(\text{blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5}$.
Por tanto, la probabilidad de que las dos canicas sean blancas es:
$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$.

b.
Forma 1.
El siguiente diagrama de árbol muestra todos los posibles resultados de las dos canicas. Entre 20 casos, existen dos posibles casos en los que la primera y segunda canica que se saquen sean blancas. Por tanto, la probabilidad de obtener dos canicas blancas consecutivas es:
$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

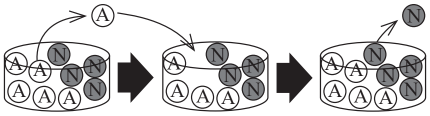
Forma 2.
La siguiente tabla muestra todos los posibles resultados de las dos canicas.

		Segunda canica				
		B1	B2	G1	G2	G3
Primera canica	B1		○	○	○	○
	B2	○		○	○	○
	G1	○	○		○	○
	G2	○	○	○		○
	G3	○	○	○	○	

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 161

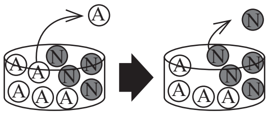
Solucionario de los ejercicios:

1. a.



Se devuelve la primera canica a la caja.
Entonces, cuando se saca la segunda canica, cinco canicas azules y cuatro canicas negras están en la caja.
$P(\text{azul en la primera canica y negra en la segunda canica})$
$= P(\text{azul en la primera canica}) \times P(\text{negra en la segunda canica})$
$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$

b.

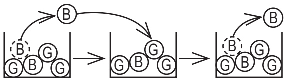


No se devuelve la primera canica a la caja.
Entonces, cuando se saca la segunda canica cuatro canicas azules y cuatro canicas negras están en la caja.
$P(\text{azul en la primera canica y negra en la segunda canica})$
$= P(\text{azul en la primera canica}) \times P(\text{negra en la segunda canica})$
$= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Fecha: dd – mm – aa
6-2-9 Ley del producto

Ⓟ Dos canicas blancas y tres canicas grises están en una caja. Se saca la primera y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos sean blancas?
a. Cuando se devuelve la primera a la caja antes de sacar la segunda.
b. Cuando no se devuelve la primera a la caja antes de sacar la segunda.

Ⓢ a.

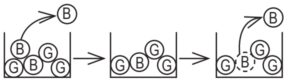


P (blanca en 1 ra.) $= P$ (blanca en 2 da.) $= \frac{2}{5}$

Por tanto, la probabilidad de que las dos sean blancas:P

P (blanca en 1 ra. y blanca en 2 da.) $= \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

b.



Forma 3. P (blanca en 1 ra.) $= \frac{2}{5}$.

P (blanca en 2 da.) $= \frac{1}{4}$

Por tanto, P (blanca en 1 ra. y blanca en 2 da.) $= \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$

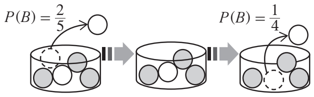
Ⓒ La probabilidad que sucedan dos eventos A y B se encuentra por la multiplicación de la probabilidad de cada evento.
Cuando los eventos A y B son independientes:
$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.
Cuando los eventos son dependientes:
$P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B|A)$.

Ⓔ 1. Cinco canicas azules y cuatro negras están en una caja. Se saca la primera y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea azul y la segunda sea negra?
a. Cuando se devuelve la primera.
P (azul en 1 ra.) $\times P$ (negra en 2 da.) $= \frac{5}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{20}{81}$

b. Cuando no se devuelve la primera.
P (azul en 1 ra.) $\times P$ (negra en 2 da.) $= \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$

Forma 3.

Existen cinco canicas y dos de ellas son blancas.
Entonces, la probabilidad de que la primera canica sea blanca:
$P(\text{blanca en la primera canica}) = \frac{2}{5}$.



Si no se devuelve la primera canica a la caja, la caja tiene una canica blanca y tres canicas grises cuando se saca la segunda canica. Entonces, la probabilidad de que la segunda canica sea blanca:
$P(\text{blanca en la segunda canica}) = \frac{1}{4}$.
Por tanto, la probabilidad de que las dos canicas sean blancas:
$P(\text{blanca en la primera canica y blanca en la segunda canica}) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$.

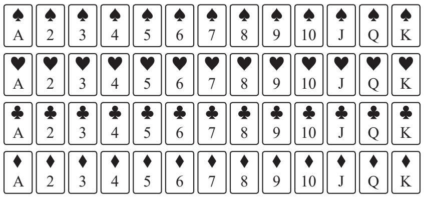
C

La probabilidad que sucedan dos eventos A y B se encuentra por la multiplicación de la probabilidad de A y la probabilidad de B.
Cuando el evento A y el evento B son independientes, la probabilidad de que sucedan ambos A y B es: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$.
Cuando el evento A y B son dependientes, la probabilidad de que sucedan ambos A y B es: $P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B|A)$.

E

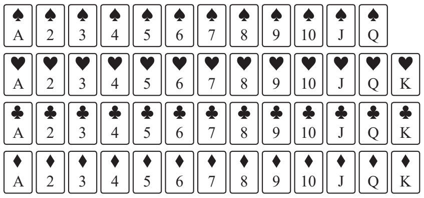
1. Cinco canicas azules y cuatro canicas negras están en una caja. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra. ¿Cuál es la probabilidad de que la primera canica sea azul y la segunda canica sea negra en los siguientes casos?
   a. Se devuelve la primera canica a la caja.
   b. No se devuelve la primera canica a la caja.
2. Se sacan dos cartas al azar de una baraja de 52 cartas.
   ¿Cuál es la probabilidad de que la primera carta sea un rey y la segunda carta sea seis, en los siguientes casos?
   a. Cuando se devuelve la primera carta a la baraja de cartas.
   b. Cuando no se devuelve la primera carta a la baraja de cartas.

2. a. Se devuelve la primera carta a la baraja. Entonces, se saca la segunda carta de una baraja de 52 cartas.



$P(\text{rey en la primera carta y seis en la segunda carta})$
$= P(\text{rey en la primera carta}) \times P(\text{seis en la segunda carta})$
$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{52} = \frac{1}{169}$

b. No se devuelve la primera carta a la baraja. Entonces, se saca la segunda carta de 51 cartas.

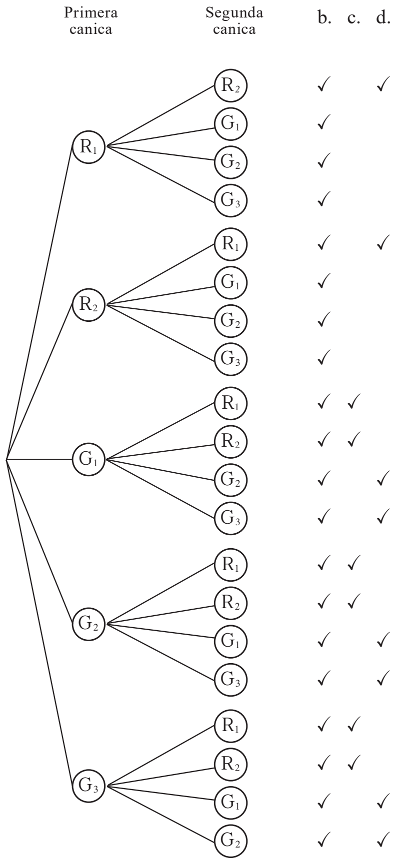


$P(\text{rey en la primera carta y seis en la segunda carta})$
$= P(\text{rey en la primera carta}) \times P(\text{seis en la segunda carta})$
$= \frac{4}{52} \times \frac{4}{51} = \frac{4}{663}$

Complemento de solucionario de los ejercicios

Sección 2, clase 1

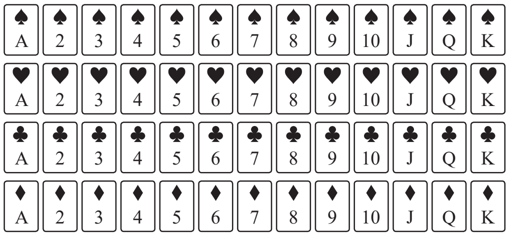
2. a.



b. 20 posibles resultados
c. 6 posibles resultados
d. 8 posibles resultados

Sección 2, clase 4

3.



a. P(la reina de corazones)

$= \frac{\text{(Número de la reina de corazones)}}{\text{(Número total de posibles resultados)}}$

$= \frac{1}{52}$

b. P(un 5)

$= \frac{\text{(Número de un 5)}}{\text{(Número total de posibles resultados)}}$

$= \frac{4}{52}$

$= \frac{1}{13}$

c. P(una de corazón)

$= \frac{\text{(Número de corazones)}}{\text{(Número total de posibles resultados)}}$

$= \frac{13}{52}$

$= \frac{1}{4}$

d. P(una carta roja)

$= \frac{\text{(Número de cartas rojas)}}{\text{(Número total de posibles resultados)}}$

$= \frac{26}{52}$

$= \frac{1}{2}$

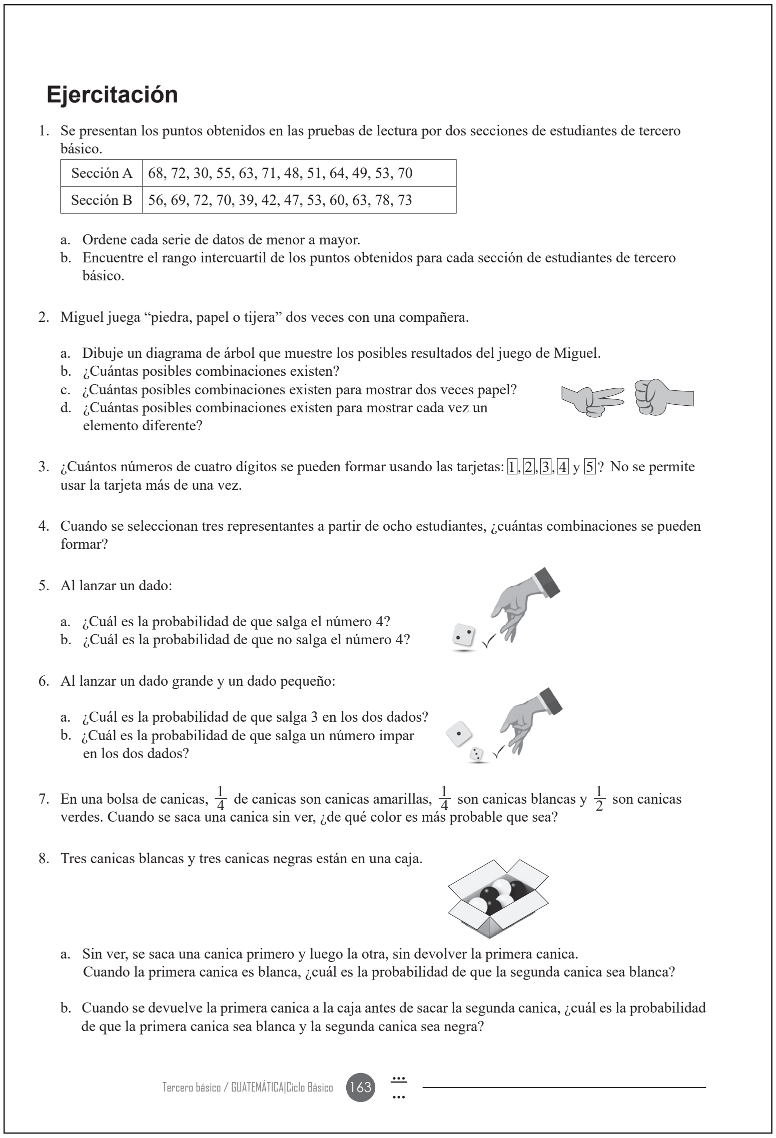
e. P(un rey o una reina)

$= \frac{\text{(Número de un rey y una reina)}}{\text{(Número total de posibles resultados)}}$

$= \frac{8}{52}$

$= \frac{2}{13}$

Ejercitación



Ejercitación

1. Se presentan los puntos obtenidos en las pruebas de lectura por dos secciones de estudiantes de tercero básico.

Sección A	68, 72, 30, 55, 63, 71, 48, 51, 64, 49, 53, 70
Sección B	56, 69, 72, 70, 39, 42, 47, 53, 60, 63, 78, 73

   a. Ordene cada serie de datos de menor a mayor.
   b. Encuentre el rango intercuartil de los puntos obtenidos para cada sección de estudiantes de tercero básico.

2. Miguel juega “piedra, papel o tijera” dos veces con una compañera.
   a. Dibuje un diagrama de árbol que muestre los posibles resultados del juego de Miguel.
   b. ¿Cuántas posibles combinaciones existen?
   c. ¿Cuántas posibles combinaciones existen para mostrar dos veces papel?
   d. ¿Cuántas posibles combinaciones existen para mostrar cada vez un elemento diferente?

3. ¿Cuántos números de cuatro dígitos se pueden formar usando las tarjetas: $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ y $\boxed{5}$? No se permite usar la tarjeta más de una vez.

4. Cuando se seleccionan tres representantes a partir de ocho estudiantes, ¿cuántas combinaciones se pueden formar?

5. Al lanzar un dado:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga el número 4?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que no salga el número 4?

6. Al lanzar un dado grande y un dado pequeño:
   a. ¿Cuál es la probabilidad de que salga 3 en los dos dados?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de que salga un número impar en los dos dados?

7. En una bolsa de canicas, $\frac{1}{4}$ de canicas son canicas amarillas, $\frac{1}{4}$ son canicas blancas y $\frac{1}{2}$ son canicas verdes. Cuando se saca una canica sin ver, ¿de qué color es más probable que sea?

8. Tres canicas blancas y tres canicas negras están en una caja.
   a. Sin ver, se saca una canica primero y luego la otra, sin devolver la primera canica. Cuando la primera canica es blanca, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda canica sea blanca?
   b. Cuando se devuelve la primera canica a la caja antes de sacar la segunda canica, ¿cuál es la probabilidad de que la primera canica sea blanca y la segunda canica sea negra?

Solucionario:

1. a. Sección A: 30, 48, 49, 51, 53, 55, 63, 64, 68, 70, 71, 72

   Sección B: 39, 42, 47, 53, 56, 60, 63, 69, 70, 72, 73, 78

   b. Sección A:

$$30\ \ 48\ \ 49 \underset{Q_1}{\Big|} 51\ \ 53\ \ 55 \underset{Q_2}{\Big|} 63\ \ 64\ \ 68 \underset{Q_3}{\Big|} 70\ \ 71\ \ 72$$

$$Q_1 = \frac{49+51}{2} = 50$$

$$Q_2 = \frac{55+63}{2} = 59$$

$$Q_3 = \frac{68+70}{2} = 69$$

$$Q_3 - Q_1 = 69 - 50 = 19$$

   R: El rango intercuartil de la sección A es 19 puntos.

   Sección B:

$$39\ \ 42\ \ 47 \underset{Q_1}{\Big|} 53\ \ 56\ \ 60 \underset{Q_2}{\Big|} 63\ \ 69\ \ 70 \underset{Q_3}{\Big|} 72\ \ 73\ \ 78$$

$$Q_1 = \frac{47+53}{2} = 50$$

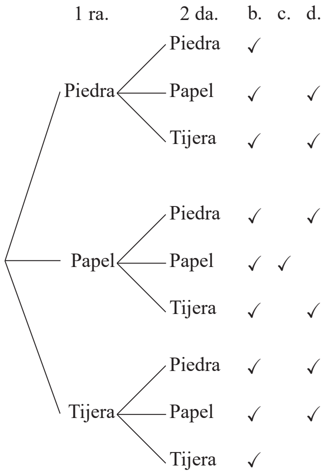
$$Q_2 = \frac{60+63}{2} = 61.5$$

$$Q_3 = \frac{70+72}{2} = 71$$

$$Q_3 - Q_1 = 71 - 50 = 21$$

   R: El rango intercuartil de la sección B es 21 puntos.

2. a.



   b. 9 posibles combinaciones
   c. 1 posible combinación
   d. 6 posibles combinaciones

3. $P = 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$

   R: 120 números

4. $C = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56$

   R: 56 números

5. a. $P(4) = \frac{1}{6}$

   b.
$$\begin{aligned} P\,(\text{no salga } 4) &= 1 - P(4) \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6} \end{aligned}$$

6. a. $P(3 \text{ en los dos dados})$

$= P(3 \text{ en dado grande}) \times P(3 \text{ en dado pequeño})$

$= \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$

(*Solución alternativa*)

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	X	X	X	X	X	X
	2	X	X	X	X	X	X
	3	X	X	✓	X	X	X
	4	X	X	X	X	X	X
	5	X	X	X	X	X	X
	6	X	X	X	X	X	X

Entonces, $P(3 \text{ en los dos dados}) = \frac{1}{36}$.

b. $P(\text{un número impar en los dos dados})$

$= P(\text{un número impar en dado grande})$

$\times P(\text{un número impar en dado pequeño})$

$= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

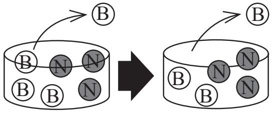
(*Solución alternativa*)

		Dado pequeño					
		1	2	3	4	5	6
Dado grande	1	✓	X	✓	X	✓	X
	2	X	X	X	X	X	X
	3	✓	X	✓	X	✓	X
	4	X	X	X	X	X	X
	5	✓	X	✓	X	✓	X
	6	X	X	X	X	X	X

Entonces, $P(\text{un número impar en los dos dados}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.

7. Verdes

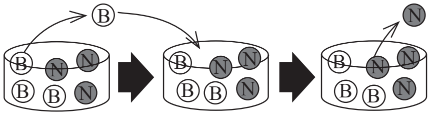
8. a. Después de sacar una canica blanca, dos canicas blancas y tres canicas negras se quedan en la caja.



$P(\text{blanca en la segunda canica} \mid \text{blanca en la primera canica})$

$= \frac{2}{5}$

b. Se devuelve la primera canica a la caja. Entonces, cuando se saca la segunda canica tres canicas blancas y tres canicas negras están en la caja.



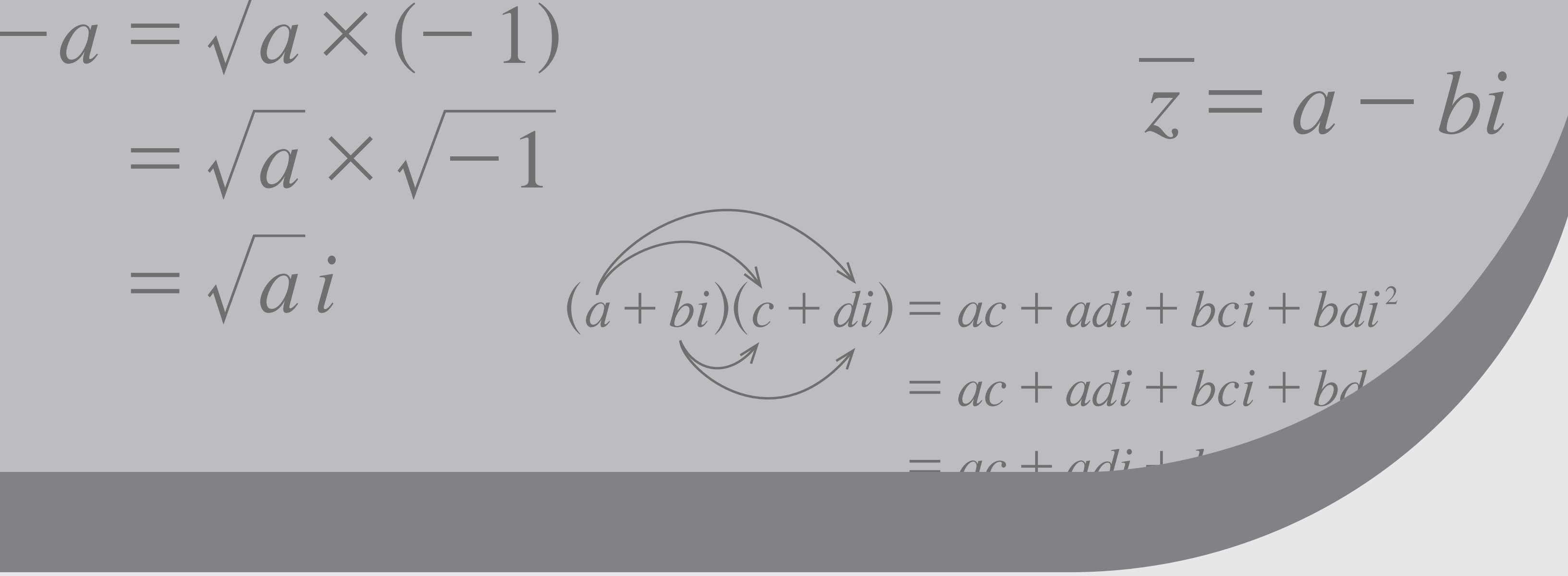
$P(\text{blanca en la primera canica y negra en la segunda canica})$

$= P(\text{blanca en la primera canica}) \times P(\text{negra en la segunda canica})$

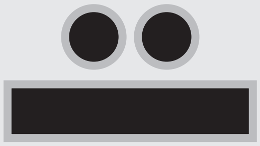
$= \frac{3}{6} \times \frac{3}{6}$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{4}$



Unidad 7



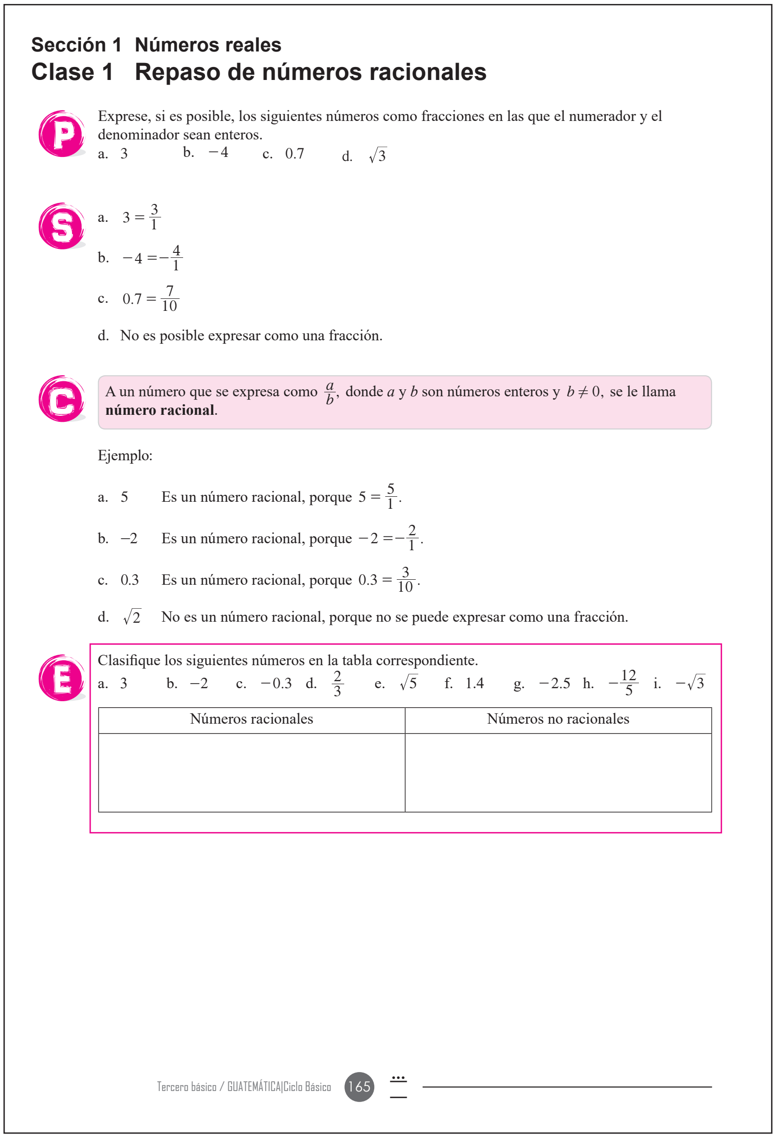
Aritmética

Plan de estudio - Unidad 7 Aritmética -

Competencia	**Indicador de logro**	**Sección**	**Clase**	**Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)**
3. Aplica las propiedades de las operaciones en los conjuntos numéricos reales y complejos.	3.1 Identifica las propiedades y sus relaciones en el conjunto de los números reales.	1. Números reales	1.1 Repaso de números racionales	Clasifica los números en racionales y no racionales.
			1.2 Repaso de números irracionales	Clasifica los números en racionales e irracionales.
			1.3 Números reales	Clasifica los números reales en naturales, enteros, racionales e irracionales.
	3.2 Describe el conjunto de los números complejos y su relación con los números reales.	2. Números complejos	2.1 Unidad imaginaria	Expresa la raíz cuadrada de un número negativo usando la unidad imaginaria i.
			2.2 Parte real y parte imaginaria	Identifica la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.
			2.3 Módulo de un número complejo	Encuentra el módulo de un número complejo.
			2.4 Suma y resta de números complejos	Suma números complejos. Resta números complejos.
			2.5 Opuesto de un número complejo	Encuentra el opuesto de un número complejo.
			2.6 Conjugado de un número complejo	Encuentra el conjugado de un número complejo.
			2.7 Multiplicación de números complejos	Multiplica números complejos.
			2.8 División de números complejos	Divide números complejos.

Sección 1 Números reales
Clase 1 Repaso de números racionales

Aprendizaje esperado:
Clasifica los números en racionales y no racionales.



Sección 1 Números reales
Clase 1 Repaso de números racionales

P Exprese, si es posible, los siguientes números como fracciones en las que el numerador y el denominador sean enteros.
a. 3 b. -4 c. 0.7 d. $\sqrt{3}$

S
a. $3=\frac{3}{1}$
b. $-4=-\frac{4}{1}$
c. $0.7=\frac{7}{10}$
d. No es posible expresar como una fracción.

C A un número que se expresa como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$, se le llama **número racional**.

Ejemplo:

a. 5 Es un número racional, porque $5=\frac{5}{1}$.
b. -2 Es un número racional, porque $-2=-\frac{2}{1}$.
c. 0.3 Es un número racional, porque $0.3=\frac{3}{10}$.
d. $\sqrt{2}$ No es un número racional, porque no se puede expresar como una fracción.

E Clasifique los siguientes números en la tabla correspondiente.
a. 3 b. -2 c. -0.3 d. $\frac{2}{3}$ e. $\sqrt{5}$ f. 1.4 g. -2.5 h. $-\frac{12}{5}$ i. $-\sqrt{3}$

Números racionales	Números no racionales

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 165

Solucionario del ejercicio:

Números racionales	Números no racionales
a. 3 b. -2 c. -0.3 d. $\frac{2}{3}$ f. 1.4 g. -2.5 h. $-\frac{12}{5}$	e. $\sqrt{5}$ i. $-\sqrt{3}$

Fecha: dd – mm – aa
7-1-1 Repaso de números racionales

Ⓟ Exprese los números como fracciones en las que el numerador y el denominador sean enteros.

a. 3 b. -4 c. 0.7 d. $\sqrt{3}$

Ⓢ a. $3=\frac{3}{1}$
b. $-4=-\frac{4}{1}$
c. $0.7=\frac{7}{10}$
d. No es posible expresar como una fracción.

Ⓒ A un número que se expresa como $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros y $b \neq 0$, se le llama número racional.

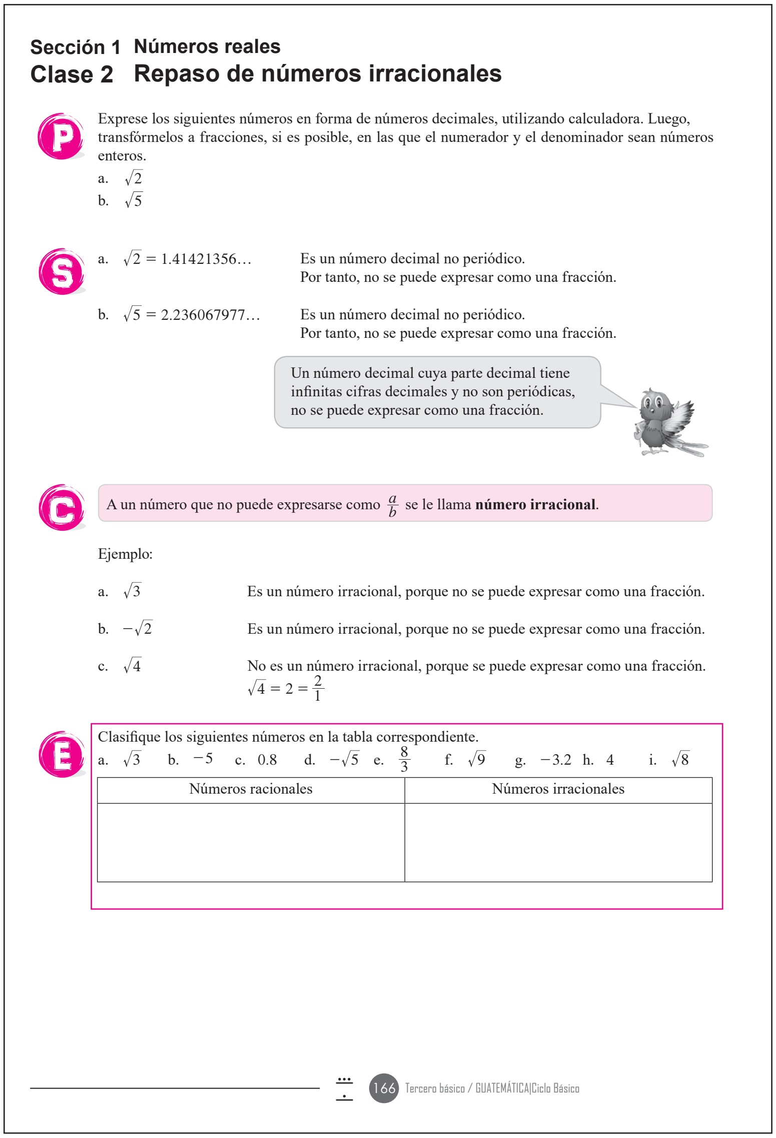
Ejemplo:
a. 5 Es un número racional: $5=\frac{5}{1}$
b. -2 Es un número racional: $-2=\frac{2}{1}$
c. 0.3 Es un número racional: $0.3=\frac{3}{10}$
d. $\sqrt{2}$ No es un número racional, porque no se puede expresar como una fracción.

Ⓔ Clasifique.

Números racionales	Números no racionales
3 -2 -0.3 $\frac{2}{3}$ 1.4 -2.5 $-\frac{12}{5}$	$\sqrt{5}$ $-\sqrt{3}$

Sección 1 Números reales
Clase 2 Repaso de números irracionales

Aprendizaje esperado:
Clasifica los números en racionales e irracionales.



Sección 1 **Números reales**
Clase 2 **Repaso de números irracionales**

P Exprese los siguientes números en forma de números decimales, utilizando calculadora. Luego, transfórmelos a fracciones, si es posible, en las que el numerador y el denominador sean números enteros.

a. $\sqrt{2}$
b. $\sqrt{5}$

S

a.	$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$	Es un número decimal no periódico. Por tanto, no se puede expresar como una fracción.
b.	$\sqrt{5} = 2.236067977\ldots$	Es un número decimal no periódico. Por tanto, no se puede expresar como una fracción.

Un número decimal cuya parte decimal tiene infinitas cifras decimales y no son periódicas, no se puede expresar como una fracción.

C A un número que no puede expresarse como $\frac{a}{b}$ se le llama **número irracional**.

Ejemplo:

a.	$\sqrt{3}$	Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
b.	$-\sqrt{2}$	Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
c.	$\sqrt{4}$	No es un número irracional, porque se puede expresar como una fracción. $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$

E Clasifique los siguientes números en la tabla correspondiente.

a. $\sqrt{3}$ b. -5 c. 0.8 d. $-\sqrt{5}$ e. $\frac{8}{3}$ f. $\sqrt{9}$ g. -3.2 h. 4 i. $\sqrt{8}$

Números racionales	Números irracionales

166 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario del ejercicio:

Números racionales	Números irracionales
b. -5 c. 0.8 e. $\frac{8}{3}$ f. $\sqrt{9}(=3)$ g. -3.2 h. 4	a. $\sqrt{3}$ d. $-\sqrt{5}$ i. $\sqrt{8}$

Fecha: dd – mm – aa
7-1-2 Repaso de números irracionales

Ⓟ Exprese los números en forma decimal. Luego, transfórmelos a fracciones, si es posible.

a. $\sqrt{2}$
b. $\sqrt{5}$

Ⓢ

a.	$\sqrt{2} = 1.41421356\ldots$	Es un número decimal no periódico. Por tanto, no se puede expresar como una fracción.
b.	$\sqrt{5} = 2.236067977\ldots$	Es un número decimal no periódico. Por tanto, no se puede expresar como una fracción.

Un número cuya parte decimal tiene infinitas cifras y no son periódicas, no se puede expresar como una fracción.

Ⓒ A un número que no puede expresarse como $\frac{a}{b}$ se le llama número irracional.

Ejemplo:

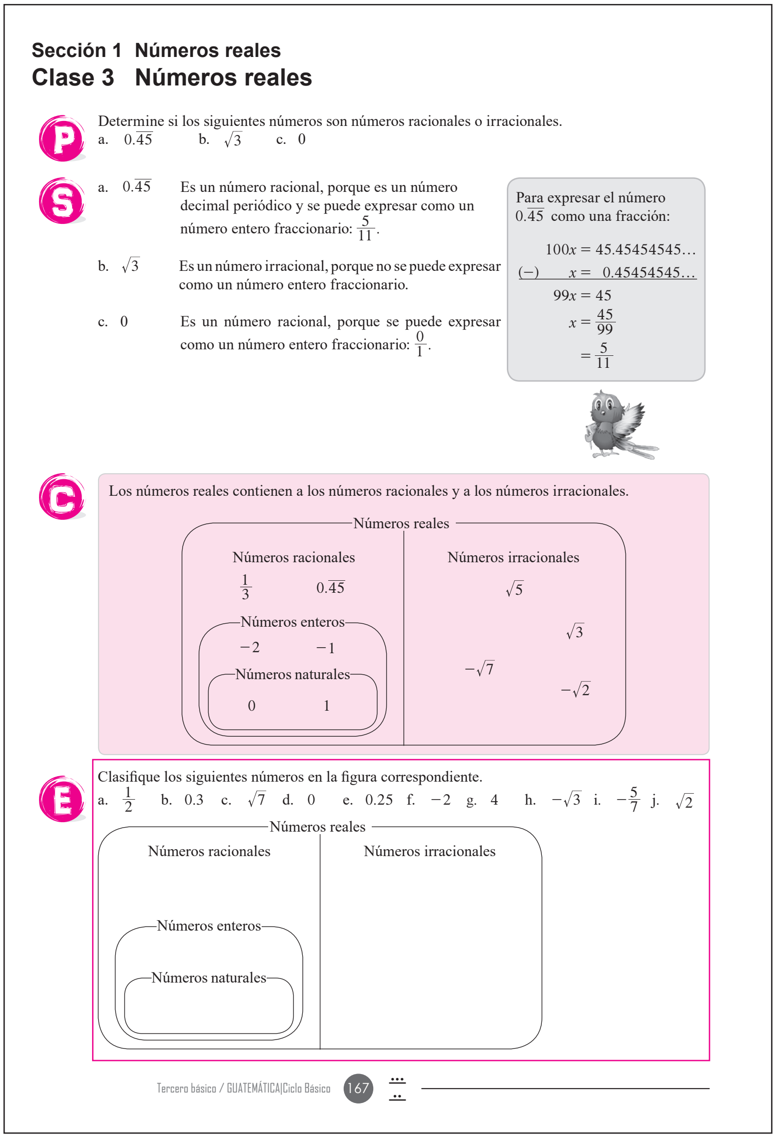
a.	$\sqrt{3}$	Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
b.	$-\sqrt{2}$	Es un número irracional, porque no se puede expresar como una fracción.
c.	$\sqrt{4}$	No es un número irracional. $\sqrt{4} = 2 = \frac{2}{1}$

Ⓔ Clasifique.

Números racionales	Números irracionales
-5 0.8 $\frac{8}{3}$ $\sqrt{9}(=3)$ -3.2 4	$\sqrt{3}$ $-\sqrt{5}$ $\sqrt{8}$

Sección 1 Números reales
Clase 3 Números reales

Aprendizaje esperado:
Clasifica los números reales en naturales, enteros, racionales e irracionales.



Sección 1 Números reales
Clase 3 Números reales

P Determine si los siguientes números son números racionales o irracionales.
a. $0.\overline{45}$ b. $\sqrt{3}$ c. 0

S a. $0.\overline{45}$ Es un número racional, porque es un número decimal periódico y se puede expresar como un número entero fraccionario: $\frac{5}{11}$.

b. $\sqrt{3}$ Es un número irracional, porque no se puede expresar como un número entero fraccionario.

c. 0 Es un número racional, porque se puede expresar como un número entero fraccionario: $\frac{0}{1}$.

Para expresar el número $0.\overline{45}$ como una fracción:

$$\begin{aligned} 100x &= 45.45454545\ldots \\ (-)\quad x &= 0.45454545\ldots \\ \hline 99x &= 45 \\ x &= \frac{45}{99} \\ &= \frac{5}{11} \end{aligned}$$

C Los números reales contienen a los números racionales y a los números irracionales.

Números reales
Números racionales: $\frac{1}{3}$ $0.\overline{45}$
Números enteros: -2 -1
Números naturales: 0 1
Números irracionales: $\sqrt{5}$ $\sqrt{3}$ $-\sqrt{7}$ $-\sqrt{2}$

E Clasifique los siguientes números en la figura correspondiente.
a. $\frac{1}{2}$ b. 0.3 c. $\sqrt{7}$ d. 0 e. 0.25 f. -2 g. 4 h. $-\sqrt{3}$ i. $-\frac{5}{7}$ j. $\sqrt{2}$

Números reales
Números racionales
Números enteros
Números naturales
Números irracionales

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 167

Solucionario del ejercicio:

Números reales
Números racionales: a. $\frac{1}{2}$ b. 0.3 e. 0.25 i. $-\frac{5}{7}$
Números enteros: f. -2
Números naturales: d. 0 g. 4
Números irracionales: c. $\sqrt{7}$ h. $-\sqrt{3}$ j. $\sqrt{2}$

Fecha: dd – mm – aa
7-1-3 Números reales

Ⓟ Determine si los números son números racionales o irracionales.

a. $0.\overline{45}$ b. $\sqrt{3}$ c. 0

Ⓢ a. $0.\overline{45}$ Es un número racional, porque se puede expresar como: $\frac{5}{11}$.

b. $\sqrt{3}$ Es un número irracional, porque no se puede expresar como un número entero fraccionario.

c. 0 Es un número racional, porque se puede expresar como: $\frac{0}{1}$.

Para expresar el número $0.\overline{45}$ como una fracción:

$$\begin{aligned} 100x &= 45.45454545\ldots \\ (-)\quad x &= 0.45454545\ldots \\ \hline 99x &= 45 \\ x &= \frac{45}{99} \\ &= \frac{5}{11} \end{aligned}$$

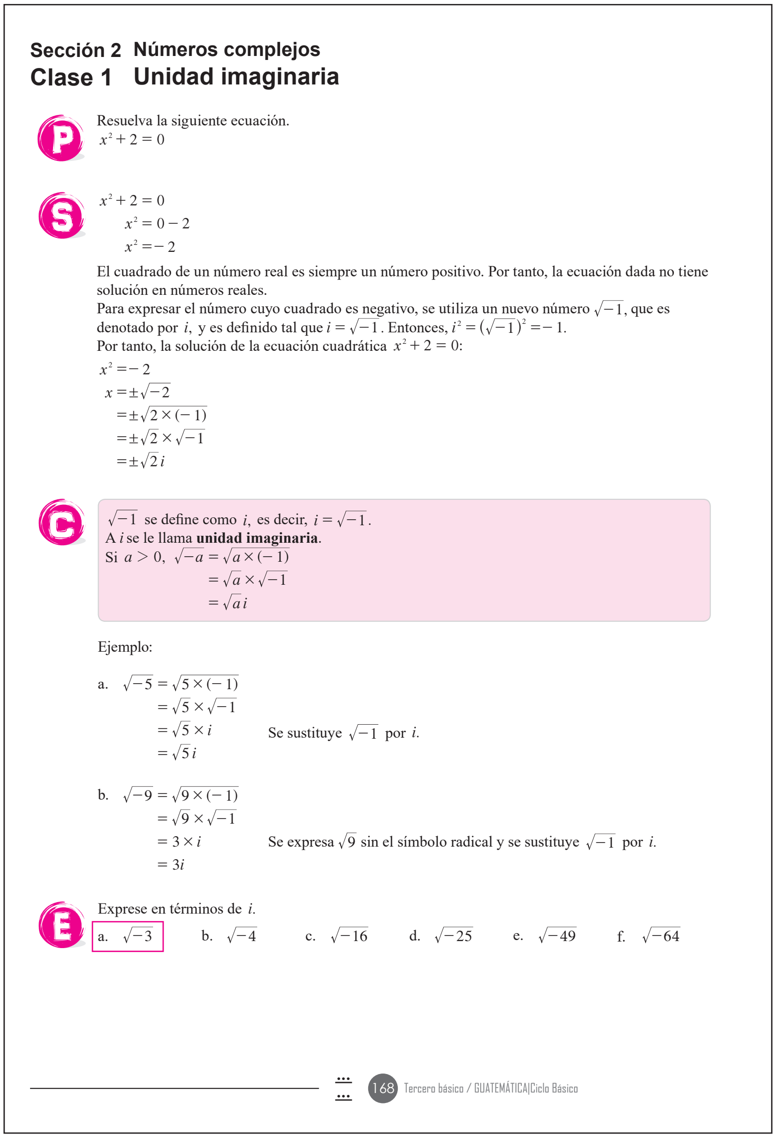
Ⓒ Números reales
Números racionales: $\frac{1}{3}$ $0.\overline{45}$
Números enteros: -2 -1
Números naturales: 0 1
Números irracionales: $\sqrt{5}$ $\sqrt{3}$ $-\sqrt{7}$ $-\sqrt{2}$

Ⓔ Clasifique.

Números reales
Números racionales: $\frac{1}{2}$ 0.3 0.25 $-\frac{5}{7}$
Números enteros: -2
Números naturales: 0 4
Números irracionales: $\sqrt{7}$ $-\sqrt{3}$ $\sqrt{2}$

Sección 2 Números complejos
Clase 1 Unidad imaginaria

Aprendizaje esperado:
Expresa la raíz cuadrada de un número negativo usando la unidad imaginaria *i*.



Sección 2 Números complejos

Clase 1 Unidad imaginaria

P Resuelva la siguiente ecuación.
$x^2+2=0$

S $x^2+2=0$
$x^2=0-2$
$x^2=-2$

El cuadrado de un número real es siempre un número positivo. Por tanto, la ecuación dada no tiene solución en números reales.
Para expresar el número cuyo cuadrado es negativo, se utiliza un nuevo número $\sqrt{-1}$, que es denotado por i, y es definido tal que $i=\sqrt{-1}$. Entonces, $i^2=(\sqrt{-1})^2=-1$.
Por tanto, la solución de la ecuación cuadrática $x^2+2=0$:

$$\begin{aligned} x^2&=-2\\ x&=\pm\sqrt{-2}\\ &=\pm\sqrt{2\times(-1)}\\ &=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{-1}\\ &=\pm\sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

C $\sqrt{-1}$ se define como i, es decir, $i=\sqrt{-1}$.
A i se le llama **unidad imaginaria**.
Si $a>0$, $\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}$
$=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{a}\,i$

Ejemplo:

a. $\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}$
$=\sqrt{5}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{5}\times i$ Se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.
$=\sqrt{5}\,i$

b. $\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$
$=3\times i$ Se expresa $\sqrt{9}$ sin el símbolo radical y se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.
$=3i$

E Exprese en términos de i.
a. $\sqrt{-3}$ b. $\sqrt{-4}$ c. $\sqrt{-16}$ d. $\sqrt{-25}$ e. $\sqrt{-49}$ f. $\sqrt{-64}$

168 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $\sqrt{-3}=\sqrt{3\times(-1)}=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}=\sqrt{3}\times i=\sqrt{3}\,i$
b. $\sqrt{-4}=\sqrt{4\times(-1)}=\sqrt{4}\times\sqrt{-1}=2\times i=2i$
c. $\sqrt{-16}=\sqrt{16\times(-1)}=\sqrt{16}\times\sqrt{-1}=4\times i=4i$
d. $\sqrt{-25}=\sqrt{25\times(-1)}=\sqrt{25}\times\sqrt{-1}=5\times i=5i$
e. $\sqrt{-49}=\sqrt{49\times(-1)}=\sqrt{49}\times\sqrt{-1}=7\times i=7i$
f. $\sqrt{-64}=\sqrt{64\times(-1)}=\sqrt{64}\times\sqrt{-1}=8\times i=8i$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-1 Unidad imaginaria

Ⓟ Resuelva.
$x^2+2=0$

Ⓢ $x^2+2=0$
$x^2=0-2$
$x^2=-2$

Para expresar el número cuyo cuadrado es negativo, se utiliza un nuevo número $\sqrt{-1}$, que es denotado por i.

$x=\pm\sqrt{-2}$
$=\pm\sqrt{2\times(-1)}$
$=\pm\sqrt{2}\times\sqrt{-1}$ Se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.
$=\pm\sqrt{2}\,i$

Ⓒ $\sqrt{-1}$ se define como i, es decir, $i=\sqrt{-1}$.
A i se le llama unidad imaginaria.
Si $a>0$, $\sqrt{-a}=\sqrt{a\times(-1)}$
$=\sqrt{a}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{a}\,i$

Ejemplo:

a. $\sqrt{-5}=\sqrt{5\times(-1)}$
$=\sqrt{5}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{5}\times i$ Se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.
$=\sqrt{5}\,i$

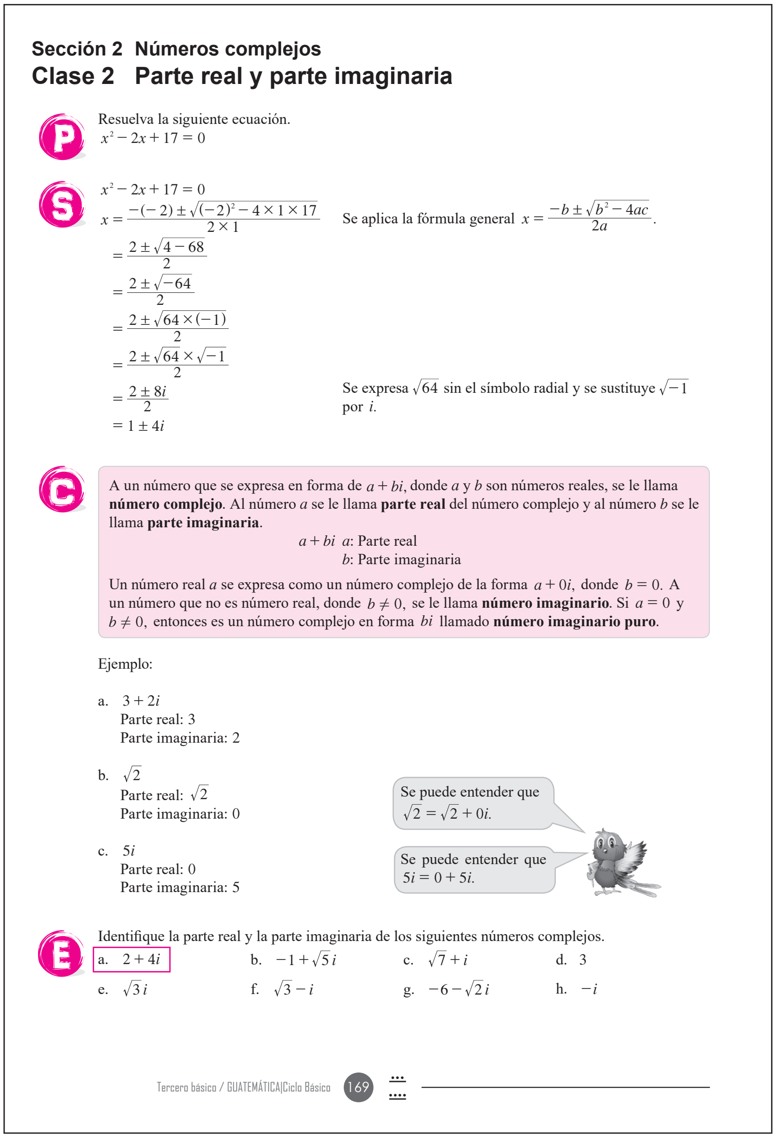
b. $\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$
$=3\times i$ Se expresa $\sqrt{9}$ sin el símbolo radical y se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.
$=3i$

Ⓔ Exprese en términos de i.
a. $\sqrt{-3}=\sqrt{3\times(-1)}$
$=\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{3}\times i$
$=\sqrt{3}\,i$

Unidad 7
Aritmética

Sección 2 Números complejos
Clase 2 Parte real y parte imaginaria

Aprendizaje esperado:
Identifica la parte real y la parte imaginaria de un número complejo.



Sección 2 Números complejos
Clase 2 Parte real y parte imaginaria

P Resuelva la siguiente ecuación.
$x^2 - 2x + 17 = 0$

S
$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 17 = 0\\
&x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 17}}{2 \times 1}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{64 \times (-1)}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{-1}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm 8i}{2}\\
&\quad = 1 \pm 4i
\end{aligned}
$$

Se aplica la fórmula general $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Se expresa $\sqrt{64}$ sin el símbolo radial y se sustituye $\sqrt{-1}$ por i.

C A un número que se expresa en forma de $a + bi$, donde a y b son números reales, se le llama **número complejo**. Al número a se le llama **parte real** del número complejo y al número b se le llama **parte imaginaria**.

$a + bi$ a: Parte real
b: Parte imaginaria

Un número real a se expresa como un número complejo de la forma $a + 0i$, donde $b = 0$. A un número que no es número real, donde $b \neq 0$, se le llama **número imaginario**. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces es un número complejo en forma bi llamado **número imaginario puro**.

Ejemplo:

a. $3 + 2i$
Parte real: 3
Parte imaginaria: 2

b. $\sqrt{2}$
Parte real: $\sqrt{2}$
Parte imaginaria: 0

c. $5i$
Parte real: 0
Parte imaginaria: 5

Se puede entender que $\sqrt{2} = \sqrt{2} + 0i$.

Se puede entender que $5i = 0 + 5i$.

E Identifique la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos.

a. $2 + 4i$ b. $-1 + \sqrt{5}\,i$ c. $\sqrt{7} + i$ d. 3
e. $\sqrt{3}\,i$ f. $\sqrt{3} - i$ g. $-6 - \sqrt{2}\,i$ h. $-i$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 169

Solucionario de los ejercicios:

	Parte real	Parte imaginaria
a.	2	4
b.	− 1	$\sqrt{5}$
c.	$\sqrt{7}$	1
d.	3	0
e.	0	$\sqrt{3}$
f.	$\sqrt{3}$	− 1
g.	− 6	$-\sqrt{2}$
h.	0	− 1

Fecha: dd – mm – aa
7-2-2 Parte real y parte imaginaria

Ⓟ Resuelva.
$x^2 - 2x + 17 = 0$

Ⓢ
$$
\begin{aligned}
&x^2 - 2x + 17 = 0\\
&x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 17}}{2 \times 1}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 68}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{-64}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{64 \times (-1)}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{-1}}{2}\\
&\quad = \frac{2 \pm 8i}{2}\\
&\quad = 1 \pm 4i
\end{aligned}
$$

Ⓒ A un número que se expresa en forma de $a + bi$, donde a y b son números reales, se le llama número complejo.
$a + bi$ a: Parte real
b: Parte imaginaria

Si $b = 0$, es un número real.
Si $b \neq 0$, es un número imaginario.
Si $a = 0$ y $b \neq 0$, es un número imaginario puro.

Ejemplo:
a. $3 + 2i$
Parte real: 3
Parte imaginaria: 2

b. $\sqrt{2}$
Parte real: $\sqrt{2}$
Parte imaginaria: 0

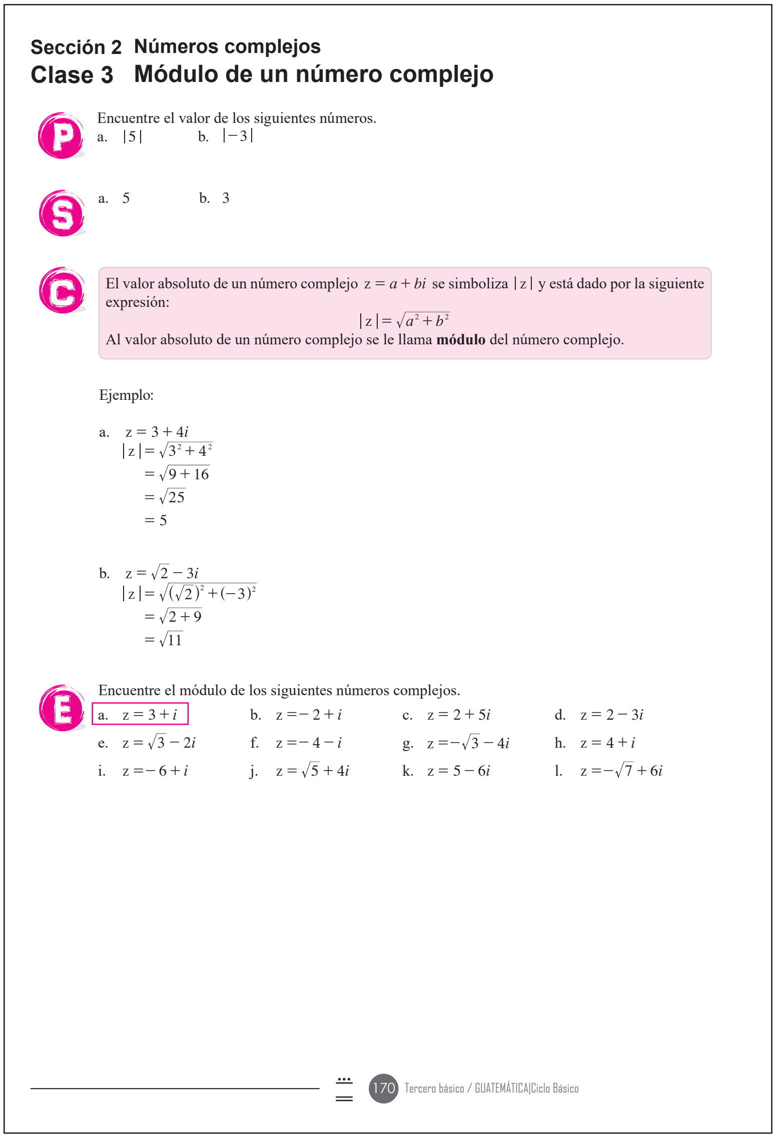
c. $5i$
Parte real: 0
Parte imaginaria: 5

Ⓔ Identifique la parte real y la parte imaginaria.

a. $2 + 4i$
Parte real: 2
Parte imaginaria: 4

Sección 2 Números complejos
Clase 3 Módulo de un número complejo

Aprendizaje esperado:
Encuentra el módulo de un número complejo.



Sección 2 Números complejos
Clase 3 Módulo de un número complejo

P Encuentre el valor de los siguientes números.
a. $|5|$ b. $|-3|$

S a. 5 b. 3

C El valor absoluto de un número complejo $z=a+bi$ se simboliza $|z|$ y está dado por la siguiente expresión:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Al valor absoluto de un número complejo se le llama **módulo** del número complejo.

Ejemplo:

a. $z=3+4i$

$$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{3^2+4^2}\\&=\sqrt{9+16}\\&=\sqrt{25}\\&=5\end{aligned}$$

b. $z=\sqrt{2}-3i$

$$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{2+9}\\&=\sqrt{11}\end{aligned}$$

E Encuentre el módulo de los siguientes números complejos.

a. $z=3+i$ b. $z=-2+i$ c. $z=2+5i$ d. $z=2-3i$
e. $z=\sqrt{3}-2i$ f. $z=-4-i$ g. $z=-\sqrt{3}-4i$ h. $z=4+i$
i. $z=-6+i$ j. $z=\sqrt{5}+4i$ k. $z=5-6i$ l. $z=-\sqrt{7}+6i$

Solucionario de los ejercicios:

a. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{3^2+1^2}\\&=\sqrt{9+1}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(-2)^2+1^2}\\&=\sqrt{4+1}\\&=\sqrt{5}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{2^2+5^2}\\&=\sqrt{4+25}\\&=\sqrt{29}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{2^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{4+9}\\&=\sqrt{13}\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(-2)^2}\\&=\sqrt{3+4}\\&=\sqrt{7}\end{aligned}$$

f. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(-4)^2+(-1)^2}\\&=\sqrt{16+1}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

g. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-4)^2}\\&=\sqrt{3+16}\\&=\sqrt{19}\end{aligned}$$

h. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{4^2+1^2}\\&=\sqrt{16+1}\\&=\sqrt{17}\end{aligned}$$

i. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(-6)^2+1^2}\\&=\sqrt{36+1}\\&=\sqrt{37}\end{aligned}$$

j. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(\sqrt{5})^2+4^2}\\&=\sqrt{5+16}\\&=\sqrt{21}\end{aligned}$$

k. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{5^2+(-6)^2}\\&=\sqrt{25+36}\\&=\sqrt{61}\end{aligned}$$

l. $$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(-\sqrt{7})^2+6^2}\\&=\sqrt{7+36}\\&=\sqrt{43}\end{aligned}$$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-3 Módulo de un número complejo

Ⓟ Encuentre el valor de los números.
a. $|5|$
b. $|-3|$

Ⓢ a. 5
b. 3

Ⓒ El valor absoluto de un número complejo $z=a+bi$ se simboliza $|z|$ y está dado por:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

Al valor absoluto de un número complejo se le llama módulo del número complejo.

Ejemplo:

a. $z=3+4i$

$$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{3^2+4^2}\\&=\sqrt{9+16}\\&=\sqrt{25}\\&=5\end{aligned}$$

b. $z=\sqrt{2}-3i$

$$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-3)^2}\\&=\sqrt{2+9}\\&=\sqrt{11}\end{aligned}$$

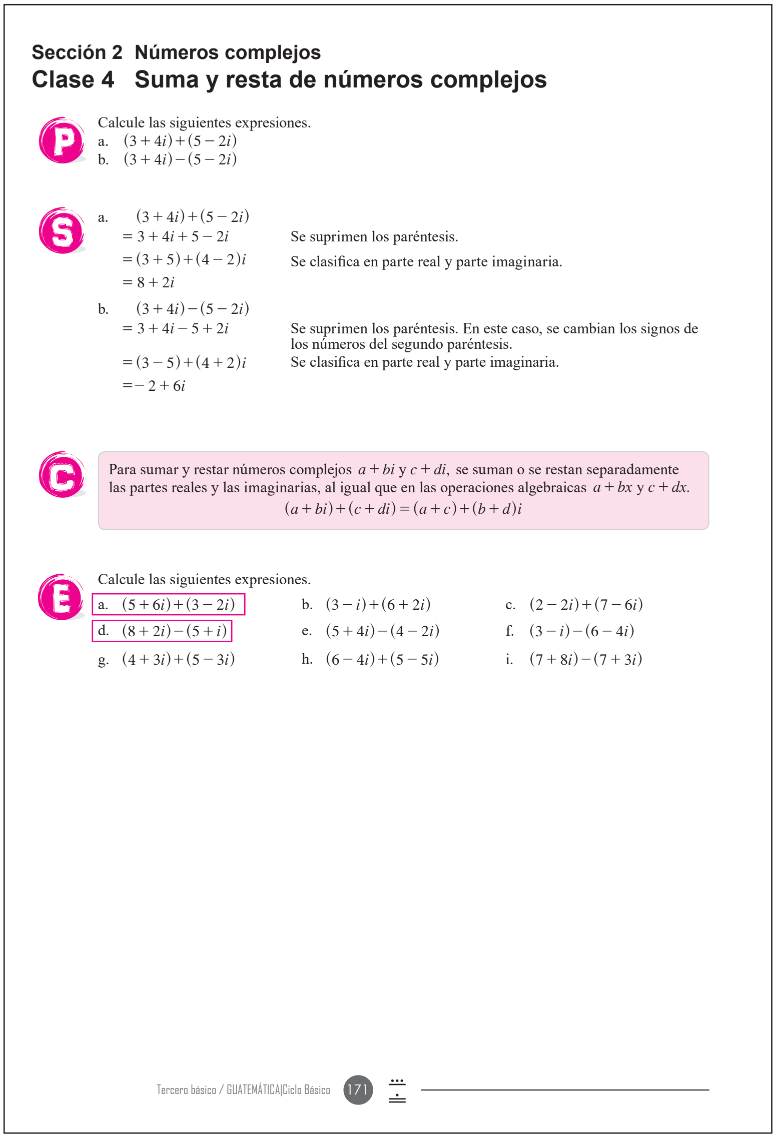
Ⓔ Encuentre el módulo.

a. $z=3+i$

$$\begin{aligned}|z|&=\sqrt{3^2+1^2}\\&=\sqrt{9+1}\\&=\sqrt{10}\end{aligned}$$

Sección 2 Números complejos
Clase 4 Suma y resta de números complejos

Aprendizaje esperado:
Suma números complejos.
Resta números complejos.



Sección 2 Números complejos
Clase 4 Suma y resta de números complejos

P Calcule las siguientes expresiones.
a. $(3+4i)+(5-2i)$
b. $(3+4i)-(5-2i)$

S a. $(3+4i)+(5-2i)$
$= 3+4i+5-2i$ Se suprimen los paréntesis.
$= (3+5)+(4-2)i$ Se clasifica en parte real y parte imaginaria.
$= 8+2i$

b. $(3+4i)-(5-2i)$
$= 3+4i-5+2i$ Se suprimen los paréntesis. En este caso, se cambian los signos de los números del segundo paréntesis.
$= (3-5)+(4+2)i$ Se clasifica en parte real y parte imaginaria.
$=-2+6i$

C Para sumar y restar números complejos $a+bi$ y $c+di$, se suman o se restan separadamente las partes reales y las imaginarias, al igual que en las operaciones algebraicas $a+bx$ y $c+dx$.

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$$

E Calcule las siguientes expresiones.
a. $(5+6i)+(3-2i)$ b. $(3-i)+(6+2i)$ c. $(2-2i)+(7-6i)$
d. $(8+2i)-(5+i)$ e. $(5+4i)-(4-2i)$ f. $(3-i)-(6-4i)$
g. $(4+3i)+(5-3i)$ h. $(6-4i)+(5-5i)$ i. $(7+8i)-(7+3i)$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 171

Solucionario de los ejercicios:

a. $(5+6i)+(3-2i) = 5+6i+3-2i$
$= (5+3)+(6-2)i$
$= 8+4i$

b. $(3-i)+(6+2i) = 3-i+6+2i$
$= (3+6)+(-1+2)i$
$= 9+i$

c. $(2-2i)+(7-6i) = 2-2i+7-6i$
$= (2+7)+(-2-6)i$
$= 9-8i$

d. $(8+2i)-(5+i) = 8+2i-5-i$
$= (8-5)+(2-1)i$
$= 3+i$

e. $(5+4i)-(4-2i) = 5+4i-4+2i$
$= (5-4)+(4+2)i$
$= 1+6i$

f. $(3-i)-(6-4i) = 3-i-6+4i$
$= (3-6)+(-1+4)i$
$=-3+3i$

g. $(4+3i)+(5-3i) = 4+3i+5-3i$
$= (4+5)+(3-3)i$
$= 9$

h. $(6-4i)+(5-5i) = 6-4i+5-5i$
$= (6+5)+(-4-5)i$
$= 11-9i$

i. $(7+8i)-(7+3i) = 7+8i-7-3i$
$= (7-7)+(8-3)i$
$= 5i$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-4 Suma y resta de números complejos

Ⓟ Calcule.
a. $(3+4i)+(5-2i)$
b. $(3+4i)-(5-2i)$

Ⓢ a. $(3+4i)+(5-2i)$
$= 3+4i+5-2i$
$= (3+5)+(4-2)i$ Se clasifica en parte real y parte imaginaria.
$= 8+2i$

b. $(3+4i)-(5-2i)$
$= 3+4i-5+2i$ Se cambian los signos de los números del segundo paréntesis.
$= (3-5)+(4+2)i$ Se clasifica en parte real y parte imaginaria.
$=-2+6i$

Ⓒ Para sumar y restar números complejos $a+bi$ y $c+di$, se suman o se restan separadamente las partes reales y las imaginarias.
$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$

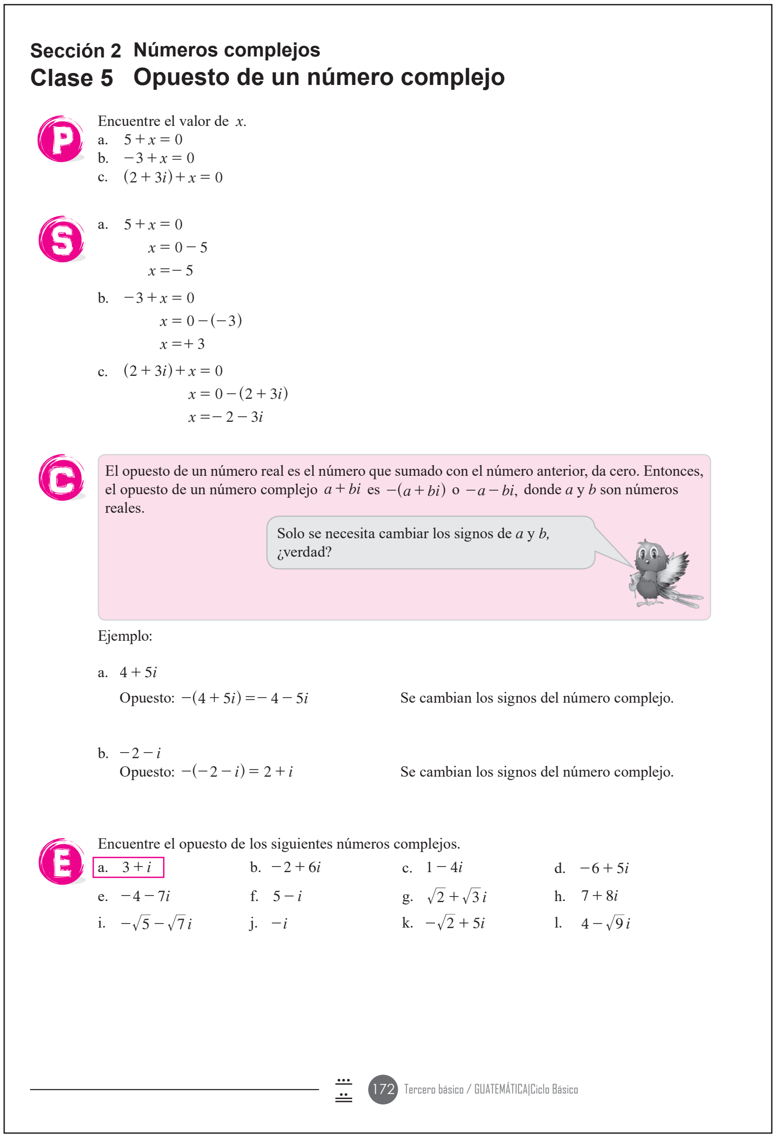
Ⓔ Calcule.

a. $(5+6i)+(3-2i)$
$= 5+6i+3-2i$
$= (5+3)+(6-2)i$
$= 8+4i$

d. $(8+2i)-(5+i)$
$= 8+2i-5-i$
$= (8-5)+(2-1)i$
$= 3+i$

Sección 2 Números complejos
Clase 5 Opuesto de un número complejo

Aprendizaje esperado:
Encuentra el opuesto de un número complejo.



Sección 2 Números complejos
Clase 5 Opuesto de un número complejo

P Encuentre el valor de x.
a. $5+x=0$
b. $-3+x=0$
c. $(2+3i)+x=0$

S
a. $5+x=0$
$x=0-5$
$x=-5$

b. $-3+x=0$
$x=0-(-3)$
$x=+3$

c. $(2+3i)+x=0$
$x=0-(2+3i)$
$x=-2-3i$

C El opuesto de un número real es el número que sumado con el número anterior, da cero. Entonces, el opuesto de un número complejo $a+bi$ es $-(a+bi)$ o $-a-bi$, donde a y b son números reales.

Solo se necesita cambiar los signos de a y b, ¿verdad?

Ejemplo:

a. $4+5i$
Opuesto: $-(4+5i)=-4-5i$ Se cambian los signos del número complejo.

b. $-2-i$
Opuesto: $-(-2-i)=2+i$ Se cambian los signos del número complejo.

E Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

a. $\boxed{3+i}$	b. $-2+6i$	c. $1-4i$	d. $-6+5i$
e. $-4-7i$	f. $5-i$	g. $\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$	h. $7+8i$
i. $-\sqrt{5}-\sqrt{7}\,i$	j. $-i$	k. $-\sqrt{2}+5i$	l. $4-\sqrt{9}\,i$

172 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $-(3+i)=-3-i$
b. $-(-2+6i)=2-6i$
c. $-(1-4i)=-1+4i$
d. $-(-6+5i)=6-5i$
e. $-(-4-7i)=4+7i$
f. $-(5-i)=-5+i$
g. $-(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)=-\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$
h. $-(7+8i)=-7-8i$
i. $-(-\sqrt{5}-\sqrt{7}\,i)=\sqrt{5}+\sqrt{7}\,i$
j. $-(-i)=i$
k. $-(-\sqrt{2}+5i)=\sqrt{2}-5i$
l. $-(4-\sqrt{9}\,i)=-4+\sqrt{9}\,i$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-5 Opuesto de un número complejo

Ⓟ Encuentre el valor de x.
a. $5+x=0$
b. $-3+x=0$
c. $(2+3i)+x=0$

Ⓢ Encuentre el valor de x.
a. $5+x=0$
$x=0-5$
$x=-5$

b. $-3+x=0$
$x=0-(-3)$
$x=+3$

c. $(2+3i)+x=0$
$x=0-(2+3i)$
$x=-2-3i$

Ⓒ El opuesto de un número complejo $a+bi$ es $-(a+bi)$ o $-a-bi$, donde a y b son números reales.

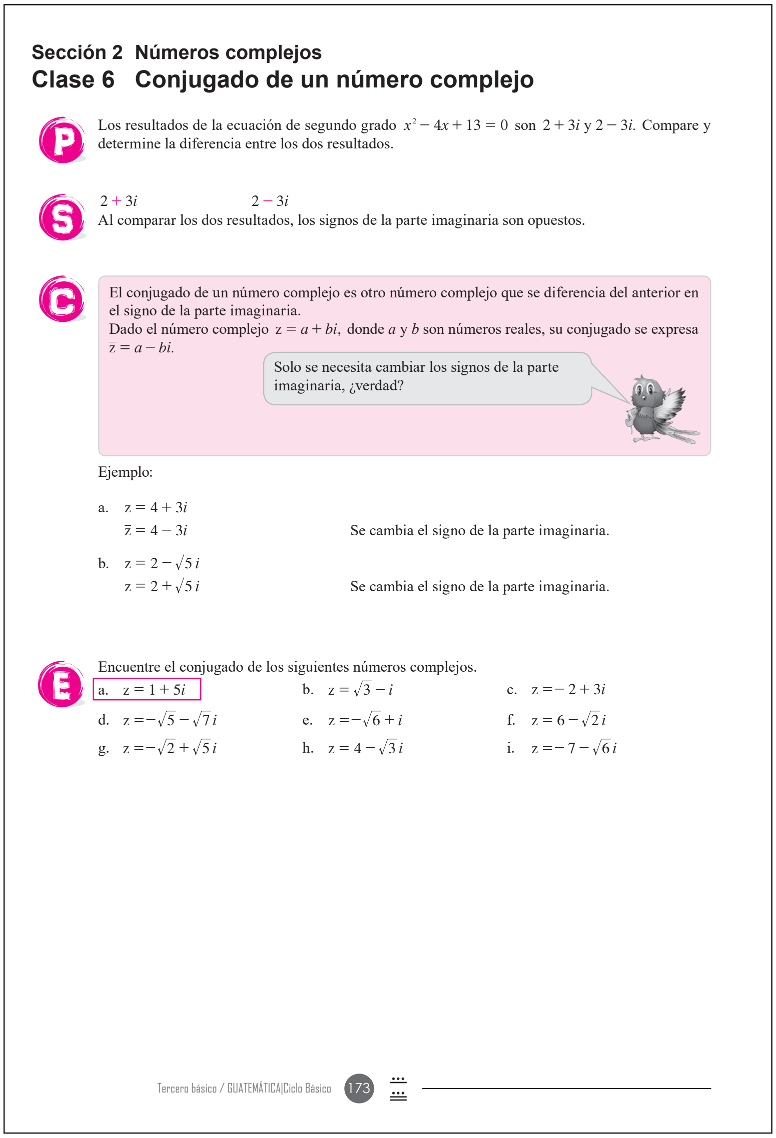
Ejemplo:
a. $4+5i$
Opuesto: $-(4+5i)=-4-5i$

b. $-2-i$
Opuesto: $-(-2-i)=2+i$

Ⓔ Encuentre el opuesto.
a. $3+i$
Opuesto: $-(3+i)=-3-i$

Sección 2 Números complejos
Clase 6 Conjugado de un número complejo

Aprendizaje esperado:
Encuentra el conjugado de un número complejo.



Sección 2 Números complejos
Clase 6 Conjugado de un número complejo

P Los resultados de la ecuación de segundo grado $x^2 - 4x + 13 = 0$ son $2 + 3i$ y $2 - 3i$. Compare y determine la diferencia entre los dos resultados.

S $2 + 3i$ $2 - 3i$
Al comparar los dos resultados, los signos de la parte imaginaria son opuestos.

C El conjugado de un número complejo es otro número complejo que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.
Dado el número complejo $z = a + bi$, donde a y b son números reales, su conjugado se expresa $\bar{z} = a - bi$.

Solo se necesita cambiar los signos de la parte imaginaria, ¿verdad?

Ejemplo:

a. $z = 4 + 3i$
$\bar{z} = 4 - 3i$ Se cambia el signo de la parte imaginaria.

b. $z = 2 - \sqrt{5}i$
$\bar{z} = 2 + \sqrt{5}i$ Se cambia el signo de la parte imaginaria.

E Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

a. $z = 1 + 5i$
b. $z = \sqrt{3} - i$
c. $z = -2 + 3i$
d. $z = -\sqrt{5} - \sqrt{7}i$
e. $z = -\sqrt{6} + i$
f. $z = 6 - \sqrt{2}i$
g. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{5}i$
h. $z = 4 - \sqrt{3}i$
i. $z = -7 - \sqrt{6}i$

Solucionario de los ejercicios:

a. $\bar{z} = 1 - 5i$
b. $\bar{z} = \sqrt{3} + i$
c. $\bar{z} = -2 - 3i$
d. $\bar{z} = -\sqrt{5} + \sqrt{7}i$
e. $\bar{z} = -\sqrt{6} - i$
f. $\bar{z} = 6 + \sqrt{2}i$
g. $\bar{z} = -\sqrt{2} - \sqrt{5}i$
h. $\bar{z} = 4 + \sqrt{3}i$
i. $\bar{z} = -7 + \sqrt{6}i$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-6 Conjugado de un número complejo

Ⓟ Los resultados de $x^2 - 4x + 13 = 0$ son $2 + 3i$ y $2 - 3i$.
Compare y determine la diferencia entre los dos resultados.

Ⓢ $2 + 3i$ $2 - 3i$
Los signos de la parte imaginaria son opuestos.

Ⓒ El conjugado de un número complejo es otro número complejo que se diferencia del anterior en el signo de la parte imaginaria.

Dado el número complejo $z = a + bi$, donde a y b son números reales, su conjugado se expresa $\bar{z} = a - bi$.

Ejemplo:

a. $z = 4 + 3i$
$\bar{z} = 4 - 3i$

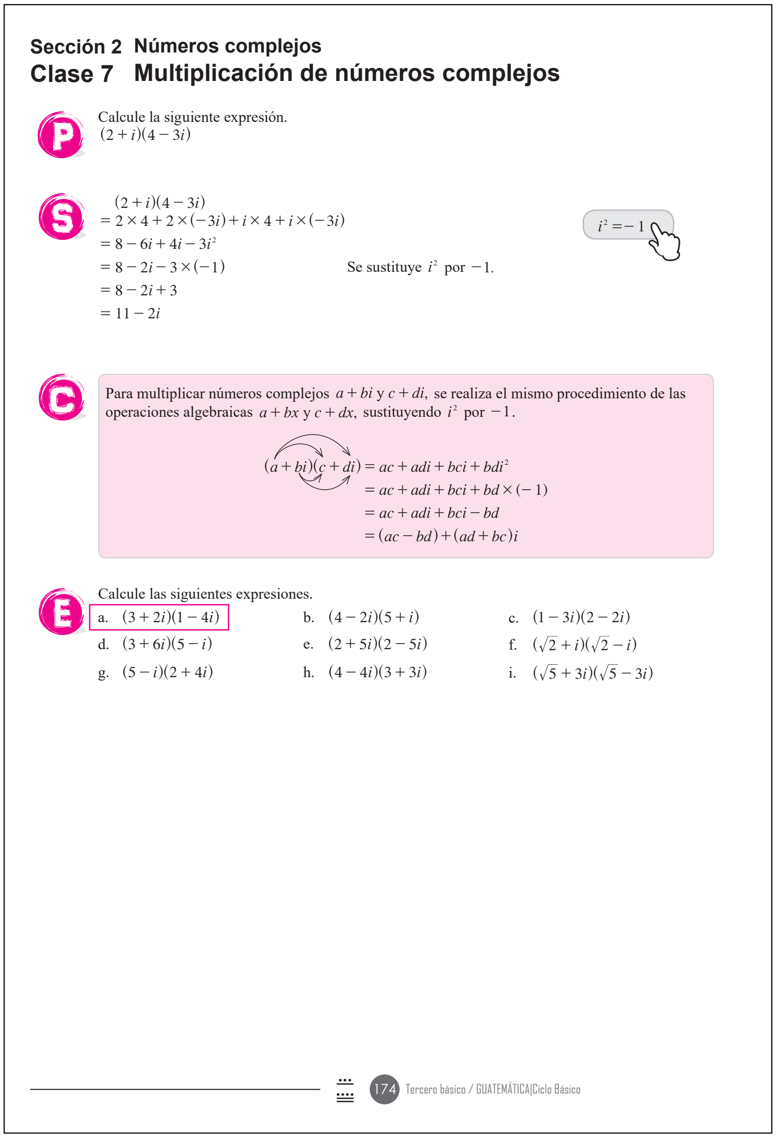
b. $z = 2 - \sqrt{5}i$
$\bar{z} = 2 + \sqrt{5}i$

Ⓔ Encuentre el conjugado.

a. $z = 1 + 5i$
$\bar{z} = 1 - 5i$

Clase 7 Multiplicación de números complejos

Aprendizaje esperado:
Multiplica números complejos.



Sección 2 Números complejos

Clase 7 Multiplicación de números complejos

P Calcule la siguiente expresión.
$(2+i)(4-3i)$

S
$$\begin{aligned}&(2+i)(4-3i)\\&=2\times4+2\times(-3i)+i\times4+i\times(-3i)\\&=8-6i+4i-3i^2\\&=8-2i-3\times(-1)\\&=8-2i+3\\&=11-2i\end{aligned}$$

Se sustituye i^2 por -1.

$i^2=-1$

C Para multiplicar números complejos $a+bi$ y $c+di$, se realiza el mismo procedimiento de las operaciones algebraicas $a+bx$ y $c+dx$, sustituyendo i^2 por -1.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci+bd\times(-1)\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $(3+2i)(1-4i)$ b. $(4-2i)(5+i)$ c. $(1-3i)(2-2i)$

d. $(3+6i)(5-i)$ e. $(2+5i)(2-5i)$ f. $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)$

g. $(5-i)(2+4i)$ h. $(4-4i)(3+3i)$ i. $(\sqrt{5}+3i)(\sqrt{5}-3i)$

174 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $(3+2i)(1-4i)$
$=3\times1+3\times(-4i)+2i\times1+2i\times(-4i)$
$=3-12i+2i-8i^2=3-10i-8\times(-1)$
$=3-10i+8=11-10i$

b. $(4-2i)(5+i)$
$=4\times5+4\times i+(-2i)\times5+(-2i)\times i$
$=20+4i-10i-2i^2=20-6i-2\times(-1)$
$=20-6i+2=22-6i$

c. $(1-3i)(2-2i)$
$=1\times2+1\times(-2i)+(-3i)\times2+(-3i)\times(-2i)$
$=2-2i-6i+6i^2=2-8i+6\times(-1)$
$=2-8i-6=-4-8i$

d. $(3+6i)(5-i)$
$=3\times5+3\times(-i)+6i\times5+6i\times(-i)$
$=15-3i+30i-6i^2=15+27i-6\times(-1)$
$=15+27i+6=21+27i$

e. $(2+5i)(2-5i)=2^2-(5i)^2$
$=4-25i^2=4-25\times(-1)$
$=4+25=29$

f. $(\sqrt{2}+i)(\sqrt{2}-i)$
$=(\sqrt{2})^2-i^2=2-i^2=2-(-1)=2+1=3$

g. $(5-i)(2+4i)$
$=5\times2+5\times4i+(-i)\times2+(-i)\times4i$
$=10+20i-2i-4i^2=10+18i-4\times(-1)$
$=10+18i+4=14+18i$

h. $(4-4i)(3+3i)$
$=4\times3+4\times3i+(-4i)\times3+(-4i)\times3i$
$=12+12i-12i-12i^2=12-12\times(-1)$
$=12+12=24$

i. $(\sqrt{5}+3i)(\sqrt{5}-3i)$
$=(\sqrt{5})^2-(3i)^2=5-9i^2=5-9\times(-1)$
$=5+9=14$

Fecha: dd – mm – aa
7-2-7 Multiplicación de números complejos

Ⓟ Calcule.
$(2+i)(4-3i)$

Ⓢ
$$\begin{aligned}&(2+i)(4-3i)\\&=2\times4+2\times(-3i)+i\times4+i\times(-3i)\\&=8-6i+4i-3i^2\\&=8-2i-3\times(-1)\\&=8-2i+3\\&=11-2i\end{aligned}$$

$i^2=-1$

Ⓒ Para multiplicar $a+bi$ y $c+di$, se realiza el mismo procedimiento de las operaciones algebraicas $a+bx$ y $c+dx$, sustituyendo i^2 por -1.

$$\begin{aligned}(a+bi)(c+di)&=ac+adi+bci+bdi^2\\&=ac+adi+bci+bd\times(-1)\\&=ac+adi+bci-bd\\&=(ac-bd)+(ad+bc)i\end{aligned}$$

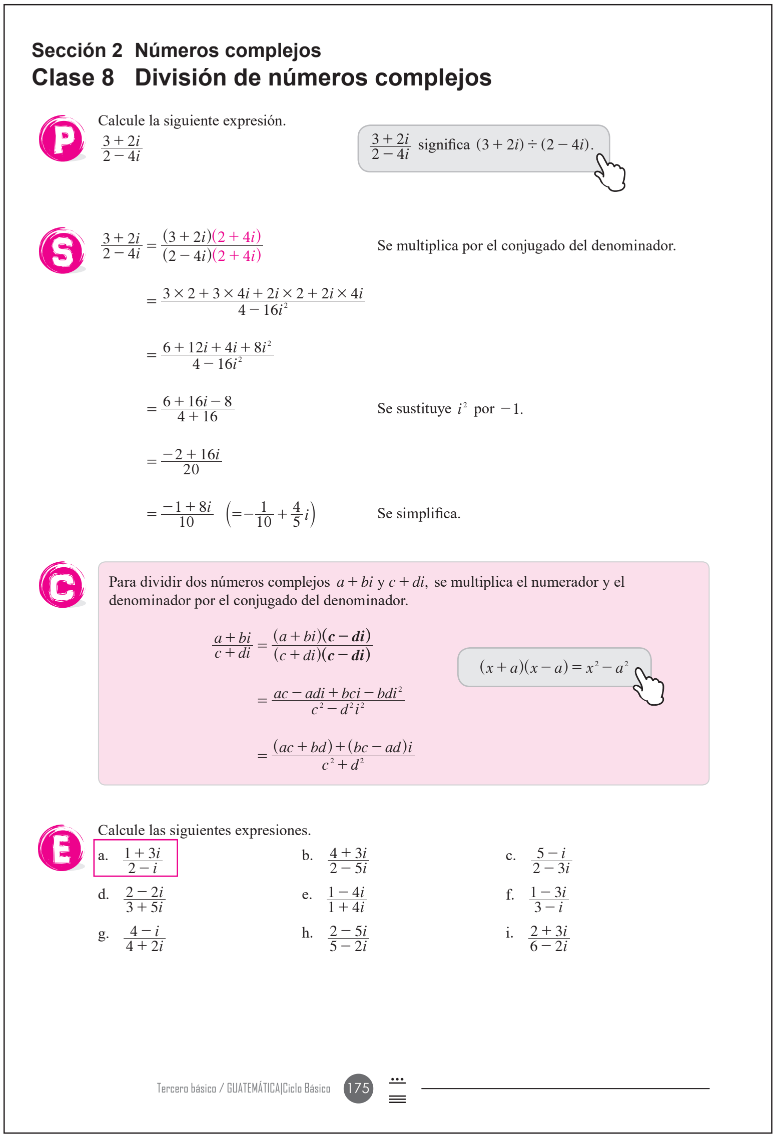
Ⓔ Calcule.

a. $(3+2i)(1-4i)$
$=3\times1+3\times(-4i)+2i\times1+2i\times(-4i)$
$=3-12i+2i-8i^2$
$=3-10i-8\times(-1)$
$=3-10i+8$
$=11-10i$

Unidad 7 Aritmética

Clase 8 División de números complejos

Aprendizaje esperado:
Divide números complejos.



Sección 2 Números complejos

Clase 8 División de números complejos

P Calcule la siguiente expresión.

$\frac{3+2i}{2-4i}$

$\frac{3+2i}{2-4i}$ significa $(3+2i)\div(2-4i)$.

S $\frac{3+2i}{2-4i}=\frac{(3+2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$ Se multiplica por el conjugado del denominador.

$=\frac{3\times2+3\times4i+2i\times2+2i\times4i}{4-16i^2}$

$=\frac{6+12i+4i+8i^2}{4-16i^2}$

$=\frac{6+16i-8}{4+16}$ Se sustituye i^2 por -1.

$=\frac{-2+16i}{20}$

$=\frac{-1+8i}{10}$ $\left(=-\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i\right)$ Se simplifica.

C Para dividir dos números complejos $a+bi$ y $c+di$, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$(x+a)(x-a)=x^2-a^2$

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{1+3i}{2-i}$ b. $\frac{4+3i}{2-5i}$ c. $\frac{5-i}{2-3i}$

d. $\frac{2-2i}{3+5i}$ e. $\frac{1-4i}{1+4i}$ f. $\frac{1-3i}{3-i}$

g. $\frac{4-i}{4+2i}$ h. $\frac{2-5i}{5-2i}$ i. $\frac{2+3i}{6-2i}$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 175

Solucionario de los ejercicios:

a. $\frac{1+3i}{2-i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{1\times2+1\times i+3i\times2+3i\times i}{4-i^2}$

$=\frac{2+i+6i+3i^2}{4-i^2}$

$=\frac{2+7i-3}{4+1}$

$=\frac{-1+7i}{5}$

b. $\frac{4+3i}{2-5i}=\frac{(4+3i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}$

$=\frac{4\times2+4\times5i+3i\times2+3i\times5i}{4-25i^2}$

$=\frac{8+20i+6i+15i^2}{4-25i^2}$

$=\frac{8+26i-15}{4+25}$

$=\frac{-7+26i}{29}$

c. $\frac{5-i}{2-3i}=\frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)}$

$=\frac{5\times2+5\times3i-i\times2-i\times3i}{4-9i^2}$

$=\frac{10+15i-2i-3i^2}{4-9i^2}$

$=\frac{10+13i+3}{4+9}$

$=\frac{13+13i}{13}$

$=1+i$

d. $\frac{2-2i}{3+5i}=\frac{(2-2i)(3-5i)}{(3+5i)(3-5i)}$

$=\frac{2\times3+2\times(-5i)-2i\times3-2i\times(-5i)}{9-25i^2}$

$=\frac{6-10i-6i+10i^2}{9-25i^2}$

$=\frac{6-16i-10}{9+25}$

$=\frac{-4-16i}{34}$

$=\frac{-2-8i}{17}$

Ver ejercicios restantes en la página G217.

Fecha: dd – mm – aa

7-2-8 División de números complejos

Ⓟ Calcule.

$\frac{3+2i}{2-4i}$

$\frac{3+2i}{2-4i}$ significa $(3+2i)\div(2-4i)$.

Ⓢ $\frac{3+2i}{2-4i}=\frac{(3+2i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$ Se multiplica por el conjugado del denominador.

$=\frac{3\times2+3\times4i+2i\times2+2i\times4i}{4-16i^2}$

$=\frac{6+12i+4i+8i^2}{4-16i^2}$

$=\frac{6+16i-8}{4+16}$

$=\frac{-2+16i}{20}$

$=\frac{-1+8i}{10}$ $\left(=-\frac{1}{10}+\frac{4}{5}i\right)$

Ⓒ Para dividir dos números complejos, se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del denominador.

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$
$$=\frac{ac-adi+bci-bdi^2}{c^2-d^2i^2}$$
$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

Ⓔ Calcule.

a. $\frac{1+3i}{2-i}=\frac{(1+3i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$

$=\frac{1\times2+1\times i+3i\times2+3i\times i}{4-i^2}$

$=\frac{2+i+6i+3i^2}{4-i^2}$

$=\frac{2+7i-3}{4+1}$

$=\frac{-1+7i}{5}$

Complemento de solucionario de los ejercicios

Sección 2, clase 8

e.
$$\begin{aligned}\frac{1-4i}{1+4i}&=\frac{(1-4i)(1-4i)}{(1+4i)(1-4i)}\\&=\frac{1\times 1+1\times(-4i)-4i\times 1-4i\times(-4i)}{1-16i^2}\\&=\frac{1-4i-4i+16i^2}{1-16i^2}\\&=\frac{1-8i-16}{1+16}\\&=\frac{-15-8i}{17}\end{aligned}$$

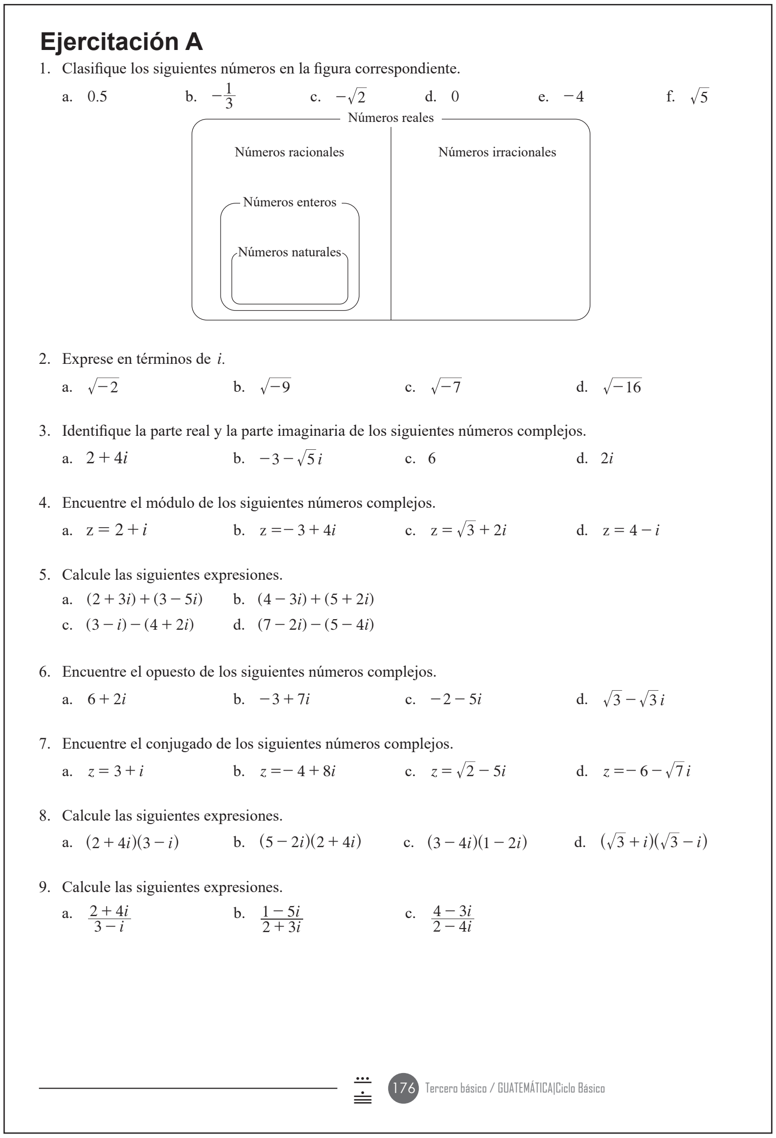
f.
$$\begin{aligned}\frac{1-3i}{3-i}&=\frac{(1-3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}\\&=\frac{1\times 3+1\times i-3i\times 3-3i\times i}{9-i^2}\\&=\frac{3+i-9i-3i^2}{9-i^2}\\&=\frac{3-8i+3}{9+1}\\&=\frac{6-8i}{10}\\&=\frac{3-4i}{5}\end{aligned}$$

g.
$$\begin{aligned}\frac{4-i}{4+2i}&=\frac{(4-i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)}\\&=\frac{4\times 4+4\times(-2i)-i\times 4-i\times(-2i)}{16-4i^2}\\&=\frac{16-8i-4i+2i^2}{16-4i^2}\\&=\frac{16-12i-2}{16+4}\\&=\frac{14-12i}{20}\\&=\frac{7-6i}{10}\end{aligned}$$

h.
$$\begin{aligned}\frac{2-5i}{5-2i}&=\frac{(2-5i)(5+2i)}{(5-2i)(5+2i)}\\&=\frac{2\times 5+2\times 2i-5i\times 5-5i\times 2i}{25-4i^2}\\&=\frac{10+4i-25i-10i^2}{25-4i^2}\\&=\frac{10-21i+10}{25+4}\\&=\frac{20-21i}{29}\end{aligned}$$

i.
$$\begin{aligned}\frac{2+3i}{6-2i}&=\frac{(2+3i)(6+2i)}{(6-2i)(6+2i)}\\&=\frac{2\times 6+2\times 2i+3i\times 6+3i\times 2i}{36-4i^2}\\&=\frac{12+4i+18i+6i^2}{36-4i^2}\\&=\frac{12+22i-6}{36+4}\\&=\frac{6+22i}{40}\\&=\frac{3+11i}{20}\end{aligned}$$

Ejercitación A



Ejercitación A

1. Clasifique los siguientes números en la figura correspondiente.

   a. 0.5 b. $-\frac{1}{3}$ c. $-\sqrt{2}$ d. 0 e. -4 f. $\sqrt{5}$

2. Exprese en términos de *i*.

   a. $\sqrt{-2}$ b. $\sqrt{-9}$ c. $\sqrt{-7}$ d. $\sqrt{-16}$

3. Identifique la parte real y la parte imaginaria de los siguientes números complejos.

   a. $2+4i$ b. $-3-\sqrt{5}\,i$ c. 6 d. $2i$

4. Encuentre el módulo de los siguientes números complejos.

   a. $z=2+i$ b. $z=-3+4i$ c. $z=\sqrt{3}+2i$ d. $z=4-i$

5. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $(2+3i)+(3-5i)$ b. $(4-3i)+(5+2i)$
   c. $(3-i)-(4+2i)$ d. $(7-2i)-(5-4i)$

6. Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

   a. $6+2i$ b. $-3+7i$ c. $-2-5i$ d. $\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i$

7. Encuentre el conjugado de los siguientes números complejos.

   a. $z=3+i$ b. $z=-4+8i$ c. $z=\sqrt{2}-5i$ d. $z=-6-\sqrt{7}\,i$

8. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $(2+4i)(3-i)$ b. $(5-2i)(2+4i)$ c. $(3-4i)(1-2i)$ d. $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)$

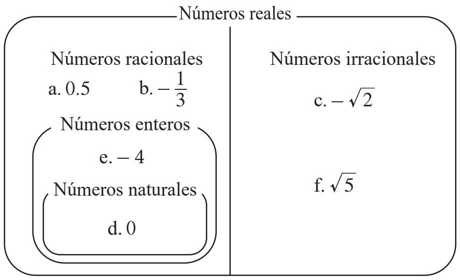
9. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $\frac{2+4i}{3-i}$ b. $\frac{1-5i}{2+3i}$ c. $\frac{4-3i}{2-4i}$

176 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario:

1.



2. a. $\sqrt{-2}=\sqrt{2\times(-1)}$
$=\sqrt{2}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{2}\times i$
$=\sqrt{2}\,i$

   b. $\sqrt{-9}=\sqrt{9\times(-1)}$
$=\sqrt{9}\times\sqrt{-1}$
$=3\times i$
$=3i$

   c. $\sqrt{-7}=\sqrt{7\times(-1)}$
$=\sqrt{7}\times\sqrt{-1}$
$=\sqrt{7}\times i$
$=\sqrt{7}\,i$

   d. $\sqrt{-16}=\sqrt{16\times(-1)}$
$=\sqrt{16}\times\sqrt{-1}$
$=4\times i$
$=4i$

3.

	Parte real	Parte imaginaria
a.	2	4
b.	-3	$-\sqrt{5}$
c.	6	0
d.	0	2

4. a. $|z|=\sqrt{2^2+1^2}$
$=\sqrt{4+1}$
$=\sqrt{5}$

   b. $|z|=\sqrt{(-3)^2+4^2}$
$=\sqrt{9+16}$
$=\sqrt{25}$
$=5$

   c. $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+2^2}$
$=\sqrt{3+4}$
$=\sqrt{7}$

   d. $|z|=\sqrt{4^2+(-1)^2}$
$=\sqrt{16+1}$
$=\sqrt{17}$

5. a. $(2+3i)+(3-5i)=2+3i+3-5i$
$=(2+3)+(3-5)i$
$=5-2i$

   b. $(4-3i)+(5+2i)=4-3i+5+2i$
$=(4+5)+(-3+2)i$
$=9-i$

   c. $(3-i)-(4+2i)=3-i-4-2i$
$=(3-4)+(-1-2)i$
$=-1-3i$

d. $(7-2i)-(5-4i)=7-2i-5+4i$
$=(7-5)+(-2+4)i$
$=2+2i$

6. a. $-(6+2i)=-6-2i$
b. $-(-3+7i)=3-7i$
c. $-(-2-5i)=2+5i$
d. $-(\sqrt{3}-\sqrt{3}\,i)=-\sqrt{3}+\sqrt{3}\,i$

7. a. $\overline{z}=3-i$
b. $\overline{z}=-4-8i$
c. $\overline{z}=\sqrt{2}+5i$
d. $\overline{z}=-6+\sqrt{7}\,i$

8. a. $(2+4i)(3-i)$
$=2\times 3+2\times(-i)+4i\times 3+4i\times(-i)$
$=6-2i+12i-4i^2$
$=6-2i+12i-4\times(-1)$
$=6-2i+12i+4$
$=10+10i$

b. $(5-2i)(2+4i)$
$=5\times 2+5\times 4i-2i\times 2-2i\times 4i$
$=10+20i-4i-8i^2$
$=10+20i-4i-8\times(-1)$
$=10+20i-4i+8$
$=18+16i$

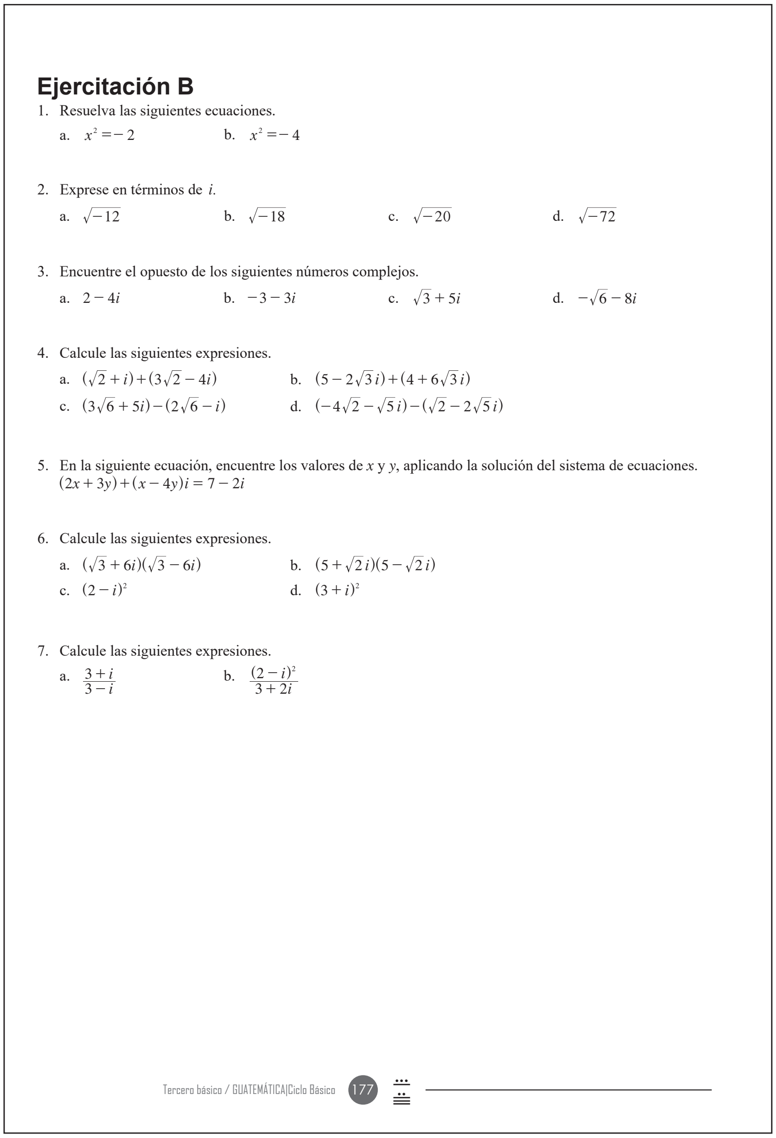
c. $(3-4i)(1-2i)$
$=3\times 1+3\times(-2i)-4i\times 1-4i\times(-2i)$
$=3-6i-4i+8i^2$
$=3-6i-4i+8\times(-1)$
$=3-6i-4i-8$
$=-5-10i$

d. $(\sqrt{3}+i)(\sqrt{3}-i)$
$=(\sqrt{3})^2-i^2$
$=3-(-1)$
$=4$

9. a. $\frac{2+4i}{3-i}=\frac{(2+4i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$
$=\frac{2\times 3+2\times i+4i\times 3+4i\times i}{9-i^2}$
$=\frac{6+2i+12i+4i^2}{9-i^2}$
$=\frac{6+14i-4}{9+1}$
$=\frac{2+14i}{10}$
$=\frac{1+7i}{5}$

b. $\frac{1-5i}{2+3i}=\frac{(1-5i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}$
$=\frac{1\times 2+1\times(-3i)-5i\times 2-5i\times(-3i)}{4-9i^2}$
$=\frac{2-3i-10i+15i^2}{4-9i^2}$
$=\frac{2-13i-15}{4+9}$
$=\frac{-13-13i}{13}$
$=-1-i$

c. $\frac{4-3i}{2-4i}=\frac{(4-3i)(2+4i)}{(2-4i)(2+4i)}$
$=\frac{4\times 2+4\times 4i-3i\times 2-3i\times 4i}{4-16i^2}$
$=\frac{8+16i-6i-12i^2}{4-16i^2}$
$=\frac{8+10i+12}{4+16}$
$=\frac{20+10i}{20}$
$=\frac{2+i}{2}$



Ejercitación B

1. Resuelva las siguientes ecuaciones.

   a. $x^2 = -2$　　b. $x^2 = -4$

2. Exprese en términos de i.

   a. $\sqrt{-12}$　　b. $\sqrt{-18}$　　c. $\sqrt{-20}$　　d. $\sqrt{-72}$

3. Encuentre el opuesto de los siguientes números complejos.

   a. $2-4i$　　b. $-3-3i$　　c. $\sqrt{3}+5i$　　d. $-\sqrt{6}-8i$

4. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $(\sqrt{2}+i)+(3\sqrt{2}-4i)$　　b. $(5-2\sqrt{3}\,i)+(4+6\sqrt{3}\,i)$

   c. $(3\sqrt{6}+5i)-(2\sqrt{6}-i)$　　d. $(-4\sqrt{2}-\sqrt{5}\,i)-(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i)$

5. En la siguiente ecuación, encuentre los valores de x y y, aplicando la solución del sistema de ecuaciones.
   $(2x+3y)+(x-4y)i = 7-2i$

6. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $(\sqrt{3}+6i)(\sqrt{3}-6i)$　　b. $(5+\sqrt{2}\,i)(5-\sqrt{2}\,i)$

   c. $(2-i)^2$　　d. $(3+i)^2$

7. Calcule las siguientes expresiones.

   a. $\dfrac{3+i}{3-i}$　　b. $\dfrac{(2-i)^2}{3+2i}$

Solucionario:

1. a.

$$\begin{aligned} x^2 &= -2\\ x &= \pm\sqrt{-2}\\ &= \pm\sqrt{2\times(-1)}\\ &= \pm\sqrt{2}\times\sqrt{-1}\\ &= \pm\sqrt{2}\times i\\ &= \pm\sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} x^2 &= -4\\ x &= \pm\sqrt{-4}\\ &= \pm\sqrt{4\times(-1)}\\ &= \pm\sqrt{4}\times\sqrt{-1}\\ &= \pm 2\times i\\ &= \pm 2i \end{aligned}$$

2. a.

$$\begin{aligned} \sqrt{-12} &= \sqrt{12\times(-1)}\\ &= \sqrt{12}\times\sqrt{-1}\\ &= 2\sqrt{3}\times i\\ &= 2\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} \sqrt{-18} &= \sqrt{18\times(-1)}\\ &= \sqrt{18}\times\sqrt{-1}\\ &= 3\sqrt{2}\times i\\ &= 3\sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} \sqrt{-20} &= \sqrt{20\times(-1)}\\ &= \sqrt{20}\times\sqrt{-1}\\ &= 2\sqrt{5}\times i\\ &= 2\sqrt{5}\,i \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} \sqrt{-72} &= \sqrt{72\times(-1)}\\ &= \sqrt{72}\times\sqrt{-1}\\ &= 6\sqrt{2}\times i\\ &= 6\sqrt{2}\,i \end{aligned}$$

3. a. $-(2-4i) = -2+4i$

   b. $-(-3-3i) = 3+3i$

   c. $-(\sqrt{3}+5i) = -\sqrt{3}-5i$

   d. $-(-\sqrt{6}-8i) = \sqrt{6}+8i$

4. a.

$$\begin{aligned} &(\sqrt{2}+i)+(3\sqrt{2}-4i)\\ &= \sqrt{2}+i+3\sqrt{2}-4i\\ &= (\sqrt{2}+3\sqrt{2})+(1-4)i\\ &= 4\sqrt{2}-3i \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} &(5-2\sqrt{3}\,i)+(4+6\sqrt{3}\,i)\\ &= 5-2\sqrt{3}\,i+4+6\sqrt{3}\,i\\ &= (5+4)+(-2\sqrt{3}+6\sqrt{3})i\\ &= 9+4\sqrt{3}\,i \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} &(3\sqrt{6}+5i)-(2\sqrt{6}-i)\\ &= 3\sqrt{6}+5i-2\sqrt{6}+i\\ &= (3\sqrt{6}-2\sqrt{6})+(5+1)i\\ &= \sqrt{6}+6i \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} &(-4\sqrt{2}-\sqrt{5}\,i)-(\sqrt{2}-2\sqrt{5}\,i)\\ &= -4\sqrt{2}-\sqrt{5}\,i-\sqrt{2}+2\sqrt{5}\,i\\ &= (-4\sqrt{2}-\sqrt{2})+(-\sqrt{5}+2\sqrt{5})i\\ &= -5\sqrt{2}+\sqrt{5}\,i \end{aligned}$$

5. $(2x+3y)+(x-4y)i = 7-2i$

$$\begin{cases} 2x+3y = 7 & \text{①}\\ x-4y = -2 & \text{②} \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} 2x+3y = 7 & \text{①}\\ (-)\,2x-8y = -4 & \text{②}\times 2\\ \hline 11y = 11 & \\ y = 1 & \end{array}$$

Se sustituye y por 1 en la ecuación ②.

$$\begin{aligned} x-4\times 1 &= -2\\ x-4 &= -2\\ x &= -2+4\\ &= 2 \end{aligned}$$

R: $x = 2,\ y = 1$

6. a.

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}+6i)(\sqrt{3}-6i) &= (\sqrt{3})^2-(6i)^2\\ &= 3-36i^2\\ &= 3+36\\ &= 39 \end{aligned}$$

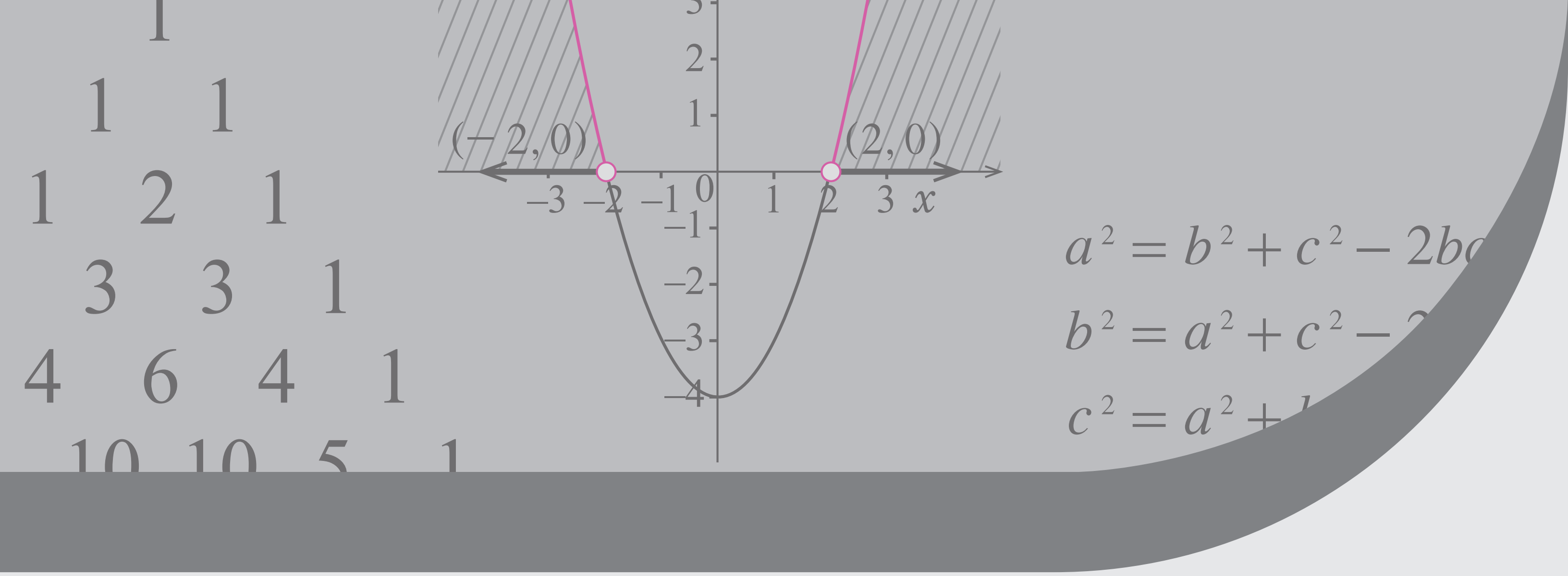
b. $(5+\sqrt{2}\,i)(5-\sqrt{2}\,i) = 5^2-(\sqrt{2}\,i)^2$
$= 25-2i^2$
$= 25+2$
$= 27$

c. $(2-i)^2 = 2^2-4i+i^2$
$= 4-4i-1$
$= 3-4i$

d. $(3+i)^2 = 3^2+6i+i^2$
$= 9+6i-1$
$= 8+6i$

7. a. $\frac{3+i}{3-i} = \frac{(3+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)}$
$= \frac{(3+i)^2}{9-i^2}$
$= \frac{3^2+6i+i^2}{9+1}$
$= \frac{9+6i-1}{10}$
$= \frac{8+6i}{10}$
$= \frac{4+3i}{5}$

b. $\frac{(2-i)^2}{3+2i} = \frac{(2-i)^2(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}$
$= \frac{(4-4i+i^2)(3-2i)}{9-4i^2}$
$= \frac{(4-4i-1)(3-2i)}{9+4}$
$= \frac{(3-4i)(3-2i)}{13}$
$= \frac{9-6i-12i+8i^2}{13}$
$= \frac{9-18i-8}{13}$
$= \frac{1-18i}{13}$



Unidad 8

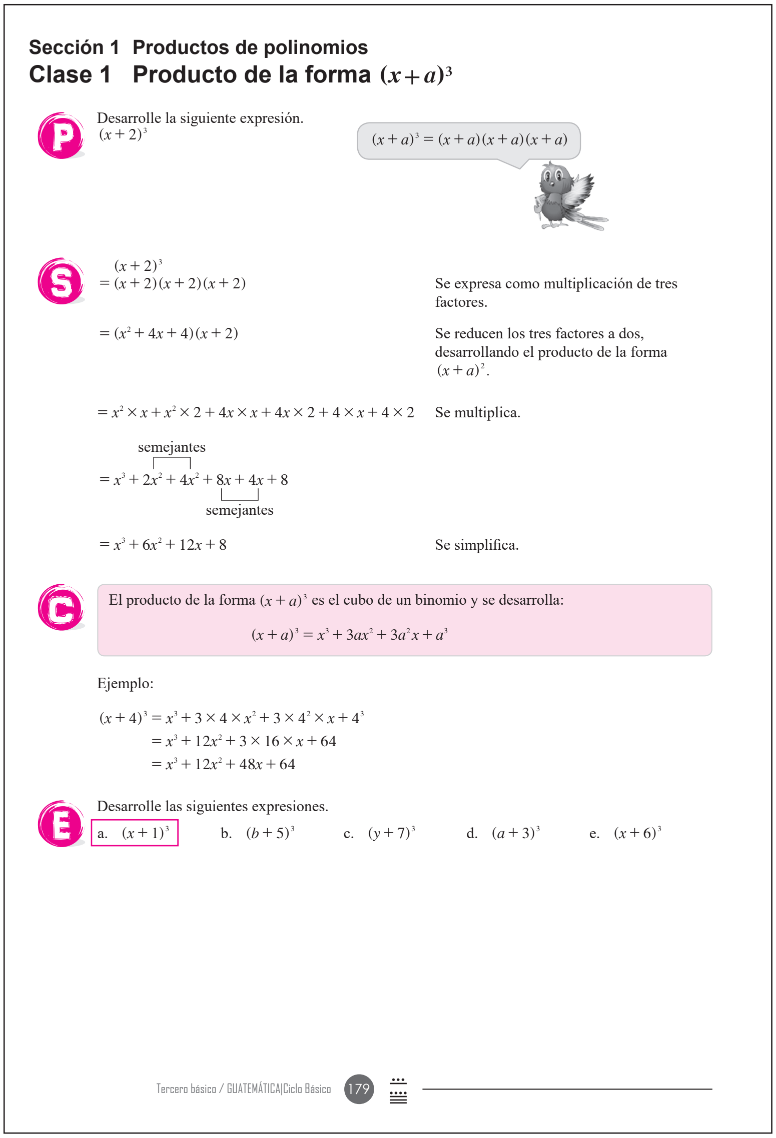
Avanzado

Plan de estudio - Unidad 8 Avanzado -

Competencia	Indicador de logro	Sección	Clase	Aprendizaje esperado (Al finalizar el período de clase, el estudiante:)
1. Construye patrones aritméticos, algebraicos y geométricos aplicando propiedades y relaciones en la solución de problemas.	1.1 Aplica la factorización de polinomios al simplificar fracciones algebraicas.	1. Productos de polinomios	1.1 Producto de la forma $(x+a)^3$	Desarrolla un producto notable de la forma $(x+a)^3$.
			1.2 Producto de la forma $(x-a)^3$	Desarrolla un producto notable de la forma $(x-a)^3$.
			1.3 Potenciación de polinomios de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$	Desarrolla productos de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$.
			1.4 Triángulo de Pascal	Desarrolla un producto de la forma $(x+y)^n$ usando el triángulo de Pascal.
			1.5 Binomio de Newton	Desarrolla un producto de la forma $(x+y)^n$ usando el binomio de Newton.
			1.6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a+b+c)^2$	Desarrolla un producto de la forma $(a+b+c)^2$.
			1.7 Productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$	Desarrolla productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$.
		2. Factorización	2.1 Factorización de binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3	Factoriza binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3.
		3. Fracciones algebraicas	3.1 Fracción algebraica	Simplifica una fracción algebraica.
			3.2 Multiplicación y división	Multiplica fracciones algebraicas. Divide fracciones algebraicas.
			3.3 Suma y resta	Suma fracciones algebraicas. Resta fracciones algebraicas.
		4. Radicación de polinomios	4.1 Raíz cuadrada de un polinomio	Simplifica la raíz cuadrada de un polinomio.
2. Construye modelos matemáticos para el análisis y representación de las relaciones.	2.4 Utiliza diferentes métodos en la resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones.	5. Inecuaciones de segundo grado	5.1 Solución de una inecuación de segundo grado	Encuentra el intervalo de valores que satisface una inecuación de segundo grado.
			5.2 Función cuadrática e interceptos con el eje x	Encuentra los interceptos con el eje x de una función cuadrática.
			5.3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática	Resuelve una inecuación de segundo grado a través de la gráfica de la función cuadrática.
1. Construye patrones aritméticos, algebraicos y geométricos, aplicando propiedades y relaciones en la solución de problemas.	1.3 Utiliza teoremas relacionados con triángulos obtusángulos en la solución de problemas.	6. Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°	6.1 Teorema de Senos (1)	Encuentra la medida del lado desconocido de un triángulo usando el teorema de Senos.
			6.2 Teorema de Senos (2)	Encuentra el radio de la circunferencia circunscrita en un triángulo usando el teorema de Senos.
			6.3 Teorema de Cosenos (1)	Encuentra la medida del lado desconocido del triángulo usando el teorema de Cosenos.
			6.4 Teorema de Cosenos (2)	Encuentra la medida del ángulo desconocido del triángulo usando el teorema de Cosenos.

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 1 Producto de la forma $(x + a)^3$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(x + a)^3$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 1 Producto de la forma $(x+a)^3$

Ⓟ Desarrolle la siguiente expresión.
$(x + 2)^3$

$(x + a)^3 = (x + a)(x + a)(x + a)$

Ⓢ $(x + 2)^3$

$= (x + 2)(x + 2)(x + 2)$ Se expresa como multiplicación de tres factores.

$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$ Se reducen los tres factores a dos, desarrollando el producto de la forma $(x + a)^2$.

$= x^2 \times x + x^2 \times 2 + 4x \times x + 4x \times 2 + 4 \times x + 4 \times 2$ Se multiplica.

$= x^3 + \overbrace{2x^2 + 4x^2}^{\text{semejantes}} + \underbrace{8x + 4x}_{\text{semejantes}} + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ Se simplifica.

Ⓒ El producto de la forma $(x + a)^3$ es el cubo de un binomio y se desarrolla:

$$(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 4)^3 &= x^3 + 3 \times 4 \times x^2 + 3 \times 4^2 \times x + 4^3\\ &= x^3 + 12x^2 + 3 \times 16 \times x + 64\\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$

Ⓔ Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $(x + 1)^3$ b. $(b + 5)^3$ c. $(y + 7)^3$ d. $(a + 3)^3$ e. $(x + 6)^3$

Solucionario de los ejercicios:

a. $$\begin{aligned}(x + 1)^3 &= x^3 + 3 \times 1 \times x^2 + 3 \times 1^2 \times x + 1^3\\ &= x^3 + 3x^2 + 3 \times 1 \times x + 1\\ &= x^3 + 3x^2 + 3x + 1\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}(b + 5)^3 &= b^3 + 3 \times 5 \times b^2 + 3 \times 5^2 \times b + 5^3\\ &= b^3 + 15b^2 + 3 \times 25 \times b + 125\\ &= b^3 + 15b^2 + 75b + 125\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}(y + 7)^3 &= y^3 + 3 \times 7 \times y^2 + 3 \times 7^2 \times y + 7^3\\ &= y^3 + 21y^2 + 3 \times 49 \times y + 343\\ &= y^3 + 21y^2 + 147y + 343\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}(a + 3)^3 &= a^3 + 3 \times 3 \times a^2 + 3 \times 3^2 \times a + 3^3\\ &= a^3 + 9a^2 + 3 \times 9 \times a + 27\\ &= a^3 + 9a^2 + 27a + 27\end{aligned}$$

e. $$\begin{aligned}(x + 6)^3 &= x^3 + 3 \times 6 \times x^2 + 3 \times 6^2 \times x + 6^3\\ &= x^3 + 18x^2 + 3 \times 36 \times x + 216\\ &= x^3 + 18x^2 + 108x + 216\end{aligned}$$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-1 Poducto de la forma $(x + a)^3$

Ⓟ Desarrolle.
$(x + 2)^3$

Ⓢ $(x + 2)^3$

$= (x + 2)(x + 2)(x + 2)$

$= (x + 2)^2(x + 2)$

$= (x^2 + 4x + 4)(x + 2)$

$= x^2 \times x + x^2 \times 2 + 4x \times x + 4x \times 2 + 4 \times x + 4 \times 2$

$= x^3 + \overbrace{2x^2 + 4x^2}^{\text{semejantes}} + \underbrace{8x + 4x}_{\text{semejantes}} + 8$

$= x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

Ⓒ $(x + a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(x + 4)^3 &= x^3 + 3 \times 4 \times x^2 + 3 \times 4^2 \times x + 4^3\\ &= x^3 + 12x^2 + 3 \times 16 \times x + 64\\ &= x^3 + 12x^2 + 48x + 64\end{aligned}$$

Ⓔ Desarrolle.

a. $(x + 1)^3$

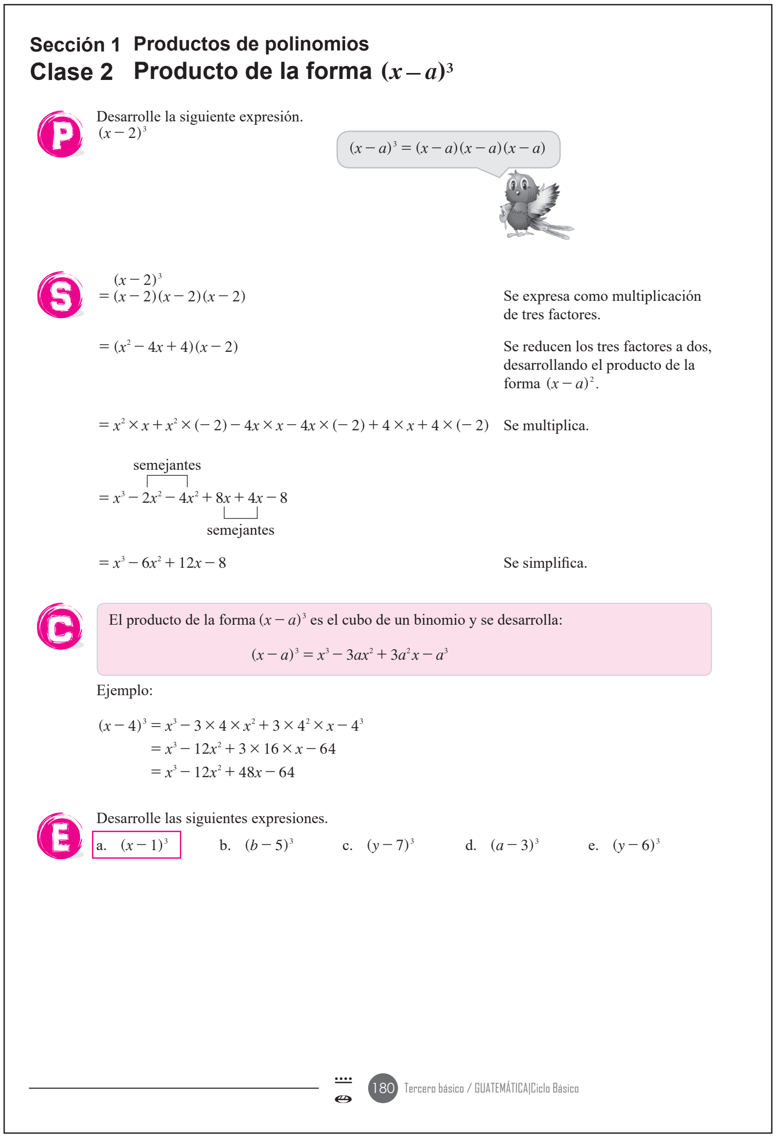
$= x^3 + 3 \times 1 \times x^2 + 3 \times 1^2 \times x + 1^3$

$= x^3 + 3x^2 + 3 \times 1 \times x + 1$

$= x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 2 Producto de la forma $(x-a)^3$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto notable de la forma $(x-a)^3$.



Sección 1 **Productos de polinomios**
Clase 2 **Producto de la forma $(x-a)^3$**

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(x-2)^3$

$(x-a)^3=(x-a)(x-a)(x-a)$

S
$(x-2)^3$
$=(x-2)(x-2)(x-2)$ Se expresa como multiplicación de tres factores.

$=(x^2-4x+4)(x-2)$ Se reducen los tres factores a dos, desarrollando el producto de la forma $(x-a)^2$.

$=x^2\times x+x^2\times(-2)-4x\times x-4x\times(-2)+4\times x+4\times(-2)$ Se multiplica.

$$=x^3\overbrace{-2x^2-4x^2}^{\text{semejantes}}\underbrace{+8x+4x}_{\text{semejantes}}-8$$

$=x^3-6x^2+12x-8$ Se simplifica.

C El producto de la forma $(x-a)^3$ es el cubo de un binomio y se desarrolla:

$$(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$$

Ejemplo:

$(x-4)^3=x^3-3\times4\times x^2+3\times4^2\times x-4^3$
$=x^3-12x^2+3\times16\times x-64$
$=x^3-12x^2+48x-64$

E Desarrolle las siguientes expresiones.
a. $(x-1)^3$ b. $(b-5)^3$ c. $(y-7)^3$ d. $(a-3)^3$ e. $(y-6)^3$

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x-1)^3=x^3-3\times1\times x^2+3\times1^2\times x-1^3$
$=x^3-3x^2+3\times1\times x-1$
$=x^3-3x^2+3x-1$

b. $(b-5)^3=b^3-3\times5\times b^2+3\times5^2\times b-5^3$
$=b^3-15b^2+3\times25\times b-125$
$=b^3-15b^2+75b-125$

c. $(y-7)^3=y^3-3\times7\times y^2+3\times7^2\times y-7^3$
$=y^3-21y^2+3\times49\times y-343$
$=y^3-21y^2+147y-343$

d. $(a-3)^3=a^3-3\times3\times a^2+3\times3^2\times a-3^3$
$=a^3-9a^2+3\times9\times a-27$
$=a^3-9a^2+27a-27$

e. $(y-6)^3=y^3-3\times6\times y^2+3\times6^2\times y-6^3$
$=y^3-18y^2+3\times36\times y-216$
$=y^3-18y^2+108y-216$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-2 Producto de la forma $(x-a)^3$

Ⓟ Desarrolle.
$(x-2)^3$

Ⓢ $(x-2)^3$
$=(x-2)(x-2)(x-2)$
$=(x-2)^2(x-2)$
$=(x^2-4x+4)(x-2)$
$=x^2\times x+x^2\times(-2)-4x\times x-4x\times(-2)+4\times x+4\times(-2)$

$$=x^3\overbrace{-2x^2-4x^2}^{\text{semejantes}}\underbrace{+8x+4x}_{\text{semejantes}}-8$$

$=x^3-6x^2+12x-8$

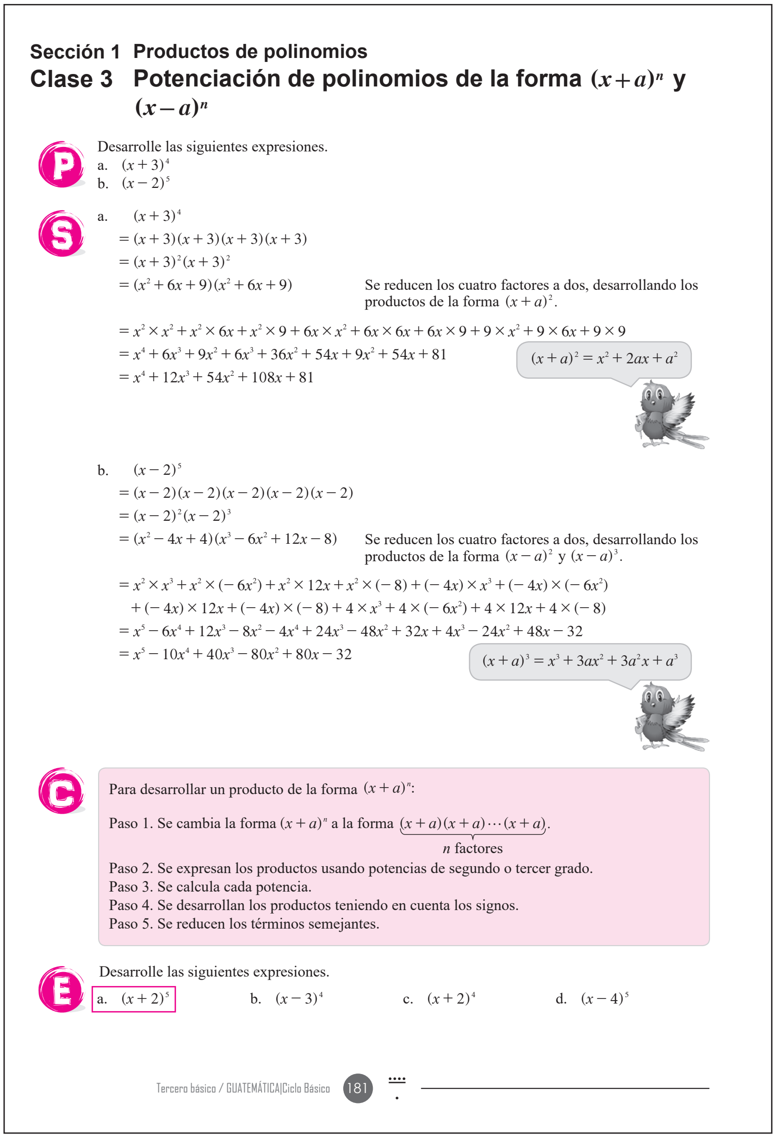
Ⓒ $(x-a)^3=x^3-3ax^2+3a^2x-a^3$

Ejemplo:
$(x-4)^3=x^3-3\times4\times x^2+3\times4^2\times x-4^3$
$=x^3-12x^2+3\times16\times x-64$
$=x^3-12x^2+48x-64$

Ⓔ Desarrolle.
a. $(x-1)^3=x^3-3\times1\times x^2+3\times1^2\times x-1^3$
$=x^3-3x^2+3\times1\times x-1$
$=x^3-3x^2+3x-1$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 3 Potenciación de polinomios de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla productos de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 3 Potenciación de polinomios de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$

P Desarrolle las siguientes expresiones.
a. $(x+3)^4$
b. $(x-2)^5$

S a. $(x+3)^4$
$= (x+3)(x+3)(x+3)(x+3)$
$= (x+3)^2(x+3)^2$
$= (x^2+6x+9)(x^2+6x+9)$

Se reducen los cuatro factores a dos, desarrollando los productos de la forma $(x+a)^2$.

$= x^2\times x^2+x^2\times 6x+x^2\times 9+6x\times x^2+6x\times 6x+6x\times 9+9\times x^2+9\times 6x+9\times 9$
$= x^4+6x^3+9x^2+6x^3+36x^2+54x+9x^2+54x+81$
$= x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2$

b. $(x-2)^5$
$= (x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)$
$= (x-2)^2(x-2)^3$
$= (x^2-4x+4)(x^3-6x^2+12x-8)$

Se reducen los cuatro factores a dos, desarrollando los productos de la forma $(x-a)^2$ y $(x-a)^3$.

$= x^2\times x^3+x^2\times(-6x^2)+x^2\times 12x+x^2\times(-8)+(-4x)\times x^3+(-4x)\times(-6x^2)$
$+(-4x)\times 12x+(-4x)\times(-8)+4\times x^3+4\times(-6x^2)+4\times 12x+4\times(-8)$
$= x^5-6x^4+12x^3-8x^2-4x^4+24x^3-48x^2+32x+4x^3-24x^2+48x-32$
$= x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3$

C Para desarrollar un producto de la forma $(x+a)^n$:

Paso 1. Se cambia la forma $(x+a)^n$ a la forma $\underbrace{(x+a)(x+a)\cdots(x+a)}_{n \text{ factores}}$.
Paso 2. Se expresan los productos usando potencias de segundo o tercer grado.
Paso 3. Se calcula cada potencia.
Paso 4. Se desarrollan los productos teniendo en cuenta los signos.
Paso 5. Se reducen los términos semejantes.

E Desarrolle las siguientes expresiones.
a. $\boxed{(x+2)^5}$ b. $(x-3)^4$ c. $(x+2)^4$ d. $(x-4)^5$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 181

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+2)^5$
$= (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$
$= (x+2)^2(x+2)^3$
$= (x^2+4x+4)(x^3+6x^2+12x+8)$
$= x^5+6x^4+12x^3+8x^2+4x^4+24x^3+48x^2$
$+32x+4x^3+24x^2+48x+32$
$= x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$

b. $(x-3)^4$
$= (x-3)(x-3)(x-3)(x-3)$
$= (x-3)^2(x-3)^2$
$= (x^2-6x+9)(x^2-6x+9)$
$= x^4-6x^3+9x^2-6x^3+36x^2-54x+9x^2$
$-54x+81$
$= x^4-12x^3+54x^2-108x+81$

c. $(x+2)^4$
$= (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$
$= (x+2)^2(x+2)^2$
$= (x^2+4x+4)(x^2+4x+4)$
$= x^4+4x^3+4x^2+4x^3+16x^2+16x+4x^2$
$+16x+16$
$= x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

d. $(x-4)^5$
$= (x-4)(x-4)(x-4)(x-4)(x-4)$
$= (x-4)^2(x-4)^3$
$= (x^2-8x+16)(x^3-12x^2+48x-64)$
$= x^5-12x^4+48x^3-64x^2-8x^4+96x^3-384x^2$
$-512x+16x^3-192x^2+768x-1,024$
$= x^5-20x^4+160x^3-640x^2+1,280x-1,024$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-3 Potenciación de polinomios de la forma $(x+a)^n$ y $(x-a)^n$

Ⓟ Desarrolle.
a. $(x+3)^4$ b. $(x-2)^5$

Ⓢ a. $(x+3)^4$
$= (x+3)(x+3)(x+3)(x+3)$
$= (x+3)^2(x+3)^2$
$= (x^2+6x+9)(x^2+6x+9)$
$= x^2\times x^2+6x\times x^2+9\times x^2+x^2\times 6x+6x\times 6x+9\times 6x$
$+x^2\times 9+6x\times 9+9\times 9$
$= x^4+6x^3+9x^2+6x^3+36x^2+54x+9x^2+54x+81$
$= x^4+12x^3+54x^2+108x+81$

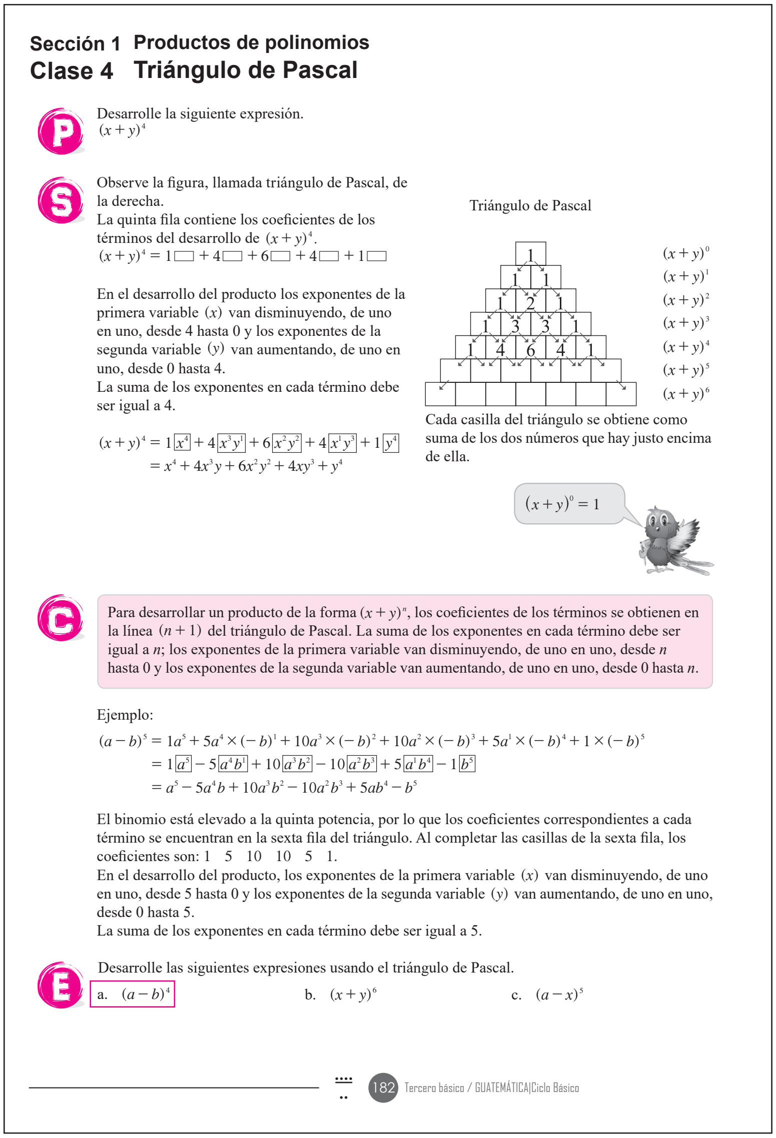
b. $(x-2)^5$
$= (x-2)(x-2)(x-2)(x-2)(x-2)$
$= (x-2)^2(x-2)^3$
$= (x^2-4x+4)(x^3-6x^2+12x-8)$
$= x^2\times x^3+(-4x)\times x^3+4\times x^3+x^2\times(-6x^2)+(-4x)\times(-6x^2)$
$+4\times(-6x^2)+x^2\times 12x+(-4x)\times 12x+4\times 12x+x^2\times(-8)$
$+(-4x)\times(-8)+4\times(-8)$
$= x^5-4x^4+4x^3-6x^4+24x^3-24x^2+12x^3-48x^2+48x$
$-8x^2+32x-32$
$= x^5-10x^4+40x^3-80x^2+80x-32$

Ⓒ Para desarrollar $(x+a)^n$:
Se cambia $(x+a)^n$ a $\underbrace{(x+a)(x+a)\cdots(x+a)}_{n \text{ factores}}$.

Ⓔ Desarrolle.
a. $(x+2)^5$
$= (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$
$= (x+2)^2(x+2)^3$
$= (x^2+4x+4)(x^3+6x^2+12x+8)$
$= x^5+6x^4+12x^3+8x^2+4x^4+24x^3+48x^2+32x+4x^3$
$+24x^2+48x+32$
$= x^5+10x^4+40x^3+80x^2+80x+32$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 4 Triángulo de Pascal

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto de la forma $(x+y)^n$ usando el triángulo de Pascal.



Sección 1 **Productos de polinomios**
Clase 4 **Triángulo de Pascal**

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(x+y)^4$

S Observe la figura, llamada triángulo de Pascal, de la derecha.
La quinta fila contiene los coeficientes de los términos del desarrollo de $(x+y)^4$.
$(x+y)^4 = 1\square + 4\square + 6\square + 4\square + 1\square$

En el desarrollo del producto los exponentes de la primera variable (x) van disminuyendo, de uno en uno, desde 4 hasta 0 y los exponentes de la segunda variable (y) van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta 4.
La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a 4.

$(x+y)^4 = 1\boxed{x^4} + 4\boxed{x^3y^1} + 6\boxed{x^2y^2} + 4\boxed{x^1y^3} + 1\boxed{y^4}$
$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

Triángulo de Pascal

Cada casilla del triángulo se obtiene como suma de los dos números que hay justo encima de ella.

C Para desarrollar un producto de la forma $(x+y)^n$, los coeficientes de los términos se obtienen en la línea $(n+1)$ del triángulo de Pascal. La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a n; los exponentes de la primera variable van disminuyendo, de uno en uno, desde n hasta 0 y los exponentes de la segunda variable van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta n.

Ejemplo:
$(a-b)^5 = 1a^5 + 5a^4 \times (-b)^1 + 10a^3 \times (-b)^2 + 10a^2 \times (-b)^3 + 5a^1 \times (-b)^4 + 1 \times (-b)^5$
$= 1\boxed{a^5} - 5\boxed{a^4b^1} + 10\boxed{a^3b^2} - 10\boxed{a^2b^3} + 5\boxed{a^1b^4} - 1\boxed{b^5}$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

El binomio está elevado a la quinta potencia, por lo que los coeficientes correspondientes a cada término se encuentran en la sexta fila del triángulo. Al completar las casillas de la sexta fila, los coeficientes son: 1 5 10 10 5 1.
En el desarrollo del producto, los exponentes de la primera variable (x) van disminuyendo, de uno en uno, desde 5 hasta 0 y los exponentes de la segunda variable (y) van aumentando, de uno en uno, desde 0 hasta 5.
La suma de los exponentes en cada término debe ser igual a 5.

E Desarrolle las siguientes expresiones usando el triángulo de Pascal.
a. $(a-b)^4$ b. $(x+y)^6$ c. $(a-x)^5$

182 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

$(x+y)^0$ 1
$(x+y)^1$ 1 1
$(x+y)^2$ 1 2 1
$(x+y)^3$ 1 3 3 1
$(x+y)^4$ 1 4 6 4 1
$(x+y)^5$ 1 5 10 10 5 1
$(x+y)^6$ 1 6 15 20 15 6 1

a. Los coeficientes de $(a-b)^4$ se muestran en la quinta fila del triángulo de Pascal: 1 4 6 4 1
$(a-b)^4 = 1a^4 - 4a^3b^1 + 6a^2b^2 - 4a^1b^3 + 1b^4$
$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

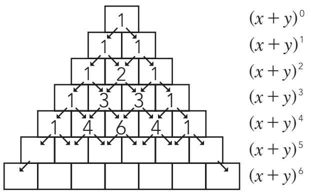
b. Los coeficientes de $(x+y)^6$ se muestran la séptima fila del triángulo de Pascal: 1 6 15 20 15 6 1
$(x+y)^6 = 1x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3$
$+ 15x^2y^4 + 6x^1y^5 + 1y^6$
$= x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4$
$+ 6xy^5 + y^6$

c. Los coeficientes de $(a-x)^5$ se muestran la séptima fila del triángulo de Pascal: 1 5 10 10 5 1
$(a-x)^5 = 1a^5 - 5a^4x^1 + 10a^3x^2 - 10a^2x^3 + 5a^1x^4 - 1x^5$
$= a^5 - 5a^4x + 10a^3x^2 - 10a^2x^3 + 5ax^4 - x^5$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-4 Triángulo de Pascal

Ⓟ Desarrolle.
$(x-y)^4$

Triángulo de Pascal



Ⓢ La quinta fila del triángulo de Pascal contiene los coeficientes de $(x+y)^4$.
$(x+y)^4 = 1\boxed{x^4} + 4\boxed{x^3y^1} + 6\boxed{x^2y^2} + 4\boxed{x^1y^3} + 1\boxed{y^4}$
$= x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

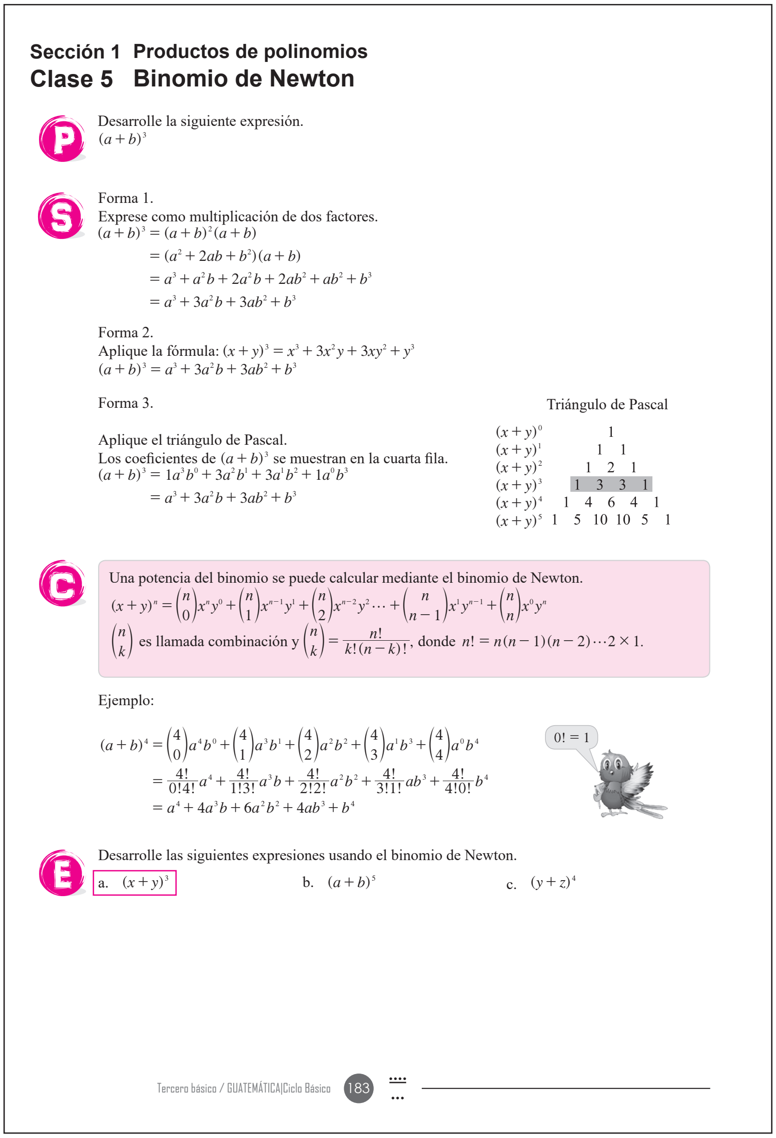
Ⓒ Para desarrollar $(x+y)^n$:
- Los coeficientes de los términos se obtienen en la fila $(n+1)$ del triángulo de Pascal.
- La suma de los exponentes en cada término es igual a n.

Ejemplo:
$(a-b)^5$
$= 1a^5 + 5a^4 \times (-b)^1 + 10a^3 \times (-b)^2 + 10a^2 \times (-b)^3$
$+ 5a^1 \times (-b)^4 + 1 \times (-b)^5$
$= 1\boxed{a^5} - 5\boxed{a^4b^1} + 10\boxed{a^3b^2} - 10\boxed{a^2b^3} + 5\boxed{a^1b^4} - 1\boxed{b^5}$
$= a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

Ⓔ Desarrolle la expresión usando el triángulo de Pascal.
a. $(a-b)^4$
$= 1a^4 - 4a^3b^1 + 6a^2b^2 - 4a^1b^3 + 1b^4$
$= a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$

Clase 5 Binomio de Newton

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto de la forma $(x+y)^n$ usando el binomio de Newton.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 5 Binomio de Newton

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(a+b)^3$

S Forma 1.
Exprese como multiplicación de dos factores.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+a^2b+2a^2b+2ab^2+ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Forma 2.
Aplique la fórmula: $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Forma 3.

Aplique el triángulo de Pascal.
Los coeficientes de $(a+b)^3$ se muestran en la cuarta fila.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1a^3b^0+3a^2b^1+3a^1b^2+1a^0b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Triángulo de Pascal

$(x+y)^0$	1
$(x+y)^1$	1 1
$(x+y)^2$	1 2 1
$(x+y)^3$	1 3 3 1
$(x+y)^4$	1 4 6 4 1
$(x+y)^5$	1 5 10 10 5 1

C Una potencia del binomio se puede calcular mediante el binomio de Newton.

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n$$

$\binom{n}{k}$ es llamada combinación y $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots2\times1$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0+\binom{4}{1}a^3b^1+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}a^1b^3+\binom{4}{4}a^0b^4\\ &= \frac{4!}{0!4!}a^4+\frac{4!}{1!3!}a^3b+\frac{4!}{2!2!}a^2b^2+\frac{4!}{3!1!}ab^3+\frac{4!}{4!0!}b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

$0! = 1$

E Desarrolle las siguientes expresiones usando el binomio de Newton.
a. $(x+y)^3$
b. $(a+b)^5$
c. $(y+z)^4$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 183

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+y)^3$

$$\begin{aligned}&= \binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3\\ &= \frac{3!}{0!3!}x^3+\frac{3!}{1!2!}x^2y+\frac{3!}{2!1!}xy^2+\frac{3!}{3!0!}y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

b. $(a+b)^5$

$$\begin{aligned}&= \binom{5}{0}a^5b^0+\binom{5}{1}a^4b^1+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3\\ &\quad+\binom{5}{4}a^1b^4+\binom{5}{5}a^0b^5\\ &= \frac{5!}{0!5!}a^5+\frac{5!}{1!4!}a^4b+\frac{5!}{2!3!}a^3b^2+\frac{5!}{3!2!}a^2b^3\\ &\quad+\frac{5!}{4!1!}ab^4+\frac{5!}{5!0!}b^5\\ &= a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5\end{aligned}$$

c. $(y+z)^4$

$$\begin{aligned}&= \binom{4}{0}y^4z^0+\binom{4}{1}y^3z^1+\binom{4}{2}y^2z^2+\binom{4}{3}y^1z^3+\binom{4}{4}y^0z^4\\ &= \frac{4!}{0!4!}y^4+\frac{4!}{1!3!}y^3z+\frac{4!}{2!2!}y^2z^2+\frac{4!}{3!1!}yz^3+\frac{4!}{4!0!}z^4\\ &= y^4+4y^3z+6y^2z^2+4yz^3+z^4\end{aligned}$$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-5 Binomio de Newton

Ⓟ Desarrolle.
$(a+b)^3$

Ⓢ Forma 1. Se multiplican dos factores.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Forma 2. Se aplica la fórmula.
$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.

$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

Forma 3. Se aplica el triángulo de Pascal.
Los coeficientes de $(a+b)^3$ se muestran en la cuarta fila.

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= 1a^3b^0+3a^2b^1+3a^1b^2+1a^0b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

Ⓒ Binomio de Newton

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^ny^0+\binom{n}{1}x^{n-1}y^1+\binom{n}{2}x^{n-2}y^2\cdots+\binom{n}{n-1}x^1y^{n-1}+\binom{n}{n}x^0y^n$$

$\binom{n}{k}$ es llamada combinación y $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, donde $n! = n(n-1)(n-2)\cdots2\times1$.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4b^0+\binom{4}{1}a^3b^1+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}a^1b^3+\binom{4}{4}a^0b^4\\ &= \frac{4!}{0!4!}a^4+\frac{4!}{1!3!}a^3b+\frac{4!}{2!2!}a^2b^2+\frac{4!}{3!1!}ab^3+\frac{4!}{4!0!}b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

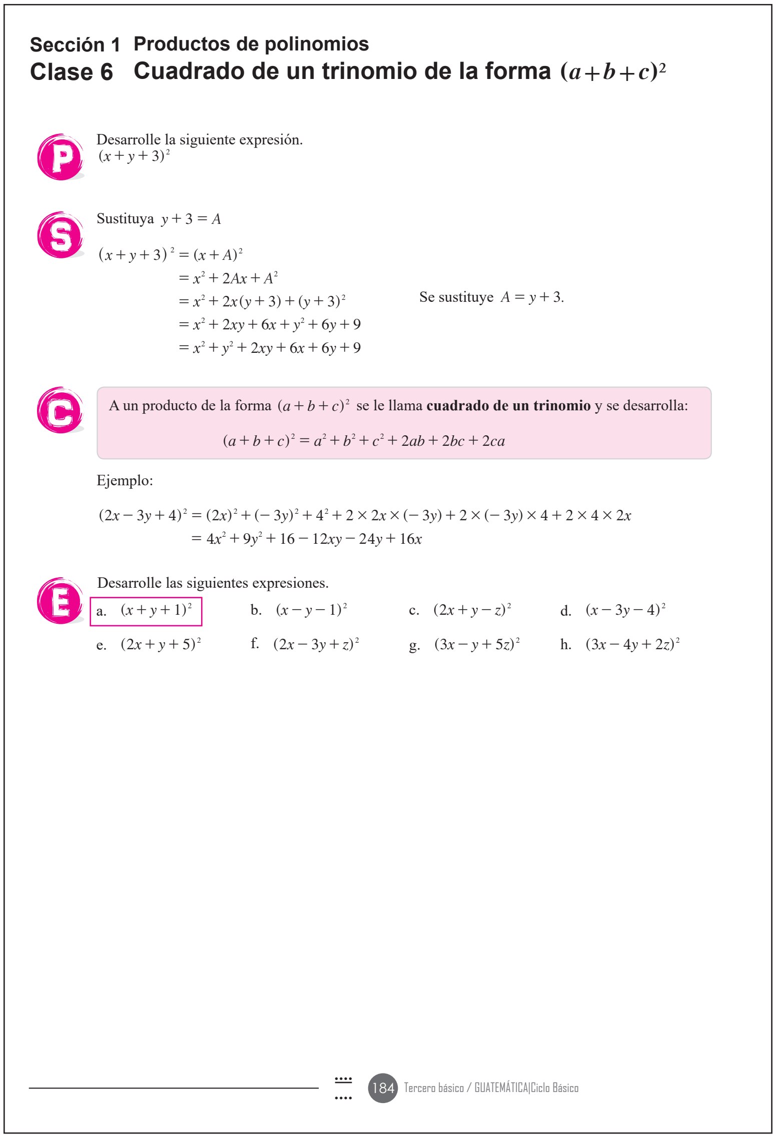
$\boxed{0! = 1}$

Ⓔ Desarrolle la expresión usando el binomio de Newton.
a. $(x+y)^3$

$$\begin{aligned}&= \binom{3}{0}x^3y^0+\binom{3}{1}x^2y^1+\binom{3}{2}x^1y^2+\binom{3}{3}x^0y^3\\ &= \frac{3!}{0!3!}x^3+\frac{3!}{1!2!}x^2y+\frac{3!}{2!1!}xy^2+\frac{3!}{3!0!}y^3\\ &= x^3+3x^2y+3xy^2+y^3\end{aligned}$$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a+b+c)^2$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla un producto de la forma $(a+b+c)^2$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a+b+c)^2$

P Desarrolle la siguiente expresión.
$(x+y+3)^2$

S Sustituya $y+3=A$

$$\begin{aligned}(x+y+3)^2 &= (x+A)^2\\ &= x^2+2Ax+A^2\\ &= x^2+2x(y+3)+(y+3)^2 \quad \text{Se sustituye } A=y+3.\\ &= x^2+2xy+6x+y^2+6y+9\\ &= x^2+y^2+2xy+6x+6y+9\end{aligned}$$

C A un producto de la forma $(a+b+c)^2$ se le llama **cuadrado de un trinomio** y se desarrolla:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}(2x-3y+4)^2 &= (2x)^2+(-3y)^2+4^2+2\times 2x\times(-3y)+2\times(-3y)\times 4+2\times 4\times 2x\\ &= 4x^2+9y^2+16-12xy-24y+16x\end{aligned}$$

E Desarrolle las siguientes expresiones.

a. $\boxed{(x+y+1)^2}$ b. $(x-y-1)^2$ c. $(2x+y-z)^2$ d. $(x-3y-4)^2$
e. $(2x+y+5)^2$ f. $(2x-3y+z)^2$ g. $(3x-y+5z)^2$ h. $(3x-4y+2z)^2$

184 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+y+1)^2$
$=x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times 1+2\times 1\times x$
$=x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$

b. $(x-y-1)^2$
$=x^2+(-y)^2+(-1)^2+2\times x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times(-1)+2\times(-1)\times x$
$=x^2+y^2+1-2xy+2y-2x$

c. $(2x+y-z)^2$
$=(2x)^2+y^2+(-z)^2+2\times 2x\times y+2\times y\times(-z)$
$+2\times(-z)\times 2x$
$=4x^2+y^2+z^2+4xy-2yz-4xz$

d. $(x-3y-4)^2$
$=x^2+(-3y)^2+(-4)^2+2\times x\times(-3y)$
$+2\times(-3y)\times(-4)+2\times(-4)\times x$
$=x^2+9y^2+16-6xy+24y-8x$

e. $(2x+y+5)^2$
$=(2x)^2+y^2+5^2+2\times 2x\times y+2\times y\times 5+2\times 5\times 2x$
$=4x^2+y^2+25+4xy+10y+20x$

f. $(2x-3y+z)^2$
$=(2x)^2+(-3y)^2+z^2+2\times 2x\times(-3y)$
$+2\times(-3y)\times z+2\times 2x\times z$
$=4x^2+9y^2+z^2-12xy-6yz+4xz$

g. $(3x-y+5z)^2$
$=(3x)^2+(-y)^2+(5z)^2+2\times 3x\times(-y)$
$+2\times(-y)\times 5z+2\times 5z\times 3x$
$=9x^2+y^2+25z^2-6xy-10yz+30xz$

h. $(3x-4y+2z)^2$
$=(3x)^2+(-4y)^2+(2z)^2+2\times 3x\times(-4y)$
$+2\times(-4y)\times 2z+2\times 2z\times 3x$
$=9x^2+16y^2+4z^2-24xy-16yz+12xz$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-6 Cuadrado de un trinomio de la forma $(a+b+c)^2$

Ⓟ Desarrolle.
$(x+y+3)^2$

Ⓢ $$\begin{aligned}(x+y+3)^2 &= (x+A)^2\\ &= x^2+2Ax+A^2\\ &= x^2+2x(y+3)+(y+3)^2\\ &= x^2+2xy+6x+y^2+6y+9\\ &= x^2+y^2+2xy+6x+6y+9\end{aligned}$$

Ⓒ A un producto de la forma $(a+b+c)^2$ se le llama cuadrado de un trinomio.
$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

Ejemplo:

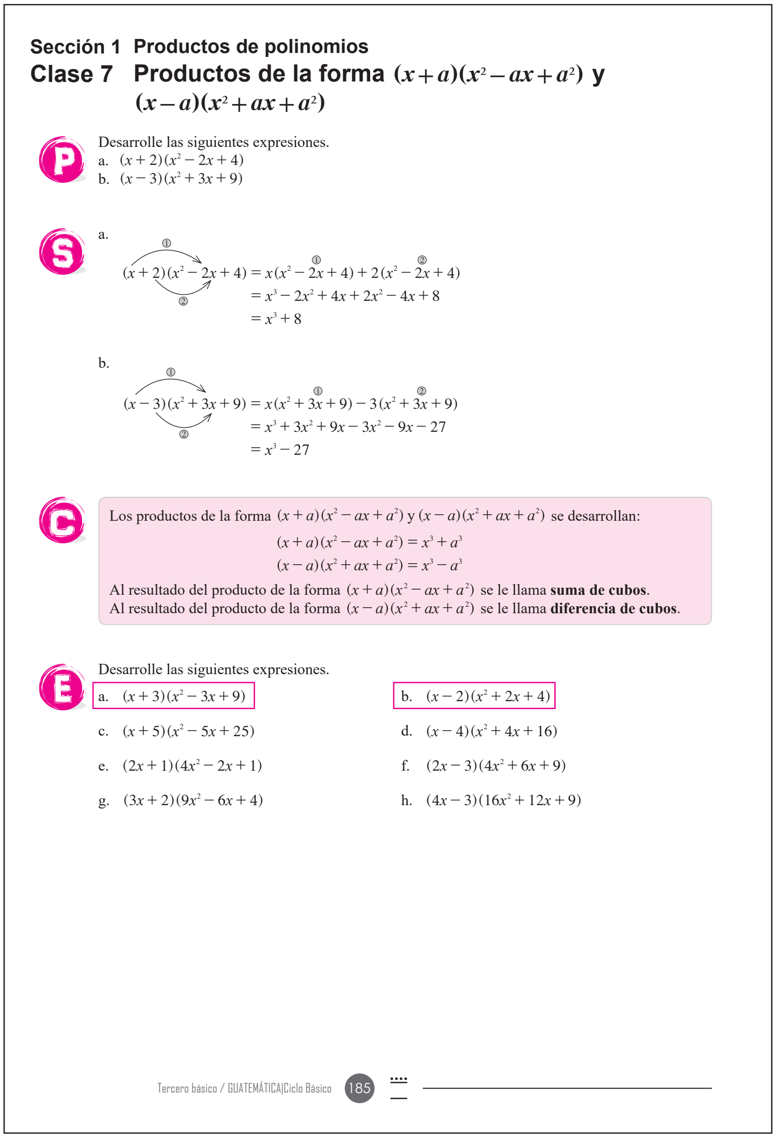
$(2x-3y+4)^2$
$=(2x)^2+(-3y)^2+4^2+2\times 2x\times(-3y)+2\times(-3y)\times 4+2\times 4\times 2x$
$=4x^2+9y^2+16-12xy-24y+16x$

Ⓔ Desarrolle.

a. $(x+y+1)^2$
$=x^2+y^2+1^2+2\times x\times y+2\times y\times 1+2\times 1\times x$
$=x^2+y^2+1+2xy+2y+2x$

Sección 1 Productos de polinomios
Clase 7 Productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

Aprendizaje esperado:
Desarrolla productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$.



Sección 1 Productos de polinomios
Clase 7 Productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

P Desarrolle las siguientes expresiones.
a. $(x+2)(x^2-2x+4)$
b. $(x-3)(x^2+3x+9)$

S a.
$$\underset{\textcircled{2}}{\overset{\textcircled{1}}{(x+2)(x^2-2x+4)}} = x(x^2-\overset{\textcircled{1}}{2}x+4)+2(x^2-\overset{\textcircled{2}}{2}x+4)$$
$$= x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$$
$$= x^3+8$$

b.
$$\underset{\textcircled{2}}{\overset{\textcircled{1}}{(x-3)(x^2+3x+9)}} = x(x^2+\overset{\textcircled{1}}{3}x+9)-3(x^2+\overset{\textcircled{2}}{3}x+9)$$
$$= x^3+3x^2+9x-3x^2-9x-27$$
$$= x^3-27$$

C Los productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ se desarrollan:
$$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$$
$$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$$
Al resultado del producto de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ se le llama **suma de cubos**.
Al resultado del producto de la forma $(x-a)(x^2+ax+a^2)$ se le llama **diferencia de cubos**.

E Desarrolle las siguientes expresiones.
a. $\boxed{(x+3)(x^2-3x+9)}$
b. $\boxed{(x-2)(x^2+2x+4)}$
c. $(x+5)(x^2-5x+25)$
d. $(x-4)(x^2+4x+16)$
e. $(2x+1)(4x^2-2x+1)$
f. $(2x-3)(4x^2+6x+9)$
g. $(3x+2)(9x^2-6x+4)$
h. $(4x-3)(16x^2+12x+9)$

Solucionario de los ejercicios:

a. $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+27$
b. $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$
c. $(x+5)(x^2-5x+25)=x^3+125$
d. $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3-64$
e. $(2x+1)(4x^2-2x+1)=8x^3+1$
f. $(2x-3)(4x^2+6x+9)=8x^3-27$
g. $(3x+2)(9x^2-6x+4)=27x^3+8$
h. $(4x-3)(16x^2+12x+9)=64x^3-27$

Fecha: dd–mm–aa
8-1-7 Productos de la forma $(x+a)(x^2-ax+a^2)$ y $(x-a)(x^2+ax+a^2)$

Ⓟ Desarrolle.
a. $(x+2)(x^2-2x+4)$
b. $(x-3)(x^2+3x+9)$

Ⓢ
a. $$\underset{\textcircled{2}}{\overset{\textcircled{1}}{(x+2)(x^2-2x+4)}} = \overset{\textcircled{1}}{x(x^2-2x+4)}+\overset{\textcircled{2}}{2(x^2-2x+4)}$$
$$= x^3-2x^2+4x+2x^2-4x+8$$
$$= x^3+8$$

b. $$\underset{\textcircled{2}}{\overset{\textcircled{1}}{(x-3)(x^2+3x+9)}} = \overset{\textcircled{1}}{x(x^2+3x+9)}-\overset{\textcircled{2}}{3(x^2+3x+9)}$$
$$= x^3+3x^2+9x-3x^2-9x-27$$
$$= x^3-27$$

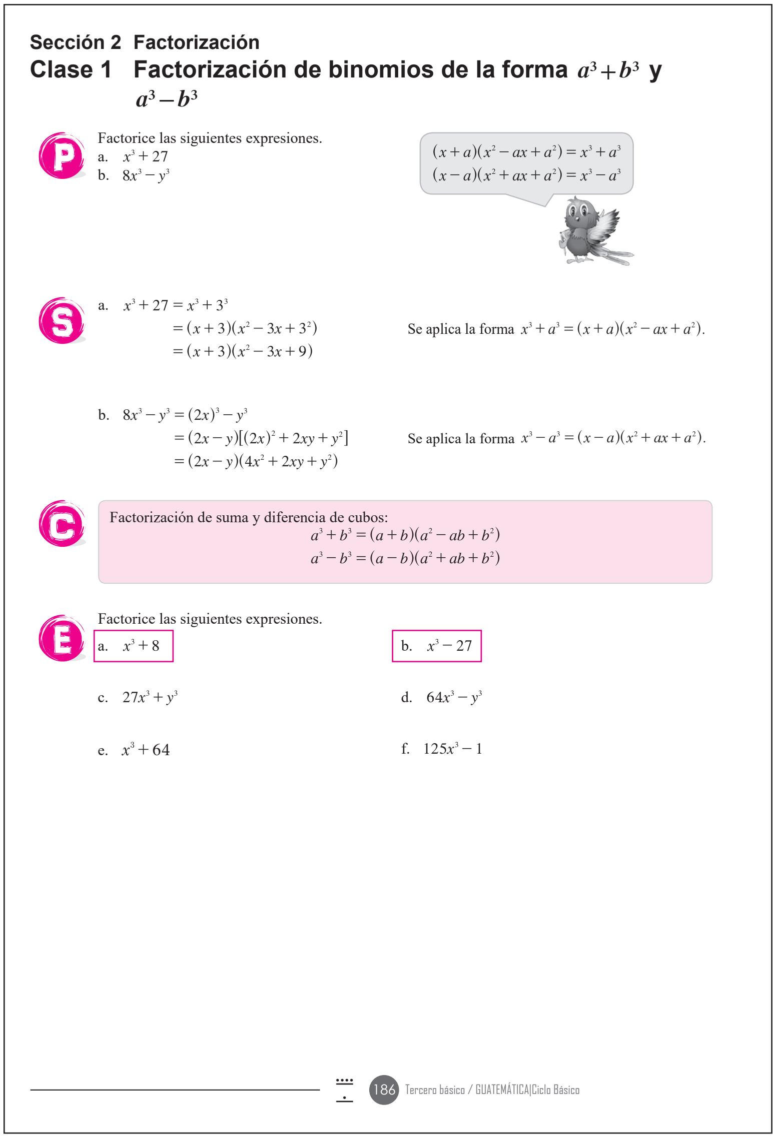
Ⓒ $(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$
Al resultado del producto se le llama suma de cubos.
$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$
Al resultado del producto se le llama diferencia de cubos.

Ⓔ Desarrolle.
a. $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+27$

b. $(x-2)(x^2+2x+4)=x^3-8$

Sección 2 Factorización
Clase 1 Factorización de binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3

Aprendizaje esperado:
Factoriza binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3.



Sección 2 Factorización
Clase 1 Factorización de binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3

P Factorice las siguientes expresiones.
a. x^3+27
b. $8x^3-y^3$

$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$
$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$

S a. $x^3+27=x^3+3^3$
$=(x+3)(x^2-3x+3^2)$ Se aplica la forma $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$.
$=(x+3)(x^2-3x+9)$

b. $8x^3-y^3=(2x)^3-y^3$
$=(2x-y)[(2x)^2+2xy+y^2]$ Se aplica la forma $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$.
$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

C Factorización de suma y diferencia de cubos:
$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

E Factorice las siguientes expresiones.
a. x^3+8 b. x^3-27
c. $27x^3+y^3$ d. $64x^3-y^3$
e. x^3+64 f. $125x^3-1$

186 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$
b. $x^3-27=x^3-3^3=(x-3)(x^2+3x+9)$
c. $27x^3+y^3=(3x)^3+y^3=(3x+y)(9x^2-3xy+y^2)$
d. $64x^3-y^3=(4x)^3-y^3=(4x-y)(16x^2+4xy+y^2)$
e. $x^3+64=x^3+4^3=(x+4)(x^2-4x+16)$
f. $125x^3-1=(5x)^3-1^3=(5x-1)(25x^2+5x+1)$

Fecha: dd–mm–aa
8-2-1 Factorización de binomios de la forma a^3+b^3 y a^3-b^3

Ⓟ Factorice.
a. x^3+27
b. $8x^3-y^3$

$(x+a)(x^2-ax+a^2)=x^3+a^3$
$(x-a)(x^2+ax+a^2)=x^3-a^3$

Ⓢ a. $x^3+27=x^3+3^3$
$=(x+3)(x^2-3x+3^2)$ Se aplica $x^3+a^3=(x+a)(x^2-ax+a^2)$.
$=(x+3)(x^2-3x+9)$

b. $8x^3-y^3=(2x)^3-y^3$
$=(2x-y)[(2x)^2+2xy+y^2]$ Se aplica $x^3-a^3=(x-a)(x^2+ax+a^2)$.
$=(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$

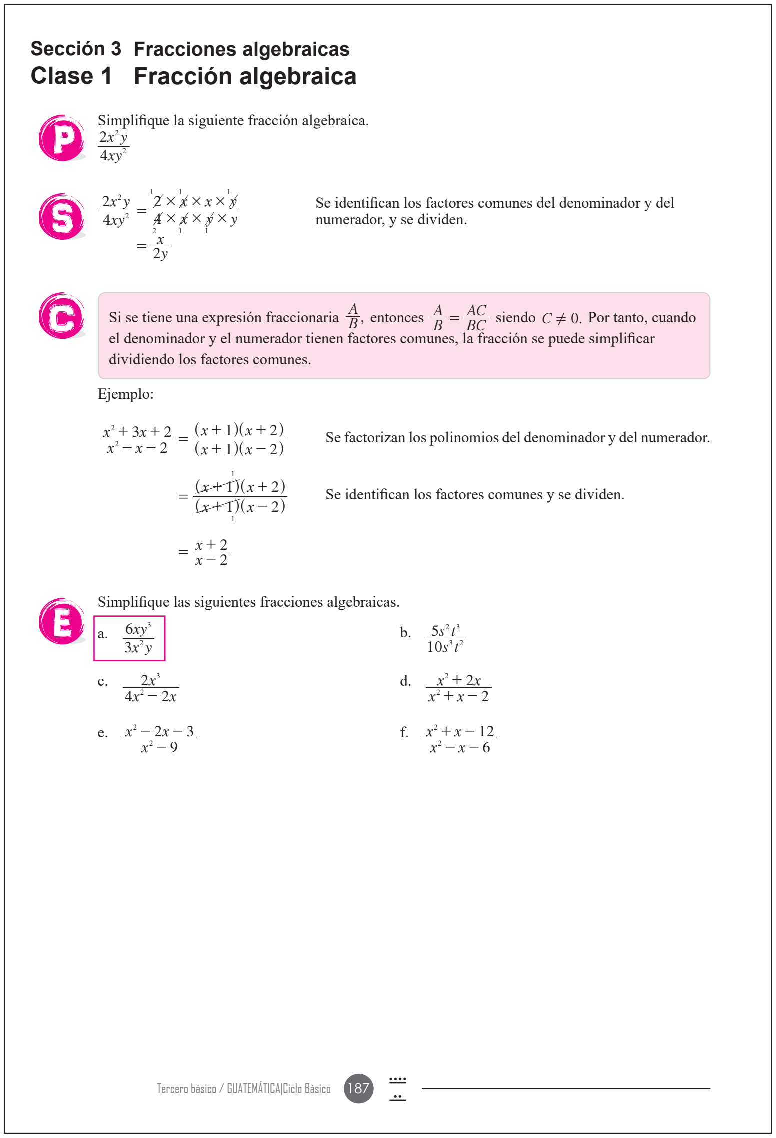
Ⓒ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$
$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

Ⓔ Factorice.
a. x^3+8
$=x^3+2^3$
$=(x+2)(x^2-2x+4)$

b. x^3-27
$=x^3-3^3$
$=(x-3)(x^2+3x+9)$

Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 1 Fracción algebraica

Aprendizaje esperado:
Simplifica una fracción algebraica.



Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 1 Fracción algebraica

P Simplifique la siguiente fracción algebraica.

$$\frac{2x^2y}{4xy^2}$$

S

$$\frac{2x^2y}{4xy^2} = \frac{\overset{1}{\cancel{2}}\times\overset{1}{\cancel{x}}\times x\times\overset{1}{\cancel{y}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\times\underset{1}{\cancel{x}}\times\underset{1}{\cancel{y}}\times y}$$
$$= \frac{x}{2y}$$

Se identifican los factores comunes del denominador y del numerador, y se dividen.

C Si se tiene una expresión fraccionaria $\frac{A}{B}$, entonces $\frac{A}{B}=\frac{AC}{BC}$ siendo $C \neq 0$. Por tanto, cuando el denominador y el numerador tienen factores comunes, la fracción se puede simplificar dividiendo los factores comunes.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x+1)}}(x-2)}$$

Se identifican los factores comunes y se dividen.

$$= \frac{x+2}{x-2}$$

E Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\boxed{\frac{6xy^3}{3x^2y}}$

b. $\frac{5s^2t^3}{10s^3t^2}$

c. $\frac{2x^3}{4x^2-2x}$

d. $\frac{x^2+2x}{x^2+x-2}$

e. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9}$

f. $\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6}$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 187

Solucionario de los ejercicios:

a. $\frac{6xy^3}{3x^2y} = \frac{\cancel{6}^2\times\cancel{x}\times\cancel{y}\times y\times y}{\cancel{3}^1\times\cancel{x}\times x\times\cancel{y}} = \frac{2y^2}{x}$

b. $\frac{5s^2t^3}{10s^3t^2} = \frac{\cancel{5}^1\times\cancel{s}\times\cancel{s}\times\cancel{t}\times\cancel{t}\times t}{\cancel{10}^2\times\cancel{s}\times\cancel{s}\times s\times\cancel{t}\times\cancel{t}} = \frac{t}{2s}$

c. $\frac{2x^3}{4x^2-2x} = \frac{2\times x\times x\times x}{2x(2x-1)} = \frac{\cancel{2}\times\cancel{x}\times x\times x}{\cancel{2}\times\cancel{x}\times(2x-1)}$

$= \frac{x^2}{2x-1}$

d. $\frac{x^2+2x}{x^2+x-2} = \frac{x\cancel{(x+2)}}{(x-1)\cancel{(x+2)}} = \frac{x}{x-1}$

e. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-9} = \frac{\cancel{(x-3)}(x+1)}{(x+3)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+1}{x+3}$

f. $\frac{x^2+x-12}{x^2-x-6} = \frac{(x+4)\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} = \frac{x+4}{x+2}$

Fecha: dd–mm–aa
8-3-1 Fracción algebraica

Ⓟ Simplifique.

$$\frac{2x^2y}{4xy^2}$$

Ⓢ

$$\frac{2x^2y}{4xy^2} = \frac{{}^1\cancel{2}\times{}^1\cancel{x}\times x\times{}^1\cancel{y}}{{}_2\cancel{4}\times\cancel{x}_1\times\cancel{y}_1\times y}$$
$$= \frac{x}{2y}$$

Ⓒ Cuando el denominador y el numerador de una expresión fraccionaria tienen factores comunes, la fracción se puede simplificar dividiendo los factores comunes.

Ejemplo:

$$\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-2} = \frac{\overset{1}{\cancel{(x+1)}}(x+2)}{\underset{1}{\cancel{(x+1)}}(x-2)}$$

Se factorizan el denominador y el numerador y se dividen los factores comunes.

$$= \frac{x+2}{x-2}$$

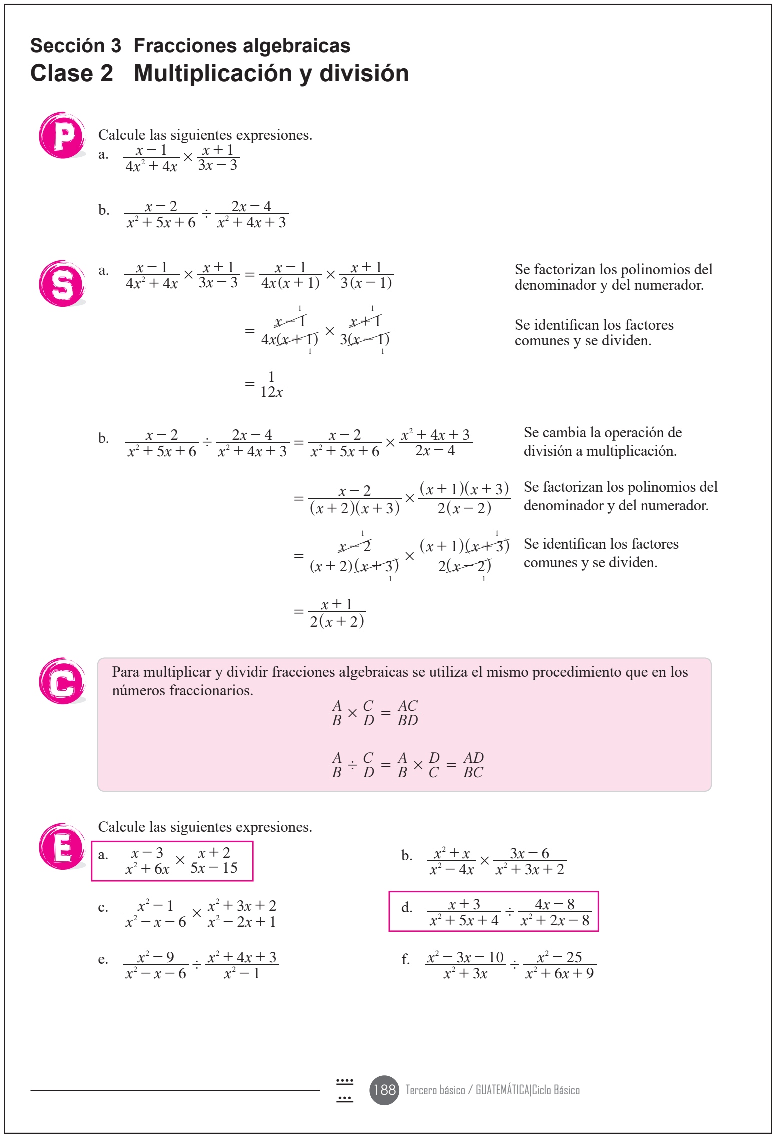
Ⓔ Simplifique.

a. $\frac{6xy^3}{3x^2y} = \frac{{}^2\cancel{6}\times{}^1\cancel{x}\times{}^1\cancel{y}\times y\times y}{{}_1\cancel{3}\times{}_1\cancel{x}\times x\times{}_1\cancel{y}}$

$= \frac{2y^2}{x}$

Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 2 Multiplicación y división

Aprendizaje esperado:
Multiplica fracciones algebraicas.
Divide fracciones algebraicas.



Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 2 Multiplicación y división

P Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3}$

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3}$

S a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3} = \frac{x-1}{4x(x+1)} \times \frac{x+1}{3(x-1)}$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{4x\underset{1}{\cancel{(x+1)}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{x+1}}}{3\underset{1}{\cancel{(x-1)}}}$

Se identifican los factores comunes y se dividen.

$= \frac{1}{12x}$

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3} = \frac{x-2}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+4x+3}{2x-4}$

Se cambia la operación de división a multiplicación.

$= \frac{x-2}{(x+2)(x+3)} \times \frac{(x+1)(x+3)}{2(x-2)}$

Se factorizan los polinomios del denominador y del numerador.

$= \frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{(x+2)\underset{1}{\cancel{(x+3)}}} \times \frac{(x+1)\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-2)}}}$

Se identifican los factores comunes y se dividen.

$= \frac{x+1}{2(x+2)}$

C Para multiplicar y dividir fracciones algebraicas se utiliza el mismo procedimiento que en los números fraccionarios.

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

E Calcule las siguientes expresiones.

a. $\boxed{\frac{x-3}{x^2+6x} \times \frac{x+2}{5x-15}}$

b. $\frac{x^2+x}{x^2-4x} \times \frac{3x-6}{x^2+3x+2}$

c. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$

d. $\boxed{\frac{x+3}{x^2+5x+4} \div \frac{4x-8}{x^2+2x-8}}$

e. $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-1}$

f. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x} \div \frac{x^2-25}{x^2+6x+9}$

188 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $\frac{x-3}{x^2+6x} \times \frac{x+2}{5x-15} = \frac{\cancel{x-3}}{x(x+6)} \times \frac{x+2}{5\cancel{(x-3)}} = \frac{x+2}{5x(x+6)}$

b. $\frac{x^2+x}{x^2-4x} \times \frac{3x-6}{x^2+3x+2} = \frac{\cancel{x}\cancel{(x+1)}}{\cancel{x}(x-4)} \times \frac{3(x-2)}{\cancel{(x+1)}(x+2)}$

$= \frac{3(x-2)}{(x-4)(x+2)}$

c. $\frac{x^2-1}{x^2-x-6} \times \frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+1}$

$= \frac{(x+1)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x+2)}(x-3)} \times \frac{(x+1)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x-1)}(x-1)} = \frac{(x+1)^2}{(x-3)(x-1)}$

d. $\frac{x+3}{x^2+5x+4} \div \frac{4x-8}{x^2+2x-8} = \frac{x+3}{x^2+5x+4} \times \frac{x^2+2x-8}{4x-8}$

$= \frac{x+3}{(x+1)\cancel{(x+4)}} \times \frac{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+4)}}{4\cancel{(x-2)}} = \frac{x+3}{4(x+1)}$

e. $\frac{x^2-9}{x^2-x-6} \div \frac{x^2+4x+3}{x^2-1} = \frac{x^2-9}{x^2-x-6} \times \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$

$= \frac{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}}{(x+2)\cancel{(x-3)}} \times \frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}\cancel{(x+3)}} = \frac{x-1}{x+2}$

f. $\frac{x^2-3x-10}{x^2+3x} \div \frac{x^2-25}{x^2+6x+9}$

$= \frac{x^2-3x-10}{x^2+3x} \times \frac{x^2+6x+9}{x^2-25}$

$= \frac{(x+2)\cancel{(x-5)}}{x\cancel{(x+3)}} \times \frac{(x+3)\cancel{(x+3)}}{(x+5)\cancel{(x-5)}} = \frac{(x+2)(x+3)}{x(x+5)}$

Fecha: dd–mm–aa
8-3-2 Multiplicación y división

Ⓟ Calcule.

a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3}$

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3}$

Ⓢ a. $\frac{x-1}{4x^2+4x} \times \frac{x+1}{3x-3} = \frac{\overset{1}{\cancel{x-1}}}{4x\underset{1}{\cancel{(x+1)}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{x+1}}}{3\underset{1}{\cancel{(x-1)}}}$

$= \frac{1}{12x}$

b. $\frac{x-2}{x^2+5x+6} \div \frac{2x-4}{x^2+4x+3} = \frac{x-2}{x^2+5x+6} \times \frac{x^2+4x+3}{2x-4}$

$= \frac{\overset{1}{\cancel{x-2}}}{(x+2)\underset{1}{\cancel{(x+3)}}} \times \frac{(x+1)\overset{1}{\cancel{(x+3)}}}{2\underset{1}{\cancel{(x-2)}}}$

$= \frac{x+1}{2(x+2)}$

Ⓒ

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC}$$

Ⓔ Calcule.

a. $\frac{x-3}{x^2+6x} \times \frac{x+2}{5x-15} = \frac{\overset{1}{\cancel{x-3}}}{x(x+6)} \times \frac{x+2}{5\underset{1}{\cancel{(x-3)}}}$

$= \frac{x+2}{5x(x+6)}$

d. $\frac{x+3}{x^2+5x+4} \div \frac{4x-8}{x^2+2x-8}$

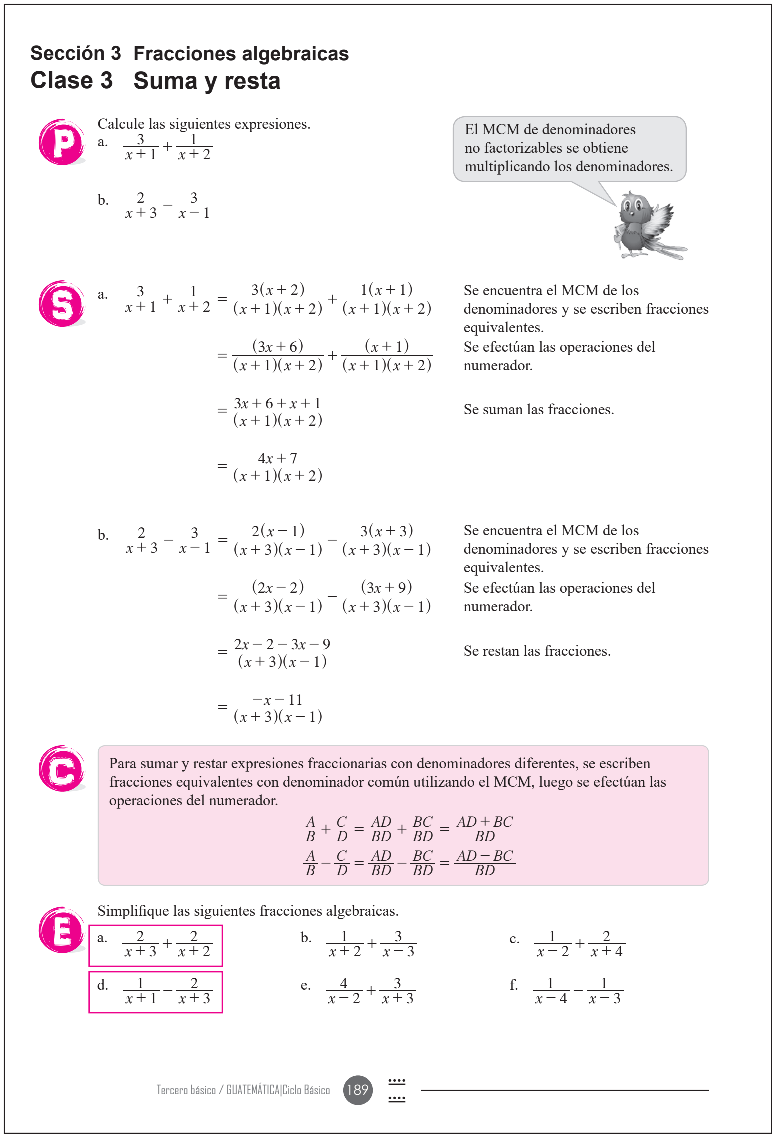
$= \frac{x+3}{x^2+5x+4} \times \frac{x^2+2x-8}{4x-8}$

$= \frac{x+3}{(x+1)\underset{1}{\cancel{(x+4)}}} \times \frac{\overset{1}{\cancel{(x-2)}}\overset{1}{\cancel{(x+4)}}}{4\underset{1}{\cancel{(x-2)}}}$

$= \frac{x+3}{4(x+1)}$

Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 3 Suma y resta

Aprendizaje esperado:
Suma fracciones algebraicas.
Resta fracciones algebraicas.



Sección 3 Fracciones algebraicas
Clase 3 Suma y resta

P Calcule las siguientes expresiones.

a. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

b. $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-1}$

El MCM de denominadores no factorizables se obtiene multiplicando los denominadores.

S a. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}=\frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)}+\frac{1(x+1)}{(x+1)(x+2)}$ Se encuentra el MCM de los denominadores y se escriben fracciones equivalentes.

$=\frac{(3x+6)}{(x+1)(x+2)}+\frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)}$ Se efectúan las operaciones del numerador.

$=\frac{3x+6+x+1}{(x+1)(x+2)}$ Se suman las fracciones.

$=\frac{4x+7}{(x+1)(x+2)}$

b. $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x+3)(x-1)}-\frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)}$ Se encuentra el MCM de los denominadores y se escriben fracciones equivalentes.

$=\frac{(2x-2)}{(x+3)(x-1)}-\frac{(3x+9)}{(x+3)(x-1)}$ Se efectúan las operaciones del numerador.

$=\frac{2x-2-3x-9}{(x+3)(x-1)}$ Se restan las fracciones.

$=\frac{-x-11}{(x+3)(x-1)}$

C Para sumar y restar expresiones fraccionarias con denominadores diferentes, se escriben fracciones equivalentes con denominador común utilizando el MCM, luego se efectúan las operaciones del numerador.

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD+BC}{BD}$$
$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}-\frac{BC}{BD}=\frac{AD-BC}{BD}$$

E Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.

a. $\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+2}$
b. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-3}$
c. $\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+4}$
d. $\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+3}$
e. $\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x+3}$
f. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 189

Solucionario de los ejercicios:

a. $$\begin{aligned}\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+2}&=\frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)}+\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+2)}\\&=\frac{2x+4}{(x+3)(x+2)}+\frac{2x+6}{(x+3)(x+2)}\\&=\frac{2x+4+2x+6}{(x+3)(x+2)}\\&=\frac{4x+10}{(x+3)(x+2)}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x-3}&=\frac{x-3}{(x+2)(x-3)}+\frac{3(x+2)}{(x+2)(x-3)}\\&=\frac{x-3}{(x+2)(x-3)}+\frac{3x+6}{(x+2)(x-3)}\\&=\frac{x-3+3x+6}{(x+2)(x-3)}\\&=\frac{4x+3}{(x+2)(x-3)}\end{aligned}$$

c. $$\begin{aligned}\frac{1}{x-2}+\frac{2}{x+4}&=\frac{x+4}{(x-2)(x+4)}+\frac{2(x-2)}{(x-2)(x+4)}\\&=\frac{x+4}{(x-2)(x+4)}+\frac{2x-4}{(x-2)(x+4)}\\&=\frac{x+4+2x-4}{(x-2)(x+4)}\\&=\frac{3x}{(x-2)(x+4)}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+3}&=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{x+3-(2x+2)}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{x+3-2x-2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{-x+1}{(x+1)(x+3)}\end{aligned}$$

Ver ejercicios restantes en la página G244.

Fecha: dd–mm–aa
8-3-3 Suma y resta

Ⓟ Calcule.

a. $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}$

b. $\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-1}$

Ⓢ a. $$\begin{aligned}&\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x+2}\\&=\frac{3(x+2)}{(x+1)(x+2)}+\frac{1(x+1)}{(x+1)(x+2)}\\&=\frac{(3x+6)}{(x+1)(x+2)}+\frac{(x+1)}{(x+1)(x+2)}\\&=\frac{3x+6+x+1}{(x+1)(x+2)}\\&=\frac{4x+7}{(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

b. $$\begin{aligned}&\frac{2}{x+3}-\frac{3}{x-1}\\&=\frac{2(x-1)}{(x+3)(x-1)}-\frac{3(x+3)}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{(2x-2)}{(x+3)(x-1)}-\frac{(3x+9)}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{2x-2-3x-9}{(x+3)(x-1)}\\&=\frac{-x-11}{(x+3)(x-1)}\end{aligned}$$

¡Cuidado con los signos!

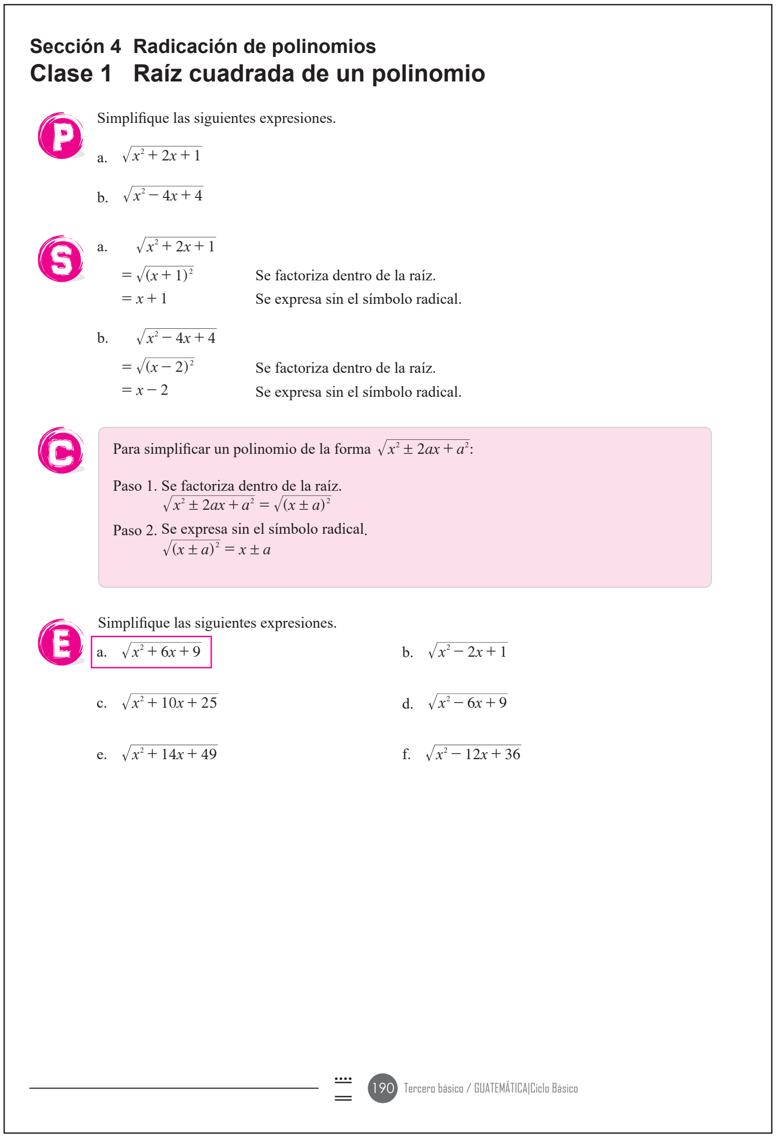
Ⓒ $$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}+\frac{BC}{BD}=\frac{AD+BC}{BD}$$
$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{AD}{BD}-\frac{BC}{BD}=\frac{AD-BC}{BD}$$

Ⓔ a. $$\begin{aligned}&\frac{2}{x+3}+\frac{2}{x+2}\\&=\frac{2(x+2)}{(x+3)(x+2)}+\frac{2(x+3)}{(x+3)(x+2)}\\&=\frac{2x+4}{(x+3)(x+2)}+\frac{2x+6}{(x+3)(x+2)}\\&=\frac{2x+4+2x+6}{(x+3)(x+2)}=\frac{4x+10}{(x+3)(x+2)}\end{aligned}$$

d. $$\begin{aligned}&\frac{1}{x+1}-\frac{2}{x+3}\\&=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2(x+1)}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{x+3}{(x+1)(x+3)}-\frac{2x+2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{x+3-(2x+2)}{(x+1)(x+3)}=\frac{x+3-2x-2}{(x+1)(x+3)}\\&=\frac{-x+1}{(x+1)(x+3)}\end{aligned}$$

Sección 4 Radicación de polinomios
Clase 1 Raíz cuadrada de un polinomio

Aprendizaje esperado:
Simplifica la raíz cuadrada de un polinomio.



Sección 4 Radicación de polinomios

Clase 1 Raíz cuadrada de un polinomio

P Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{x^2+2x+1}$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$

S a. $\sqrt{x^2+2x+1}$

$=\sqrt{(x+1)^2}$ Se factoriza dentro de la raíz.

$=x+1$ Se expresa sin el símbolo radical.

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$

$=\sqrt{(x-2)^2}$ Se factoriza dentro de la raíz.

$=x-2$ Se expresa sin el símbolo radical.

C Para simplificar un polinomio de la forma $\sqrt{x^2\pm 2ax+a^2}$:

Paso 1. Se factoriza dentro de la raíz.
$\sqrt{x^2\pm 2ax+a^2}=\sqrt{(x\pm a)^2}$

Paso 2. Se expresa sin el símbolo radical.
$\sqrt{(x\pm a)^2}=x\pm a$

E Simplifique las siguientes expresiones.

a. $\sqrt{x^2+6x+9}$ b. $\sqrt{x^2-2x+1}$

c. $\sqrt{x^2+10x+25}$ d. $\sqrt{x^2-6x+9}$

e. $\sqrt{x^2+14x+49}$ f. $\sqrt{x^2-12x+36}$

190 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. $\sqrt{x^2+6x+9}=\sqrt{(x+3)^2}=x+3$

b. $\sqrt{x^2-2x+1}=\sqrt{(x-1)^2}=x-1$

c. $\sqrt{x^2+10x+25}=\sqrt{(x+5)^2}=x+5$

d. $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}=x-3$

e. $\sqrt{x^2+14x+49}=\sqrt{(x+7)^2}=x+7$

f. $\sqrt{x^2-12x+36}=\sqrt{(x-6)^2}=x-6$

Fecha: dd–mm–aa
8-4-1 Raíz cuadrada de un polinomio

Ⓟ Simplifique.

a. $\sqrt{x^2+2x+1}$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$

Ⓢ a. $\sqrt{x^2+2x+1}$
$=\sqrt{(x+1)^2}$
$=x+1$

b. $\sqrt{x^2-4x+4}$
$=\sqrt{(x-2)^2}$
$=x-2$

Ⓒ Para simplificar un polinomio de la forma $\sqrt{x^2\pm 2ax+a^2}$:

Paso 1. Se factoriza dentro de la raíz.
$\sqrt{x^2\pm 2ax+a^2}=\sqrt{(x\pm a)^2}$

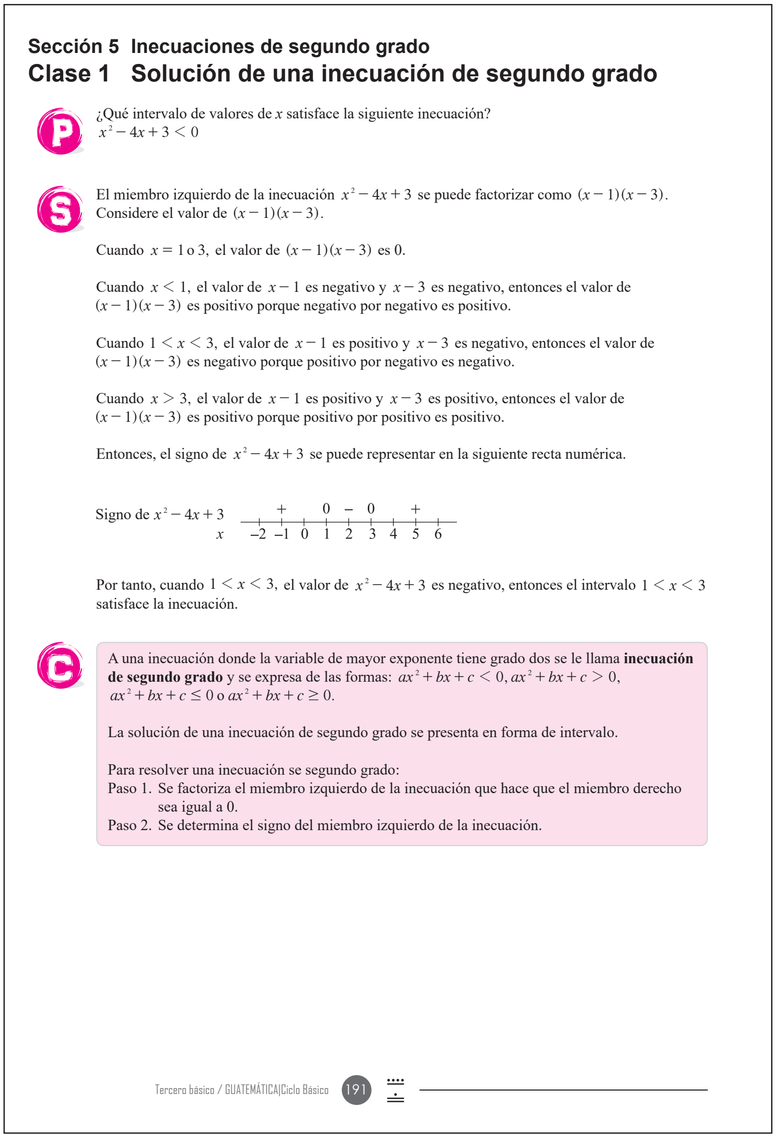
Paso 2. Se expresa sin el símbolo radical.
$\sqrt{(x\pm a)^2}=x\pm a$

Ⓔ Simplifique.

a. $\sqrt{x^2+6x+9}$
$=\sqrt{(x+3)^2}$
$=x+3$

Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 1 Solución de una inecuación de segundo grado

Aprendizaje esperado:
Encuentra el intervalo de valores que satisface una inecuación de segundo grado.



Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 1 Solución de una inecuación de segundo grado

P ¿Qué intervalo de valores de x satisface la siguiente inecuación?
$x^2 - 4x + 3 < 0$

S El miembro izquierdo de la inecuación $x^2 - 4x + 3$ se puede factorizar como $(x-1)(x-3)$.
Considere el valor de $(x-1)(x-3)$.

Cuando $x = 1$ o 3, el valor de $(x-1)(x-3)$ es 0.

Cuando $x < 1$, el valor de $x - 1$ es negativo y $x - 3$ es negativo, entonces el valor de $(x-1)(x-3)$ es positivo porque negativo por negativo es positivo.

Cuando $1 < x < 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es negativo, entonces el valor de $(x-1)(x-3)$ es negativo porque positivo por negativo es negativo.

Cuando $x > 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es positivo, entonces el valor de $(x-1)(x-3)$ es positivo porque positivo por positivo es positivo.

Entonces, el signo de $x^2 - 4x + 3$ se puede representar en la siguiente recta numérica.

Signo de $x^2 - 4x + 3$		+		0	–	0		+	
x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6

Por tanto, cuando $1 < x < 3$, el valor de $x^2 - 4x + 3$ es negativo, entonces el intervalo $1 < x < 3$ satisface la inecuación.

C A una inecuación donde la variable de mayor exponente tiene grado dos se le llama **inecuación de segundo grado** y se expresa de las formas: $ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$ o $ax^2 + bx + c \geq 0$.

La solución de una inecuación de segundo grado se presenta en forma de intervalo.

Para resolver una inecuación se segundo grado:
Paso 1. Se factoriza el miembro izquierdo de la inecuación que hace que el miembro derecho sea igual a 0.
Paso 2. Se determina el signo del miembro izquierdo de la inecuación.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 191

Solucionario de los ejercicios:

a. $x^2 - 6x + 8 < 0$
$(x-2)(x-4) < 0$
Cuando $x = 2, (x-2)(x-4) = 0$
Cuando $x = 4, (x-2)(x-4) = 0$
Cuando $x < 2, (x-2)(x-4) > 0$
Cuando $2 < x < 4, (x-2)(x-4) < 0$
Cuando $x > 4, (x-2)(x-4) > 0$

Signo de $x^2 - 6x + 8$		+	0	–	0	+	
x	0	1	2	3	4	5	6

Por tanto, la solución es $2 < x < 4$.

b. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$
$(x+1)(x-3) \geq 0$
Cuando $x = -1, (x+1)(x-3) = 0$
Cuando $x = 3, (x+1)(x-3) = 0$
Cuando $x \leq -1, (x+1)(x-3) \geq 0$
Cuando $-1 \leq x \leq 3, (x+1)(x-3) \leq 0$
Cuando $x \geq 3, (x+1)(x-3) \geq 0$

Signo de $x^2 - 2x - 3$		+	0		–		0	+	
x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5

Por tanto, la solución es $x \leq -1$ y $x \geq 3$.

Fecha: dd–mm–aa
8-5-1 Solución de una inecuación de segundo grado

Ⓟ ¿Qué intervalo de valores de x satisface la inecuación $x^2 - 4x + 3 < 0$?

Ⓢ $x^2 - 4x + 3$ se puede factorizar como $(x-1)(x-3)$.
Considere el valor de $(x-1)(x-3)$.
Cuando $x = 1$ o 3, el valor de $(x-1)(x-3)$ es 0.
Cuando $x < 1$, el valor de $x - 1$ es negativo y $x - 3$ es negativo. Entonces, el valor de $(x-1)(x-3)$ es positivo.
Cuando $1 < x < 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es negativo. Entonces, el valor de $(x-1)(x-3)$ es negativo.
Cuando $x > 3$, el valor de $x - 1$ es positivo y $x - 3$ es positivo. Entonces, el valor de $(x-1)(x-3)$ es positivo.

Valor de $x^2 - 4x + 3$		+		0	–	0		+	
x	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6

Por tanto, cuando $1 < x < 3$, el valor de $x^2 - 4x + 3$ es negativo, entonces el intervalo $1 < x < 3$ satisface la inecuación.

Ⓒ A una inecuación donde la variable de mayor exponente tiene grado dos se le llama inecuación de segundo grado.
La solución de una inecuación de segundo grado se presenta en forma de intervalo.

Ⓔ Resuelva la siguiente inecuación de segundo grado.

a. $x^2 - 6x + 8 < 0$
$(x-2)(x-4) < 0$
Cuando $x = 2, (x-2)(x-4) = 0$
Cuando $x = 4, (x-2)(x-4) = 0$
Cuando $x < 2, (x-2)(x-4) > 0$
Cuando $2 < x < 4, (x-2)(x-4) < 0$
Cuando $x > 4, (x-2)(x-4) > 0$

Signo de $x^2 - 6x + 8$		+	0	–	0	+	
x	0	1	2	3	4	5	6

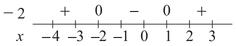
Por tanto, la solución es $2 < x < 4$.

Ejemplo:

$x^2 + x - 2 \geq 0$
$(x-1)(x+2) \geq 0$

Cuando $x = -2, (x-1)(x+2) = 0$
Cuando $x = 1, (x-1)(x+2) = 0$
Cuando $x < -2, (x-1)(x+2) > 0$
Cuando $-2 < x < 1, (x-1)(x+2) < 0$
Cuando $x > 1, (x-1)(x+2) > 0$

Signo de $x^2 + x - 2$



$x^2 + x - 2 \geq 0$ significa que se incluye cuando $x^2 + x - 2 = 0$. Entonces, se incluye $x = -2$ y $x = 1$ en el intervalo.

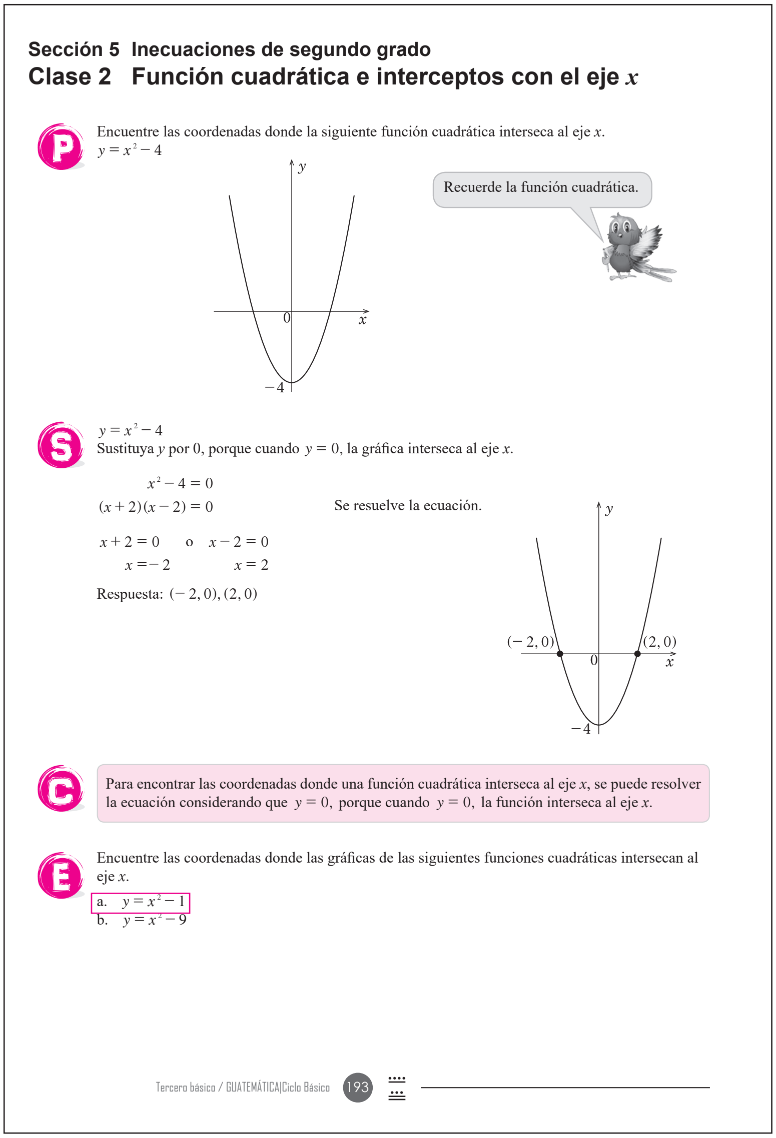
Por tanto, la solución para la inecuación $x^2 + x - 2 \geq 0$ es $x \leq -2$ o $x \geq 1$.

Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.

a. $\boxed{x^2 - 6x + 8 < 0}$
b. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 2 Función cuadrática e interceptos con el eje x

Aprendizaje esperado:
Encuentra los interceptos con el eje x de una función cuadrática.



Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 2 Función cuadrática e interceptos con el eje x

P Encuentre las coordenadas donde la siguiente función cuadrática interseca al eje x.
$y = x^2 - 4$

S $y = x^2 - 4$
Sustituya y por 0, porque cuando $y = 0$, la gráfica interseca al eje x.

$x^2 - 4 = 0$
$(x + 2)(x - 2) = 0$ Se resuelve la ecuación.

$x + 2 = 0$ o $x - 2 = 0$
$x = -2$ $x = 2$

Respuesta: $(-2, 0), (2, 0)$

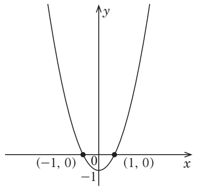
C Para encontrar las coordenadas donde una función cuadrática interseca al eje x, se puede resolver la ecuación considerando que $y = 0$, porque cuando $y = 0$, la función interseca al eje x.

E Encuentre las coordenadas donde las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas intersecan al eje x.
a. $\boxed{y = x^2 - 1}$
b. $y = x^2 - 9$

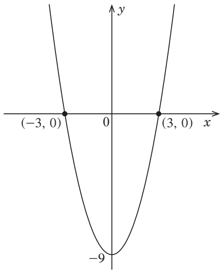
Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 193

Solucionario de los ejercicios:

a. $y = x^2 - 1$
Se sustituye y por 0.
$0 = x^2 - 1$
$x^2 - 1 = 0$
$(x + 1)(x - 1) = 0$
$x + 1 = 0$ o $x - 1 = 0$
$x = -1$ $x = 1$
R: $(-1, 0), (1, 0)$



b. $y = x^2 - 9$
Se sustituye y por 0.
$0 = x^2 - 9$
$x^2 - 9 = 0$
$(x + 3)(x - 3) = 0$
$x + 3 = 0$ o $x - 3 = 0$
$x = -3$ $x = 3$
R: $(-3, 0), (3, 0)$

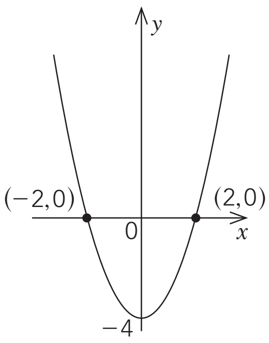


Fecha: dd–mm–aa
8-5-2 Función cuadrática e interceptos con el eje x

Ⓟ Encuentre las coordenadas donde la gráfica de la función interseca al eje x.
$y = x^2 - 4$

Ⓢ Cuando $y = 0$, la gráfica interseca al eje x.
$x^2 - 4 = 0$
$(x + 2)(x - 2) = 0$

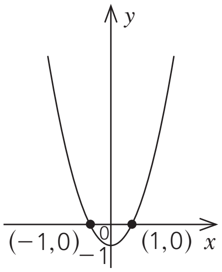
$x + 2 = 0$ o $x - 2 = 0$
$x = -2$ $x = 2$
R: $(-2, 0), (2, 0)$



Ⓒ Para encontrar las coordenadas donde una función cuadrática interseca al eje x, se puede resolver la ecuación considerando que $y = 0$, porque cuando $y = 0$, la función interseca al eje x.

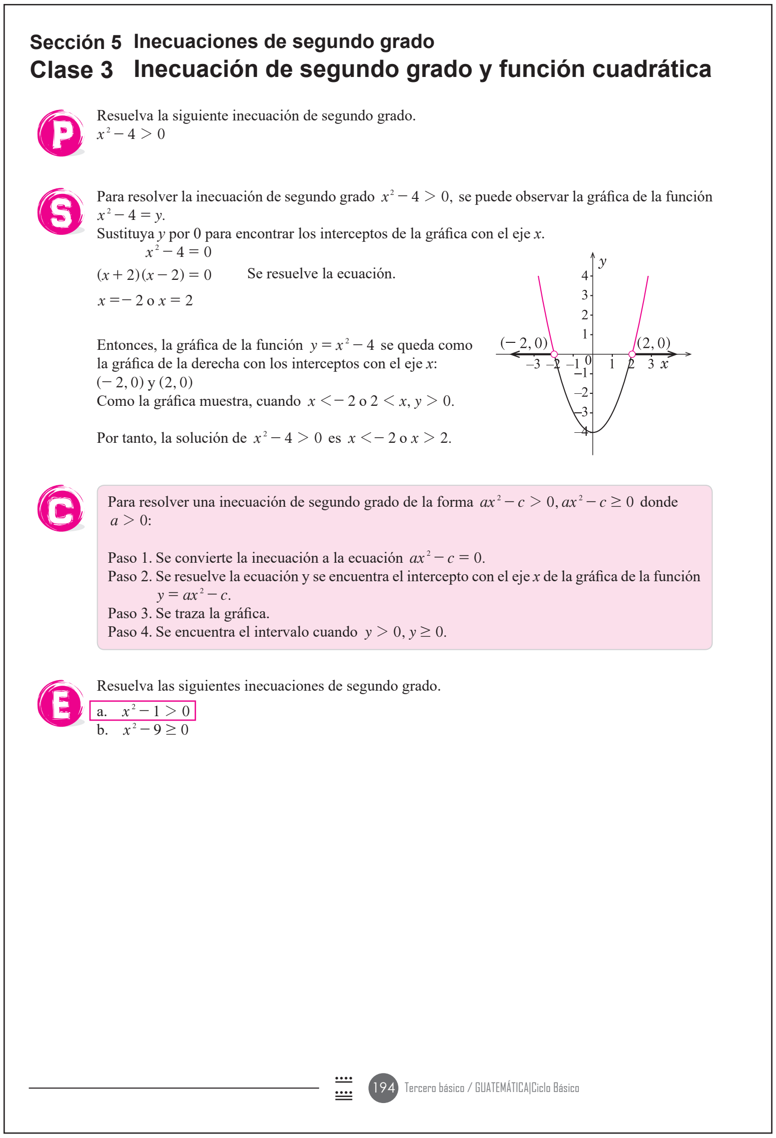
Ⓔ Encuentre las coordenadas donde la gráfica de la función interseca al eje x.

a. $y = x^2 - 1$
Se sustituye y por 0.
$0 = x^2 - 1$
$x^2 - 1 = 0$
$(x + 1)(x - 1) = 0$
$x + 1 = 0$ o $x - 1 = 0$
$x = -1$ $x = 1$
R: $(-1, 0), (1, 0)$



Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática

Aprendizaje esperado:
Resuelve una inecuación de segundo grado a través de la gráfica de la función cuadrática.



Sección 5 Inecuaciones de segundo grado
Clase 3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática

P Resuelva la siguiente inecuación de segundo grado.
$x^2 - 4 > 0$

S Para resolver la inecuación de segundo grado $x^2 - 4 > 0$, se puede observar la gráfica de la función $x^2 - 4 = y$.
Sustituya y por 0 para encontrar los interceptos de la gráfica con el eje x.

$x^2 - 4 = 0$
$(x+2)(x-2) = 0$ Se resuelve la ecuación.
$x = -2$ o $x = 2$

Entonces, la gráfica de la función $y = x^2 - 4$ se queda como la gráfica de la derecha con los interceptos con el eje x:
$(-2, 0)$ y $(2, 0)$
Como la gráfica muestra, cuando $x < -2$ o $2 < x$, $y > 0$.

Por tanto, la solución de $x^2 - 4 > 0$ es $x < -2$ o $x > 2$.

C Para resolver una inecuación de segundo grado de la forma $ax^2 - c > 0, ax^2 - c \geq 0$ donde $a > 0$:

Paso 1. Se convierte la inecuación a la ecuación $ax^2 - c = 0$.
Paso 2. Se resuelve la ecuación y se encuentra el intercepto con el eje x de la gráfica de la función $y = ax^2 - c$.
Paso 3. Se traza la gráfica.
Paso 4. Se encuentra el intervalo cuando $y > 0, y \geq 0$.

E Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.
a. $x^2 - 1 > 0$
b. $x^2 - 9 \geq 0$

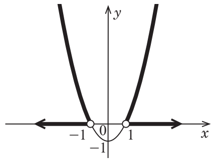
194 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

Solucionario de los ejercicios:

a. Considerando $y = x^2 - 1$, se sustituye y por 0.

$$0 = x^2 - 1$$
$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x+1)(x-1) = 0$$
$$x + 1 = 0 \quad \text{o} \quad x - 1 = 0$$
$$x = -1 \qquad x = 1$$

Entonces, los interceptos con el eje x son $x = -1$ y $x = 1$.

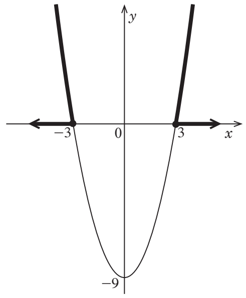


Por tanto, $y > 0$ cuando $x < -1$ o $x > 1$.

b. Considerando $y = x^2 - 9$, se sustituye y por 0.

$$0 = x^2 - 9$$
$$x^2 - 9 = 0$$
$$(x+3)(x-3) = 0$$
$$x + 3 = 0 \quad \text{o} \quad x - 3 = 0$$
$$x = -3 \qquad x = 3$$

Entonces, los interceptos con el eje x son $x = -3$ y $x = 3$.



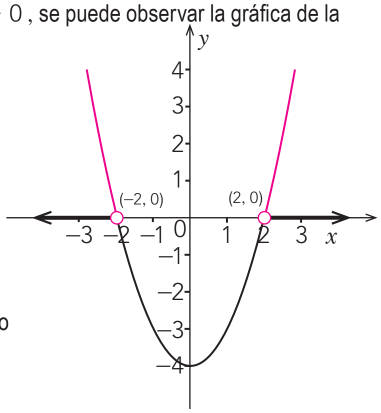
Por tanto, $y \geq 0$ cuando$x \leq -3$ o $x \geq 3$.

Fecha: dd–mm–aa
8-5-3 Inecuación de segundo grado y función cuadrática

Ⓟ Resuelva.
$x^2 - 4 > 0$

Ⓢ Para resolver $x^2 - 4 > 0$, se puede observar la gráfica de la función $x^2 - 4 = y$.
Se sustituye y por 0.

$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x+2)(x-2) = 0$$
$$x = -2 \quad \text{o} \quad x = 2$$



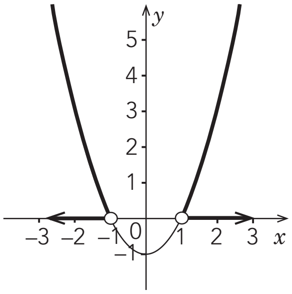
Por tanto, $y > 0$ cuando $x < -2$ o $2 < x$.

R: $x < -2$ o $x > 2$

Ⓒ Para resolver $ax^2 - c > 0, ax^2 - c \geq 0$ donde $a > 0$:
Paso 1. Se convierte la inecuación a $ax^2 - c = 0$.
Paso 2. Se resuelve la ecuación y se encuentra el intercepto con el eje x.
Paso 3. Se traza la gráfica.
Paso 4. Se encuentra el intervalo cuando $y > 0, y \geq 0$.

Ⓔ Resuelva.
a. $x^2 - 1 > 0$
$x^2 - 1 = y$
Se sustituye y por 0.

$$x^2 - 1 = 0$$
$$(x+1)(x-1) = 0$$
$$x = -1 \quad \text{o} \quad x = 1$$

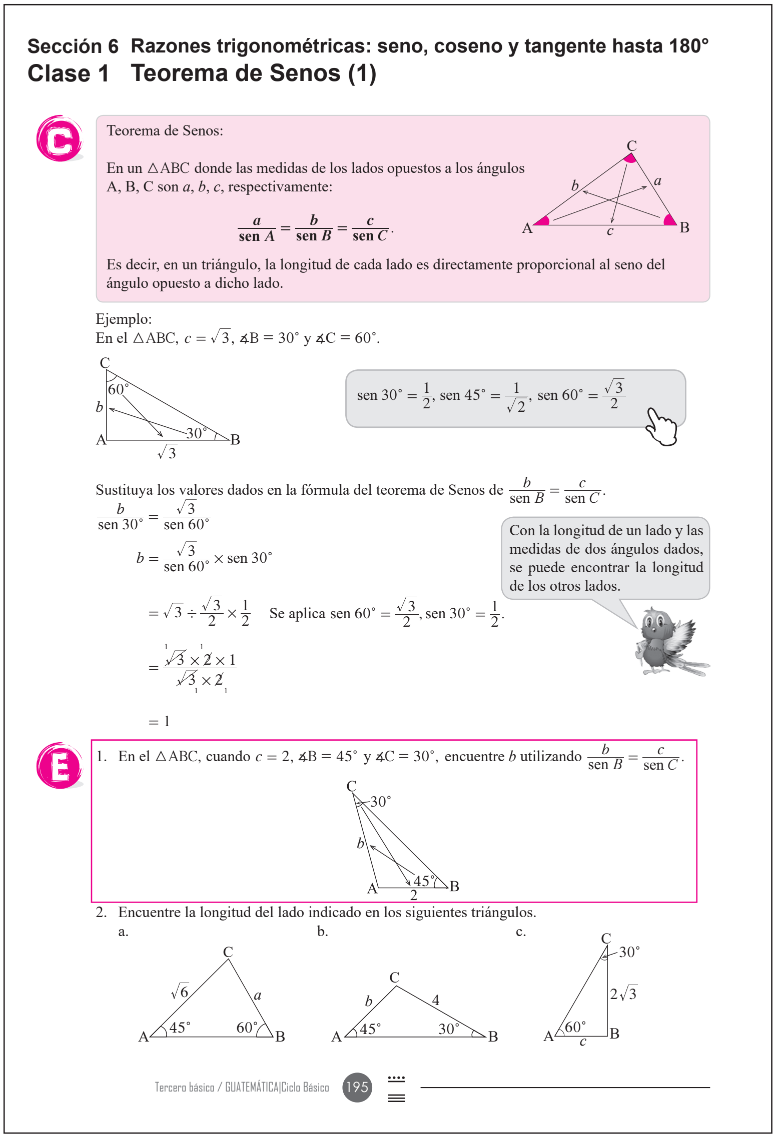


Por tanto, $y > 0$ cuando $x < -1$ o $1 < x$.

R: $x < -1$ o $x > 1$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 1 Teorema de Senos (1)

Aprendizaje esperado:
Encuentra la medida del lado desconocido de un triángulo usando el teorema de Senos.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 1 Teorema de Senos (1)

Ⓒ Teorema de Senos:

En un △ABC donde las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c, respectivamente:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

Es decir, en un triángulo, la longitud de cada lado es directamente proporcional al seno del ángulo opuesto a dicho lado.

Ejemplo:
En el △ABC, $c = \sqrt{3}$, ∡B = 30° y ∡C = 60°.

$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sustituya los valores dados en la fórmula del teorema de Senos de $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

$$\frac{b}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ}$$

$$b = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ} \times \text{sen } 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$ Se aplica $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$.

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 1}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= 1$$

Con la longitud de un lado y las medidas de dos ángulos dados, se puede encontrar la longitud de los otros lados.

Ⓔ 1. En el △ABC, cuando $c = 2$, ∡B = 45° y ∡C = 30°, encuentre b utilizando $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

2. Encuentre la longitud del lado indicado en los siguientes triángulos.
a. b. c.

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 195

Solucionario de los ejercicios:

1. $\frac{b}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{2}{\text{sen } 30^\circ}$

$$b = \frac{2}{\text{sen } 30^\circ} \times \text{sen } 45^\circ$$
$$= 2 \div \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{2 \times 2 \times 1}{1 \times \sqrt{2}}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \left(= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\right)$$

2. a. $\frac{a}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60^\circ}$

$$a = \frac{\sqrt{6}}{\text{sen } 60^\circ} \times \text{sen } 45^\circ$$
$$= \sqrt{6} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6} \times 2 \times 1}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{6}}$$
$$= 2$$

b. $\frac{b}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{4}{\text{sen } 45^\circ}$

$$b = \frac{4}{\text{sen } 45^\circ} \times \text{sen } 30^\circ$$
$$= 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{4 \times \sqrt{2} \times 1}{1 \times 1 \times 2}$$
$$= 2\sqrt{2}$$

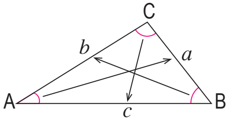
c. $\frac{c}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ}$

$$c = \frac{2\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ} \times \text{sen } 30^\circ$$
$$= 2\sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{2\sqrt{3} \times 2 \times 1}{\sqrt{3} \times 2}$$
$$= 2$$

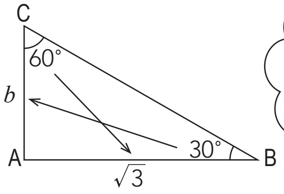
Fecha: dd–mm–aa
8-6-1 Teorema de Senos (1)

Ⓒ Teorema de Senos:
Si en un △ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c, respectivamente, entonces:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$



Ejemplo:
En el △ABC, $c = \sqrt{3}$, ∡B = 30° y ∡C = 60°.



$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{sen } 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Sustituya los valores en $\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$.

$$\frac{b}{\text{sen } 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ}$$

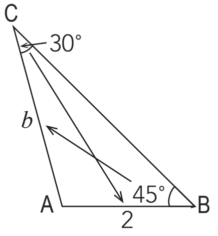
$$b = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 60^\circ} \times \text{sen } 30^\circ$$

$$= \sqrt{3} \div \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \overset{1}{\cancel{2}} \times 1}{\underset{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \times \underset{1}{\cancel{2}}}$$

$$= 1$$

Ⓔ 1. En el △ABC, cuando $c = 2$, ∡B = 45° y ∡C = 30°, encuentre b.



$$\frac{b}{\text{sen } 45^\circ} = \frac{2}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$b = \frac{2}{\text{sen } 30^\circ} \times \text{sen } 45^\circ$$

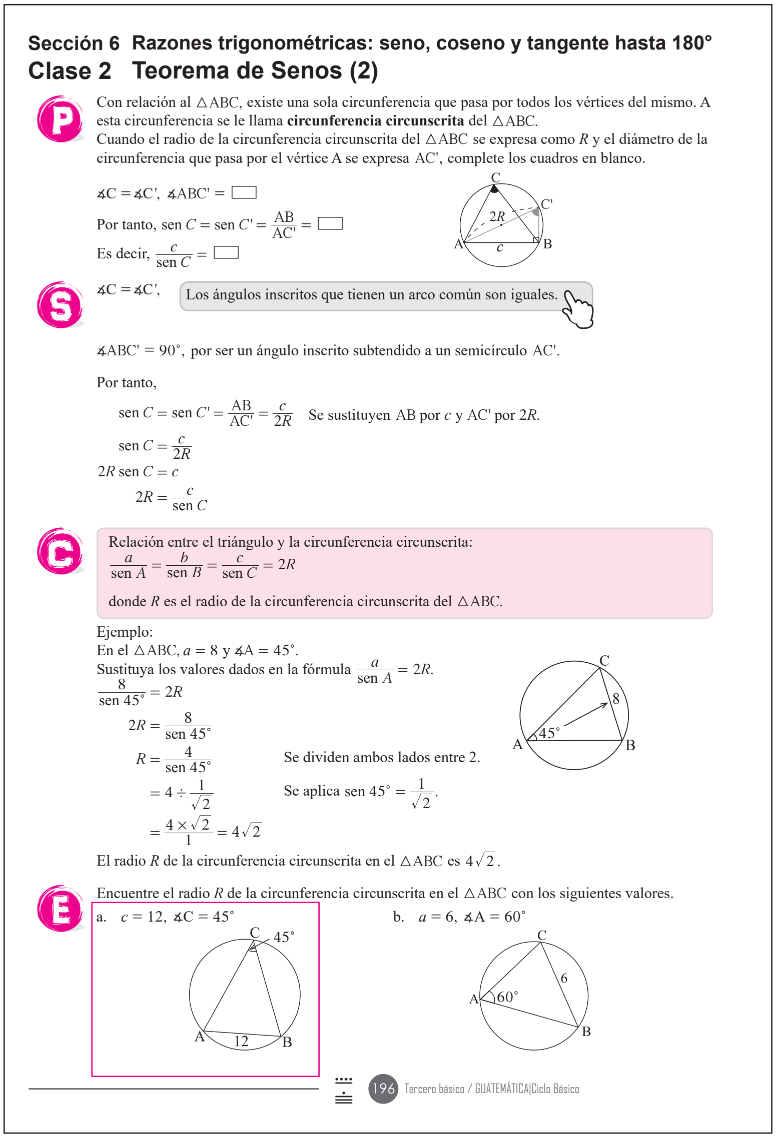
$$= 2 \div \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2 \times 2 \times 1}{1 \times \sqrt{2}}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} \left(= \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\right)$$ R: $b = \frac{4}{\sqrt{2}} (= 2\sqrt{2})$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 2 Teorema de Senos (2)

Aprendizaje esperado:
Encuentra el radio de la circunferencia circunscrita en un triángulo usando el teorema de Senos.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 2 Teorema de Senos (2)

P Con relación al △ABC, existe una sola circunferencia que pasa por todos los vértices del mismo. A esta circunferencia se le llama **circunferencia circunscrita** del △ABC.
Cuando el radio de la circunferencia circunscrita del △ABC se expresa como R y el diámetro de la circunferencia que pasa por el vértice A se expresa AC', complete los cuadros en blanco.

∡C = ∡C', ∡ABC' = $\square$

Por tanto, sen C = sen C' = $\frac{AB}{AC'} = \square$

Es decir, $\frac{c}{\text{sen } C} = \square$

S ∡C = ∡C', Los ángulos inscritos que tienen un arco común son iguales.

∡ABC' = 90°, por ser un ángulo inscrito subtendido a un semicírculo AC'.

Por tanto,

$\text{sen } C = \text{sen } C' = \frac{AB}{AC'} = \frac{c}{2R}$ Se sustituyen AB por c y AC' por $2R$.

$\text{sen } C = \frac{c}{2R}$

$2R \text{ sen } C = c$

$2R = \frac{c}{\text{sen } C}$

C Relación entre el triángulo y la circunferencia circunscrita:
$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$
donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del △ABC.

Ejemplo:
En el △ABC, a = 8 y ∡A = 45°.
Sustituya los valores dados en la fórmula $\frac{a}{\text{sen } A} = 2R$.

$\frac{8}{\text{sen } 45°} = 2R$

$2R = \frac{8}{\text{sen } 45°}$

$R = \frac{4}{\text{sen } 45°}$ Se dividen ambos lados entre 2.

$= 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$ Se aplica sen 45° = $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$= \frac{4 \times \sqrt{2}}{1} = 4\sqrt{2}$

El radio R de la circunferencia circunscrita en el △ABC es $4\sqrt{2}$.

E Encuentre el radio R de la circunferencia circunscrita en el △ABC con los siguientes valores.

a. c = 12, ∡C = 45°

b. a = 6, ∡A = 60°

Solucionario de los ejercicios:

a. $\frac{12}{\text{sen } 45°} = 2R$

$2R = \frac{12}{\text{sen } 45°}$

$2R \times \frac{1}{2} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \times \frac{1}{2}$

$R = \frac{6}{\text{sen } 45°}$

$= 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{6 \times \sqrt{2}}{1}$

$= 6\sqrt{2}$

b. $\frac{6}{\text{sen } 60°} = 2R$

$2R = \frac{6}{\text{sen } 60°}$

$2R \times \frac{1}{2} = \frac{6}{\text{sen } 60°} \times \frac{1}{2}$

$R = \frac{3}{\text{sen } 60°}$

$= 3 \div \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{3 \times 2}{\sqrt{3}}$

$= \frac{6}{\sqrt{3}} \left(= \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3} \right)$

Fecha: dd–mm–aa
8-6-2 Teorema de Senos (2)

Ⓟ Con relación al △ABC, existe una sola circunferencia que pasa por todos los vértices del mismo. A esta circunferencia se le llama circunferencia circunscrita del △ABC.
Cuando el radio de la circunferencia circunscrita del △ABC se expresa como R y el diámetro que pasa por A como AC', complete.

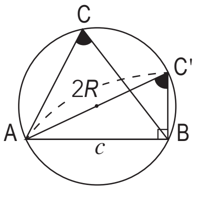
Ⓢ ∡C = ∡C', ∡ABC' = $\boxed{90°}$

Por tanto, $\text{sen } C = \text{sen } C' = \frac{AB}{AC'} = \boxed{\frac{c}{2R}}$

$\text{sen } C = \frac{c}{2R}$

$2R \text{ sen } C = c$

$2R = \frac{c}{\text{sen } C}$



Es decir, $\frac{c}{\text{sen } C} = \boxed{2R}$

Ⓒ Relación entre el triángulo y la circunferencia circunscrita:

$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} = 2R$

donde R es el radio de la circunferencia circunscrita del △ABC.

Ejemplo:
En el △ABC, a = 8 y ∡A = 45°.

Sustituya los valores en $\frac{a}{\text{sen } A} = 2R$.

$\frac{8}{\text{sen } 45°} = 2R$

$2R = \frac{8}{\text{sen } 45°}$

$R = \frac{4}{\text{sen } 45°}$

$R = 4 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= \frac{4 \times \sqrt{2}}{1} = 4\sqrt{2}$

R: $R = 4\sqrt{2}$

Ⓔ Encuentre R.
a. c = 12 y ∡C = 45°

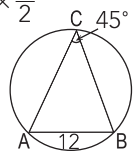
$\frac{12}{\text{sen } 45°} = 2R$

$2R \times \frac{1}{2} = \frac{12}{\text{sen } 45°} \times \frac{1}{2}$

$R = \frac{6}{\text{sen } 45°}$

$= 6 \div \frac{1}{\sqrt{2}}$

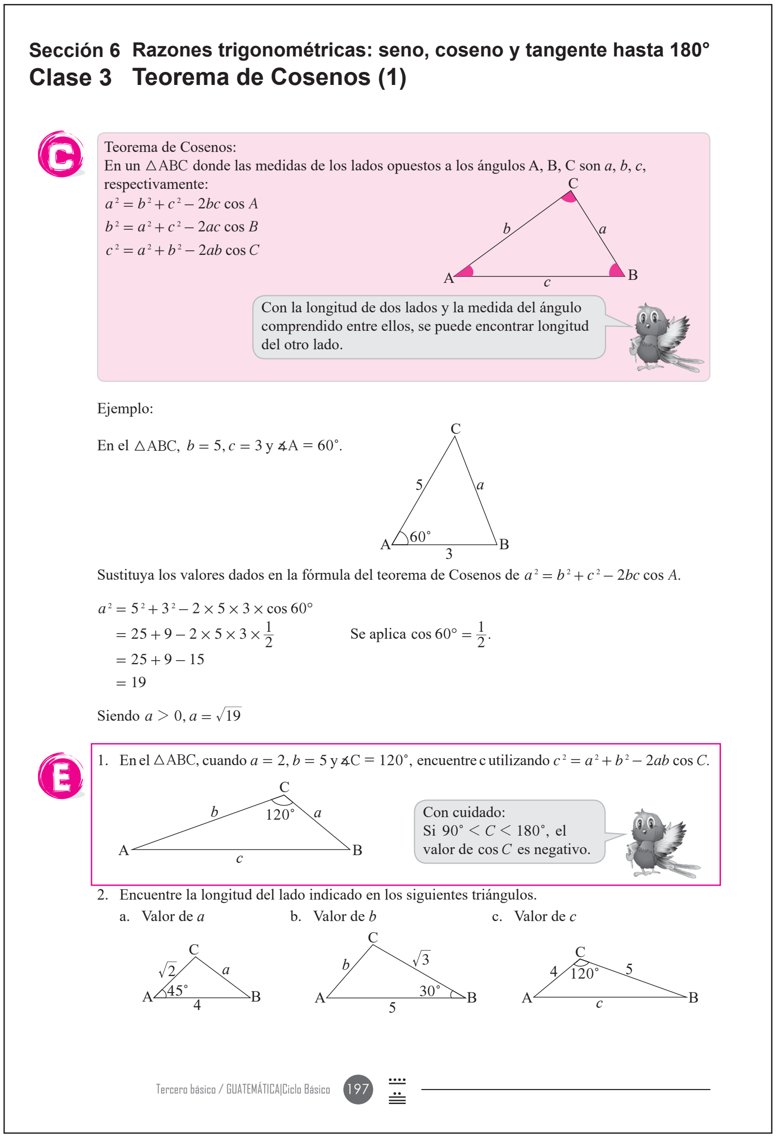
$= \frac{6 \times \sqrt{2}}{1} = 6\sqrt{2}$



R: $R = 6\sqrt{2}$

Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 3 Teorema de Cosenos (1)

Aprendizaje esperado:
Encuentra la medida del lado desconocido del triángulo usando el teorema de Cosenos.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 3 Teorema de Cosenos (1)

C

Teorema de Cosenos:
En un $\triangle$ABC donde las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c, respectivamente:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Con la longitud de dos lados y la medida del ángulo comprendido entre ellos, se puede encontrar longitud del otro lado.

Ejemplo:

En el $\triangle$ABC, $b = 5$, $c = 3$ y $\measuredangle$A = 60°.

Sustituya los valores dados en la fórmula del teorema de Cosenos de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

$a^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times5\times3\times\cos 60°$
$= 25 + 9 - 2\times5\times3\times\frac{1}{2}$ Se aplica $\cos 60° = \frac{1}{2}$.
$= 25 + 9 - 15$
$= 19$

Siendo $a > 0$, $a = \sqrt{19}$

E

1. En el $\triangle$ABC, cuando $a = 2$, $b = 5$ y $\measuredangle$C = 120°, encuentre c utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

Con cuidado:
Si $90° < C < 180°$, el valor de $\cos C$ es negativo.

2. Encuentre la longitud del lado indicado en los siguientes triángulos.
   a. Valor de a
   b. Valor de b
   c. Valor de c

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 197

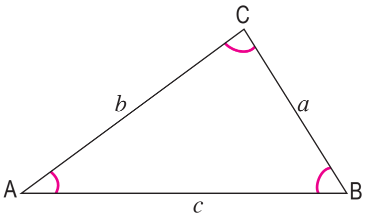
Solucionario de los ejercicios:

1. $c^2 = 2^2 + 5^2 - 2\times2\times5\times\cos 120°$
   $= 4 + 25 - 2\times2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
   $= 4 + 25 + 10$
   $= 39$
   Siendo $c > 0$, $c = \sqrt{39}$.
2. a. $a^2 = (\sqrt{2})^2 + 4^2 - 2\times\sqrt{2}\times4\times\cos 45°$
   $= 2 + 16 - 2\times\sqrt{2}\times4\times\frac{1}{\sqrt{2}}$
   $= 2 + 16 - 8$
   $= 10$
   Siendo $a > 0$, $a = \sqrt{10}$.
   b. $b^2 = (\sqrt{3})^2 + 5^2 - 2\times\sqrt{3}\times5\times\cos 30°$
   $= 3 + 25 - 2\times\sqrt{3}\times5\times\frac{\sqrt{3}}{2}$
   $= 3 + 25 - 15$
   $= 13$
   Siendo $b > 0$, $b = \sqrt{13}$.
   c. $c^2 = 5^2 + 4^2 - 2\times5\times4\times\cos 120°$
   $= 25 + 16 - 2\times5\times4\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
   $= 25 + 16 + 20$
   $= 61$
   Siendo $c > 0$, $c = \sqrt{61}$.

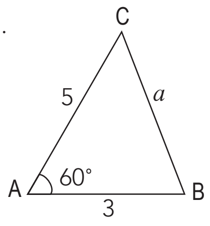
Fecha: dd–mm–aa
8-6-3 Teorema de Cosenos (1)

Ⓒ Teorema de Cosenos:

Si en un $\triangle$ABC, las medidas de los lados opuestos a los ángulos A, B, C son a, b, c, respectivamente, entonces:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$



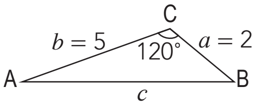
Ejemplo:
En el $\triangle$ABC, $b = 5$, $c = 3$ y $\measuredangle$A = 60°.



$a^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times5\times3\times\cos 60°$
$= 25 + 9 - 2\times5\times3\times\frac{1}{2}$
$= 25 + 9 - 15$
$= 19$
Siendo $a > 0$, $a = \sqrt{19}$.

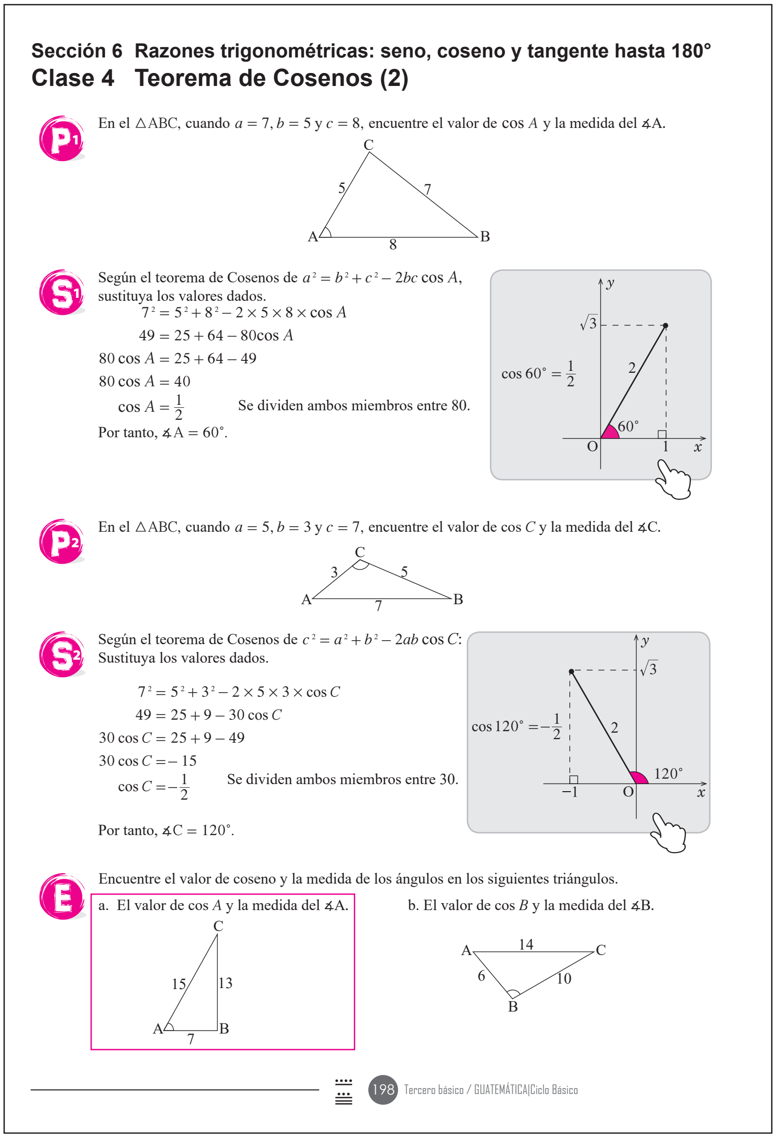
Ⓔ 1. En el $\triangle$ABC, cuando $a = 2$, $b = 5$ y $\measuredangle$C = 120°, encuentre c utilizando $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$.

$c^2 = 2^2 + 5^2 - 2\times2\times5\cos 120°$
$= 4 + 25 - 2\times2\times5\times\left(-\frac{1}{2}\right)$
$= 4 + 25 + 10$
$= 39$
Siendo $c > 0$, $c = \sqrt{39}$.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 4 Teorema de Cosenos (2)

Aprendizaje esperado:
Encuentra la medida del ángulo desconocido del triángulo usando el teorema de Cosenos.



Sección 6 Razones trigonométricas: seno, coseno y tangente hasta 180°
Clase 4 Teorema de Cosenos (2)

P1 En el △ABC, cuando $a = 7, b = 5$ y $c = 8$, encuentre el valor de cos A y la medida del ∡A.

S1 Según el teorema de Cosenos de $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$, sustituya los valores dados.

$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 5\times 8\times \cos A$$
$$49 = 25 + 64 - 80\cos A$$
$$80\cos A = 25 + 64 - 49$$
$$80\cos A = 40$$
$$\cos A = \frac{1}{2}$$

Se dividen ambos miembros entre 80.

Por tanto, ∡A = 60°.

$\cos 60° = \frac{1}{2}$

P2 En el △ABC, cuando $a = 5, b = 3$ y $c = 7$, encuentre el valor de cos C y la medida del ∡C.

S2 Según el teorema de Cosenos de $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$: Sustituya los valores dados.

$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times 5\times 3\times \cos C$$
$$49 = 25 + 9 - 30\cos C$$
$$30\cos C = 25 + 9 - 49$$
$$30\cos C = -15$$
$$\cos C = -\frac{1}{2}$$

Se dividen ambos miembros entre 30.

Por tanto, ∡C = 120°.

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$

E Encuentre el valor de coseno y la medida de los ángulos en los siguientes triángulos.

a. El valor de cos A y la medida del ∡A.

b. El valor de cos B y la medida del ∡B.

198 Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico

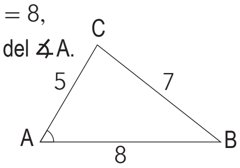
Solucionario de los ejercicios:

a.
$$13^2 = 15^2 + 7^2 - 2\times 15\times 7\times \cos A$$
$$169 = 225 + 49 - 210\cos A$$
$$210\cos A = 225 + 49 - 169$$
$$210\cos A = 105$$
$$\cos A = \frac{1}{2}$$
R: ∡A = 60°

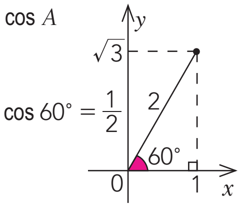
b.
$$14^2 = 10^2 + 6^2 - 2\times 10\times 6\times \cos B$$
$$196 = 100 + 36 - 120\cos B$$
$$120\cos B = 100 + 36 - 196$$
$$120\cos B = -60$$
$$\cos B = -\frac{1}{2}$$
R: ∡B = 120°

Fecha: dd–mm–aa
8-6-4 Teorema de Cosenos (2)

Ⓟ1 En el △ABC, cuando $a = 7, b = 5$ y $c = 8$, encuentre el valor de cos A y la medida del ∡A.

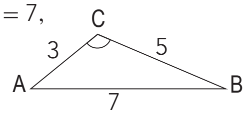


Ⓢ1 Según el teorema de Cosenos:
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$7^2 = 5^2 + 8^2 - 2\times 5\times 8\times \cos A$$
$$49 = 25 + 64 - 80\cos A$$
$$80\cos A = 25 + 64 - 49$$
$$80\cos A = 40$$
$$\cos A = \frac{1}{2}$$
R: ∡A = 60°



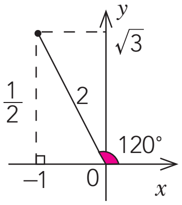
$\cos 60° = \frac{1}{2}$

Ⓟ2 En el △ABC, cuando $a = 5, b = 3$ y $c = 7$, encuentre cos C y la medida del ∡C.

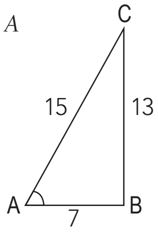


Ⓢ2 Según el teorema de Cosenos:
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$7^2 = 5^2 + 3^2 - 2\times 5\times 3\times \cos C$$
$$49 = 25 + 9 - 30\cos C$$
$$30\cos C = 25 + 9 - 49$$
$$30\cos C = -15$$
$$\cos C = -\frac{1}{2}$$
R: ∡C = 120°

$\cos 120° = -\frac{1}{2}$



Ⓔ a. Encuentre el valor de cos A y la medida del ∡A.
Según el teorema de cosenos: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$
$$13^2 = 15^2 + 7^2 - 2\times 15\times 7\times \cos A$$
$$169 = 225 + 49 - 210\cos A$$
$$210\cos A = 225 + 49 - 169$$
$$210\cos A = 105$$
$$\cos A = \frac{1}{2}$$
R: ∡A = 60°



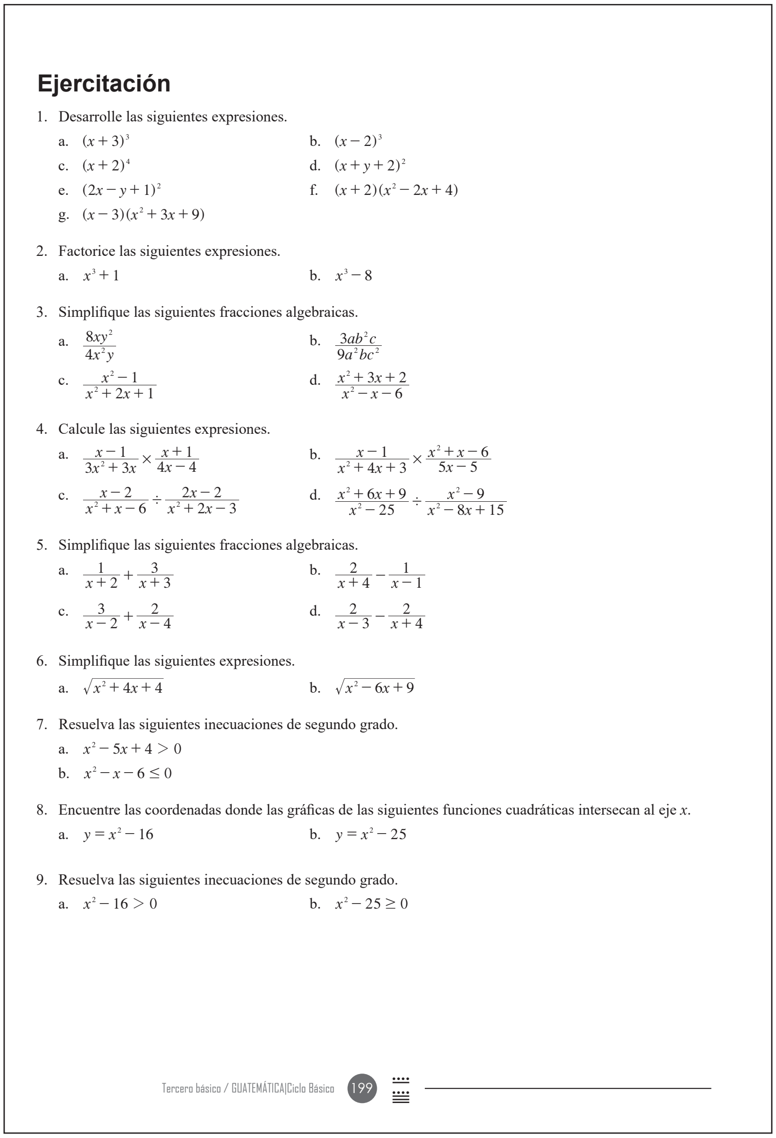
Complemento de solucionario de los ejercicios

Sección 3, clase 3

e. $$\frac{4}{x-2}+\frac{3}{x+3}=\frac{4(x+3)}{(x-2)(x+3)}+\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{4x+12}{(x-2)(x+3)}+\frac{3x-6}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{4x+12+3x-6}{(x-2)(x+3)}$$
$$=\frac{7x+6}{(x-2)(x+3)}$$

f. $$\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}=\frac{x-3}{(x-4)(x-3)}-\frac{x-4}{(x-4)(x-3)}$$
$$=\frac{x-3-(x-4)}{(x-4)(x-3)}$$
$$=\frac{x-3-x+4}{(x-4)(x-3)}$$
$$=\frac{1}{(x-4)(x-3)}$$

Ejercitación



Ejercitación

1. Desarrolle las siguientes expresiones.
   - a. $(x+3)^3$
   - b. $(x-2)^3$
   - c. $(x+2)^4$
   - d. $(x+y+2)^2$
   - e. $(2x-y+1)^2$
   - f. $(x+2)(x^2-2x+4)$
   - g. $(x-3)(x^2+3x+9)$

2. Factorice las siguientes expresiones.
   - a. x^3+1
   - b. x^3-8

3. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.
   - a. $\frac{8xy^2}{4x^2y}$
   - b. $\frac{3ab^2c}{9a^2bc^2}$
   - c. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}$
   - d. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}$

4. Calcule las siguientes expresiones.
   - a. $\frac{x-1}{3x^2+3x}\times\frac{x+1}{4x-4}$
   - b. $\frac{x-1}{x^2+4x+3}\times\frac{x^2+x-6}{5x-5}$
   - c. $\frac{x-2}{x^2+x-6}\div\frac{2x-2}{x^2+2x-3}$
   - d. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-25}\div\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$

5. Simplifique las siguientes fracciones algebraicas.
   - a. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}$
   - b. $\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x-1}$
   - c. $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}$
   - d. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+4}$

6. Simplifique las siguientes expresiones.
   - a. $\sqrt{x^2+4x+4}$
   - b. $\sqrt{x^2-6x+9}$

7. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.
   - a. $x^2-5x+4>0$
   - b. $x^2-x-6\leq 0$

8. Encuentre las coordenadas donde las gráficas de las siguientes funciones cuadráticas intersecan al eje x.
   - a. $y=x^2-16$
   - b. $y=x^2-25$

9. Resuelva las siguientes inecuaciones de segundo grado.
   - a. $x^2-16>0$
   - b. $x^2-25\geq 0$

Tercero básico / GUATEMÁTICA|Ciclo Básico 199

Solucionario:

1. a. $(x+3)^3$

$= x^3+3\times3\times x^2+3\times3^2\times x+3^3$

$= x^3+9x^2+3\times9\times x+27$

$= x^3+9x^2+27x+27$

b. $(x-2)^3$

$= x^3-3\times2\times x^2+3\times2^2\times x-2^3$

$= x^3-6x^2+3\times4\times x-8$

$= x^3-6x^2+12x-8$

c. $(x+2)^4$

$= (x+2)(x+2)(x+2)(x+2)$

$= (x+2)^2(x+2)^2$

$= (x^2+4x+4)(x^2+4x+4)$

$= x^4+4x^3+4x^2+4x^3+16x^2+16x+4x^2+16x+16$

$= x^4+8x^3+24x^2+32x+16$

d. $(x+y+2)^2$

$= x^2+y^2+2^2+2\times x\times y+2\times y\times2+2\times2\times x$

$= x^2+y^2+4+2xy+4y+4x$

e. $(2x-y+1)^2$

$= (2x)^2+(-y)^2+1^2+2\times2x\times(-y)$

$+2\times(-y)\times1+2\times1\times2x$

$= 4x^2+y^2+1-4xy-2y+4x$

f. $(x+2)(x^2-2x+4)=x^3+8$

g. $(x-3)(x^2+3x+9)=x^3-27$

2. a. $x^3+1=x^3+1^3=(x+1)(x^2-x+1)$

b. $x^3-8=x^3-2^3=(x-2)(x^2+2x+4)$

3. a. $\frac{8xy^2}{4x^2y}=\frac{\cancel{8}^2\times\cancel{x}\times\cancel{y}\times y}{\cancel{4}^1\times\cancel{x}\times x\times\cancel{y}}=\frac{2y}{x}$

b. $\frac{3ab^2c}{9a^2bc^2}=\frac{\cancel{3}^1\times\cancel{a}\times\cancel{b}\times b\times\cancel{c}}{\cancel{9}^3\times\cancel{a}\times a\times\cancel{b}\times\cancel{c}\times c}=\frac{b}{3ac}$

c. $\frac{x^2-1}{x^2+2x+1}=\frac{(x-1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x+1)}$

$=\frac{x-1}{x+1}$

d. $\frac{x^2+3x+2}{x^2-x-6}=\frac{\cancel{(x+2)}(x+1)}{\cancel{(x+2)}(x-3)}$

$=\frac{x+1}{x-3}$

4. a. $\frac{x-1}{3x^2+3x}\times\frac{x+1}{4x-4}$

$=\frac{\cancel{x-1}}{3x\cancel{(x+1)}}\times\frac{\cancel{x+1}}{4\cancel{(x-1)}}=\frac{1}{12x}$

b. $\frac{x-1}{x^2+4x+3}\times\frac{x^2+x-6}{5x-5}$

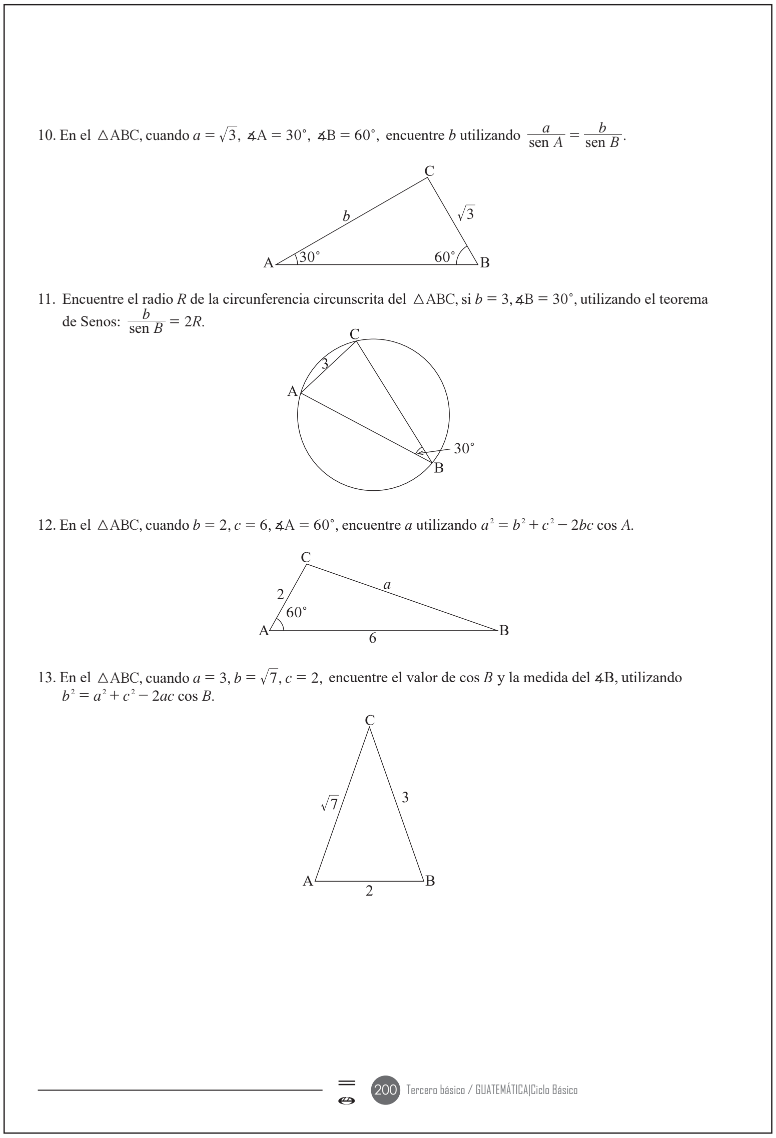
$=\frac{\cancel{x-1}}{(x+1)\cancel{(x+3)}}\times\frac{(x-2)\cancel{(x+3)}}{5\cancel{(x-1)}}=\frac{x-2}{5(x+1)}$

c. $\frac{x-2}{x^2+x-6}\div\frac{2x-2}{x^2+2x-3}$

$=\frac{x-2}{x^2+x-6}\times\frac{x^2+2x-3}{2x-2}$

$=\frac{\cancel{x-2}}{\cancel{(x-2)}\cancel{(x+3)}}\times\frac{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+3)}}{2\cancel{(x-1)}}$

$=\frac{1}{2}$



10. En el △ABC, cuando $a=\sqrt{3}$, ∡A = 30°, ∡B = 60°, encuentre b utilizando $\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}$.

11. Encuentre el radio R de la circunferencia circunscrita del △ABC, si $b=3$, ∡B = 30°, utilizando el teorema de Senos: $\frac{b}{\text{sen } B}=2R$.

12. En el △ABC, cuando $b=2$, $c=6$, ∡A = 60°, encuentre a utilizando $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

13. En el △ABC, cuando $a=3$, $b=\sqrt{7}$, $c=2$, encuentre el valor de $\cos B$ y la medida del ∡B, utilizando $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$.

d. $\frac{x^2+6x+9}{x^2-25}\div\frac{x^2-9}{x^2-8x+15}$

$=\frac{x^2+6x+9}{x^2-25}\times\frac{x^2-8x+15}{x^2-9}$

$=\frac{\cancel{(x+3)}(x+3)}{(x+5)\cancel{(x-5)}}\times\frac{\cancel{(x-3)}\cancel{(x-5)}}{\cancel{(x+3)}\cancel{(x-3)}}$

$=\frac{x+3}{x+5}$

5. a. $\frac{1}{x+2}+\frac{3}{x+3}=\frac{x+3}{(x+2)(x+3)}+\frac{3(x+2)}{(x+2)(x+3)}$

$=\frac{x+3}{(x+2)(x+3)}+\frac{3x+6}{(x+2)(x+3)}$

$=\frac{x+3+3x+6}{(x+2)(x+3)}$

$=\frac{4x+9}{(x+2)(x+3)}$

b. $\frac{2}{x+4}-\frac{1}{x-1}=\frac{2(x-1)}{(x+4)(x-1)}-\frac{x+4}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{2x-2}{(x+4)(x-1)}-\frac{x+4}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{2x-2-(x+4)}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{2x-2-x-4}{(x+4)(x-1)}$

$=\frac{x-6}{(x+4)(x-1)}$

c. $\frac{3}{x-2}+\frac{2}{x-4}=\frac{3(x-4)}{(x-2)(x-4)}+\frac{2(x-2)}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{3x-12}{(x-2)(x-4)}+\frac{2x-4}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{3x-12+2x-4}{(x-2)(x-4)}$

$=\frac{5x-16}{(x-2)(x-4)}$

d. $\frac{2}{x-3}-\frac{2}{x+4}=\frac{2(x+4)}{(x-3)(x+4)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(x+4)}$

$=\frac{2x+8}{(x-3)(x+4)}-\frac{2x-6}{(x-3)(x+4)}$

$=\frac{2x+8-(2x-6)}{(x-3)(x+4)}$

$=\frac{2x+8-2x+6}{(x-3)(x+4)}$

$=\frac{14}{(x-3)(x+4)}$

6. a. $\sqrt{x^2+4x+4}=\sqrt{(x+2)^2}$

$=x+2$

b. $\sqrt{x^2-6x+9}=\sqrt{(x-3)^2}$

$=x-3$

7. a. $x^2-5x+4<0$

$(x-1)(x-4)<0$

Cuando $x=1, (x-1)(x-4)=0$

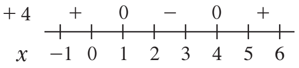
Cuando $x=4, (x-1)(x-4)=0$

Cuando $x<1, (x-1)(x-4)>0$

Cuando $1<x<4, (x-1)(x-4)<0$

Cuando $x>4, (x-1)(x-4)>0$

Signo de x^2-5x+4



Por tanto, la solución es $1<x<4$.

b. $x^2 - x - 6 \geq 0$

$(x+2)(x-3) \geq 0$

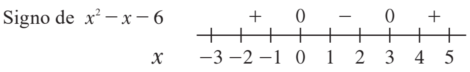
Cuando $x = -2, (x+2)(x-3) = 0$

Cuando $x = 3, (x+2)(x-3) = 0$

Cuando $x \leq -2, (x+2)(x-3) \geq 0$

Cuando $-2 \leq x \leq 3, (x+2)(x-3) \leq 0$

Cuando $x \geq 3, (x+2)(x-3) \geq 0$



Por tanto, la solución es $-2 \leq x \leq 3$.

8. a. $y = x^2 - 16$

Se sustituye y por 0.

$$0 = x^2 - 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x+4)(x-4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = 4$$

R: $(-4, 0), (4, 0)$

b. $y = x^2 - 25$

Se sustituye y por 0.

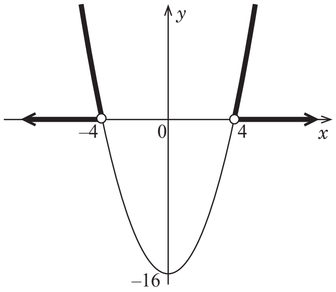
$$0 = x^2 - 25$$
$$x^2 - 25 = 0$$
$$(x+5)(x-5) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$
$$x = -5 \qquad x = 5$$

R: $(-5, 5), (5, 0)$

9. a. Considerando $y = x^2 - 16$, se sustituye y por 0.

$$0 = x^2 - 16$$
$$x^2 - 16 = 0$$
$$(x+4)(x-4) = 0$$
$$x + 4 = 0 \quad \text{o} \quad x - 4 = 0$$
$$x = -4 \qquad x = 4$$

Entonces, los interceptos con el eje x son $x = -4$ y $x = 4$.

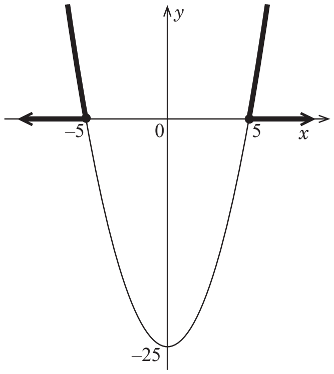


Por tanto, $y > 0$ cuando $x < -4$ o $x > 4$.

b. Considerando $y = x^2 - 25$, se sustituye y por 0.

$$0 = x^2 - 25$$
$$x^2 - 25 = 0$$
$$(x+5)(x-5) = 0$$
$$x + 5 = 0 \quad \text{o} \quad x - 5 = 0$$
$$x = -5 \qquad x = 5$$

Entonces, los interceptos con el eje x son $x = -5$ y $x = 5$.



Por tanto, $y \geq 0$ cuando $x \leq -5$ o $x \geq 5$.

10. $\dfrac{\sqrt{3}}{\text{sen } 30^\circ} = \dfrac{b}{\text{sen } 60^\circ}$

$$\frac{b}{\text{sen } 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 30^\circ}$$
$$b = \frac{\sqrt{3}}{\text{sen } 30^\circ} \times \text{sen } 60^\circ$$
$$= \sqrt{3} \div \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3}}{1 \times 2}$$
$$= 3$$

11. $\dfrac{3}{\text{sen } 30^\circ} = 2R$

$$2R = \frac{3}{\text{sen } 30^\circ}$$
$$2R \times \frac{1}{2} = \frac{3}{\text{sen } 30^\circ} \times \frac{1}{2}$$
$$R = \frac{3}{\text{sen } 30^\circ} \times \frac{1}{2}$$
$$= 3 \div \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$
$$= \frac{3 \times 2 \times 1}{1 \times 2}$$
$$= 3$$

12. $a^2 = 2^2 + 6^2 - 2 \times 2 \times 6 \times \cos 60^\circ$

$$= 4 + 36 - 2 \times 2 \times 6 \times \frac{1}{2}$$
$$= 40 - 12$$
$$= 28$$

Siendo $a > 0$, $a = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$.

13. $(\sqrt{7})^2 = 3^2 + 2^2 - 2 \times 3 \times 2 \times \cos B$

$$7 = 9 + 4 - 12 \cos B$$
$$12 \cos B = 9 + 4 - 7$$
$$12 \cos B = 6$$
$$\cos B = \frac{1}{2}$$

R: $\measuredangle B = 60^\circ$